UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Daniel Rolando Ovalle Peña

Álgebras e Álgebras Base em Categorias Monoidais Trançadas

Florianópolis
2024

Daniel Rolando Ovalle Peña

Álgebras e Álgebras Base em Categorias Monoidais Trançadas

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de Doutor em Matemática Pura .
Orientadora: Profa. Virginia Silva Rodrigues, Dra.

Florianópolis
2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Peña, Daniel Rolando
Álgebras e Álgebras Base em Categorias Monoidais Trançadas / Daniel Rolando Peña ; orientadora, Virginia Rodrigues, 2024.
113 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebra base. 3. Categorias Trançadas. 4. Extensões dinâmicas. 5. Isomorfismos Monoidais. I. Rodrigues, Virginia. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Daniel Rolando Ovalle Peña

Álgebras e Álgebras Base em Categorias Monoidais Trançadas

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Profa. Luz Adriana Mejía Castaño, Dra.
Universidad del Norte

Prof.Alveri Alves Sant'Ana, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Prof. Maico Felipe Silva Ribeiro, Dr.
Universidade Federal do Espírito Santo

Profa. Julia Yael Plavnik , Dra.
Indiana University Bloomington

Prof. Abdelmoubine Amar Henni, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Doutor em Matemática Pura .

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Profa. Virginia Silva Rodrigues, Dra.
Orientadora

Florianópolis, 2024.

Este trabalho é dedicado ao meu filho, minha esposa e minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por me permitir viver esta linda experiência e por me ajudar a concluí-la. À minha orientadora, Virginia, pelo apoio incondicional e pela orientação ao longo de todo este processo. À minha família, pelo seu apoio constante. Finalmente, agradeço à Universidade Federal de Santa Catarina e à CAPES pelo período de bolsa de doutorado, que foi fundamental para a realização desta tese.

RESUMO

Esta tese estuda estruturas monoidais de certas categorias a partir de suas álgebras. A estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$, sendo A uma álgebra em $\mathcal{C}$, permite que demonstremos que as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ sejam monoidalmente isomorfas. Também provamos que as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ são isomorfas, apenas como categorias, baseando-nos no conceito do centro de Müger, o que assegura a comutatividade da álgebra $A \otimes B$. A partir desse último isomorfismo, provamos que a categoria ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ possui estrutura monoidal induzida pela estrutura monoidal de ${}_A\mathcal{C}_A$. Finalmente, estudamos o conceito de álgebra base, que são álgebras comutativas em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, e estabelecemos que o produto tensorial de duas álgebras base resulta em outra álgebra base. Além disso, discutimos as extensões dinâmicas e fornecemos uma prova, independente da prova existente na literatura, sobre a funtorialidade do tensor que garante que extensões dinâmicas sejam monoidais. Esta pesquisa contribui para uma compreensão mais profunda das relações entre as estruturas categóricas e suas aplicações na álgebra clássica.

Palavras-chave: Álgebra, Álgebra base, Categorias Monoidais, Categorias Trançadas, Extensões dinâmicas, Isomorfismos Monoidais.

ABSTRACT

This thesis studies monoidal structures of certain categories based on their algebras. The monoidal structure of the category ${}_A\mathcal{C}_A$, where A is an algebra in $\mathcal{C}$, allows us to demonstrate that the categories ${}_A\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}_A$ are monoidally isomorphic. We also prove that the categories ${}_A\mathcal{C}_B$ and ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ are isomorphic, just as categories, based on the concept of the center of Müger, which guarantees the commutativity of the algebra $A \otimes B$. From this last isomorphism, we show that the category ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ has a monoidal structure induced by the monoidal structure of ${}_A\mathcal{C}_A$. Finally, we study the concept of base algebra, which are commutative algebras in $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, and establish that the tensor product of two base algebras results in another base algebra. Additionally, we discuss dynamic extensions and provide a proof, independent of existing proofs in the literature, regarding the functoriality of the tensor that ensures dynamic extensions are monoidal. This research contributes to a deeper understanding of the relationships between categorical structures and their applications in classical algebra.

Keywords: Base Algebra, Monoidal Categories, Braided Categories, Dynamical Extensions,Monoidal Isomorphisms.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A teoria de categorias introduzida por S. Eilenberg e S. Mac Lane em 1945, veja [15], emerge como uma ferramenta poderosa para abstrair e descrever estruturas matemáticas em diversos campos. A proposta central dessa teoria é oferecer uma linguagem comum que permita estudar propriedades gerais de conceitos matemáticos como, por exemplo, grupos e seus morfismos na álgebra clássica e espaços topológicos e funções contínuas na topologia, para estudar propriedades que possam ser obtidas de maneira independente do contexto específico em que se inserem. Este enfoque abstrato não só revela conexões intrínsecas entre diferentes áreas, mas também permite a generalização de resultados e técnicas.

Em 1963, S. Mac Lane avançou ainda mais essa teoria ao definir as categorias monoidais, que integram um funtor de tensorização $\otimes$ e um objeto unidade $\mathbf{1}$, respeitando axiomas fundamentais como o do pentágono e o do triângulo. Essas estruturas têm se mostrado essenciais para o desenvolvimento de novas definições e conceitos dentro da teoria de categorias, resultando em aplicações notáveis em áreas como teoria da representação, grupos quânticos e álgebra de operadores. Um dos desdobramentos mais significativos dessa evolução teórica foi a introdução das categorias Tannakianas por Saavedra-Rivano [26], que abordou a simetria e a estrutura monoidal em categorias abelianas, motivado por questões emergentes em geometria algébrica e teoria dos números. Desde então, a pesquisa em categorias tensoriais, que englobam tanto as categorias monoidais quanto as abelianas, tem se mostrado um campo promissor e em expansão.

A presente tese é dedicada ao estudo do importante papel que as álgebras e seus módulos desempenham no contexto das categorias monoidais. Estudamos fundamentalmente categorias monoidais trançadas e suas álgebras, importantes para estabelecer isomorfismos, isomorfismos monoidais e a construção de álgebras base em uma categoria monoidal, conforme apresentado em [4]. A seguir, detalhamos como esse trabalho está organizado.

No Capítulo 2, são estabelecidos as preliminares necessárias. Definimos álgebras, coálgebras, módulos e comódulos numa categoria monoidal. Recordamos o conceito de categorias trançadas e o centro de Drinfel'd, ou simplesmente, centro de uma categoria monoidal, temas necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. A necessidade de considerar categorias monoidais trançadas - em particular, o centro de Drinfel'd é uma categoria monoidal trançada - gira em torno de que necessitamos que as álgebras em questão sejam comutativas. Ainda no contexto de categorias monoidais, considerando a categoria dos **k**-espaços vetoriais, ao final desse capítulo, fazemos uma recordação rápida sobre sobre biálgebras e álgebras de Hopf. Esses conceitos nos são úteis para explicar um exemplo de álgebra base do Capítulo 4.

No Capítulo 3, inicialmente nos dedicamos a apresentar a construção da estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$, conforme abordada em [5] e [17]. Neste contexto, é demonstrado que as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ são monoidalmente isomorfas, quando A é uma álgebra comutativa. Sabemos da álgebra clássica que, se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são álgebras sobre um anel comutativo R, então a categoria dos $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$-bimódulos, ${}_{\mathcal{R}}\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ é isomorfa à categoria ${}_{\mathcal{R}\otimes\mathcal{S}^{op}}\mathcal{M}$, dos $\mathcal{R}\otimes\mathcal{S}^{op}$-módulos à esquerda. Pensando nesse resultado, conseguimos provar que as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ são isomorfas, onde A e B são álgebras comutativas. Para realizar essa prova, é fundamental discutir o centro de Müger (veja [19]), uma vez que essa definição nos permite garantir que $A \otimes B$ seja uma álgebra comutativa, assim como garantir que outros cálculos importantes sejam verdadeiros. Posteriormente, induzimos uma estrutura monoidal para a categoria ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$, estrutura que se fundamenta no fato de que ${}_A\mathcal{C}_B$ é isomorfa a ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ e na monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$.

No Capítulo 4, abordamos o conceito de álgebra base. Essas álgebras são caracterizadas como álgebras comutativas em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, centro de Drinfel'd de $\mathcal{C}$. Sabendo que $\mathcal{Z}({}_H\mathcal{M})$ é equivalente à categoria de módulos de Yetter-Drinfel'd ${}_H^H\mathcal{YD}$, no caso particular em que a álgebra de Hopf H seja de dimensão finita, veja [25], (e portanto tenha antípoda bijetora). Assim, as álgebras base em ${}_H\mathcal{M}$ identificam-se com as álgebras comutativas em ${}_H^H\mathcal{YD}$. A bijetividade da antípoda nos garante também que ${}_H^H\mathcal{YD}$ seja trançada. Em seguida, demonstramos que o produto tensorial de duas álgebras base também resulta em outra álgebra base, desde que sejam centralizadoras uma da outra (ou estejam no centro de Müger). Finalizamos, recordando o conceito de extensão dinâmica sobre uma álgebra base, onde é provado que extensões dinâmicas são categorias monoidais. A nossa contribuição é fornecer uma prova independente de que o tensor definido é, de fato, um funtor.

O leitor poderá observar ao ler essa tese, a grande quantidade de contas longas, em se tratando de "categorias, isso não é de se assustar", pois só podemos compor, ou seja, comutar diagramas. Nossa ideia inicial, era trabalharmos com categorias monoidais que não fossem estritas, entretanto nossas contas começaram a tornar-se inviáveis e quase incompreensíveis. Assim, consideramos a condição estrita, que é admitida por muitos autores estudiosos do tema sobre categorias monoidais. Para justificar essa afirmação, apresentamos ao final da tese um Apêndice, onde escolhemos um dos nossos resultados, o Teorema 4.6, no qual consta a sua prova, porém sem considerar a condição estrita. O leitor poderá então comparar as duas provas.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos algumas definições e resultados básicos acerca das categorias que trabalhamos. Tais definições e resultados podem ser encontrados em [5], [7], [15], [17] e [22]. Uma maneira razoável de pensarmos sobre teoria de categoria é que esta teoria seja uma "categorificação" da álgebra clássica no sentido de se estabelecer um dicionário entre tais assuntos, de tal forma que estruturas algébricas sejam recuperadas da correspondente estrutura categórica passando ao conjunto de classes de isomorfismos de objetos. Por exemplo, a noção de categoria é uma categorificação da noção de conjunto e já as categorias abelianas categorificam os grupos abelianos, veja ([7], Chapter 2).

2.1 CATEGORIAS

Definição 2.1. Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de

(i) uma coleção de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$,

(ii) para cada par de objetos (X, Y), X, Y em $Obj(\mathcal{C})$, existe uma coleção de morfismos de X para Y em $\mathcal{C}$, denotada por $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$,

(iii) para cada X em $Obj(\mathcal{C})$, existe um morfismo $id_X : X \to X$, chamado morfismo identidade,

(iv) para quaisquer X, Y, Z em $Obj(\mathcal{C})$ é definida uma operação, chamada composição, dada por

$$\begin{array}{rccc} \circ: & Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ & (g, f) & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Esta operação deve satisfazer, para quaisquer f em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e h em $Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$, as seguintes condições:

(a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (b) $f \circ id_X = f = id_Y \circ f$.

Denotamos um morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ por $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$, sendo X o domínio e Y o contradomínio, de f. Também, escreveremos $X \in \mathcal{C}$, para qualquer objeto X em $\mathcal{C}$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, para qualquer morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Os exemplos mais clássicos de categorias são aqueles em que os objetos são conjuntos que possuem uma estrutura adicional, e os morfismos são funções que preservam essa estrutura.

Exemplo 2.2. A categoria *Grp* é aquela cujos objetos são grupos e os morfismos são morfismos de grupos.

Exemplo 2.3. A categoria Ab é aquela cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são morfismos de grupos.

Exemplo 2.4. A categoria $Ring$ é aquela cujos objetos são anéis e os morfismos são morfismos de anéis.

Exemplo 2.5. Seja R um anel. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ (respectivamente $\mathcal{M}_R$) é aquela cujos objetos R-módulos à esquerda (respectivamente à direita) e os morfismos são morfismos de R-módulos à esquerda (respectivamente à direita).

A categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ ou R-bimódulos é aquela cujos objetos são R-bimódulos e os morfismos são morfismos de R-bimódulos.

Exemplo 2.6. Seja $\mathbf{k}$ um corpo. A categoria $Vect_{\mathbf{k}}$ é aquela cujos objetos são $\mathbf{k}$-espaços vetoriais e cujos morfismos são transformações $\mathbf{k}$-lineares.

Define-se também a categoria $vect_{\mathbf{k}}$ cujos objetos são $\mathbf{k}$-espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos são transformações $\mathbf{k}$-lineares.

Exemplo 2.7. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, chamada *categoria produto*, é aquela cujos objetos são pares (X, X'), em que $X \in \mathcal{C}$ e $X' \in \mathcal{D}$, e que dados $(X, X'), (Y, Y') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$,

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) = (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')).$$

Nesta categoria, dados $(X, X'), (Y, Y'), (Z, Z') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ e

$$\begin{aligned}((g, g'), (f, f')) \in & Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((Y, Y'), (Z, Z')) \times Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) = \\ &= (Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z), Hom_{\mathcal{C}}(Y', Z')) \times (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')),\end{aligned}$$

temos que a composição é dada por

$$\circ((g, g'), (f, f')) = (g, g') \circ (f, f') := (g \circ f, g' \circ f'),$$

em que $(g \circ g, g' \circ f') \in Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Z, Z'))$.

Observemos que $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'}) \in (Hom_{\mathcal{C}}(X, X), Hom_{\mathcal{D}}(X', X')$. De fato, para todo $(f, f') \in (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y'))$ temos que

$$(f, f') \circ (id_X, id_{X'}) = (f \circ id_X, f' \circ id_{X'}) = (f, f'),$$

e, para todo $(g, g') \in (Hom_{\mathcal{C}}(Z, X), Hom_{\mathcal{D}}(Z', X'))$, temos

$$(id_X, id_{X'}) \circ (g, g') = (id_X \circ g, id_{X'} \circ g') = (g, g').$$

Assim, $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$.

Os funtores podem ser entendidos como "funções" entre categorias e relacionam os objetos e os morfismos entre duas categorias. Por sua vez, as transformações naturais são responsáveis por relacionar funtores.

Definição 2.8. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de duas aplicações

(i) uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & Obj(\mathcal{C}) & \to & Obj(\mathcal{D}) \\ & X & \mapsto & F(X), \end{array}$$

em que cada $X \in \mathcal{C}$ está associado ao objeto $F(X)$ em $\mathcal{D}$,

(ii) uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

tal que, para qualquer $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, está associado ao morfismo $F(f)$ em $\mathcal{D}$.

Além disso, para quaisquer morfismos f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ são satisfeitas

$$\text{(a) } F(id_X) = id_{F(X)} \qquad \text{(b) } F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Um funtor *covariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, além de associar morfismos identidade de uma categoria aos morfismos identidade de outra categoria, quando aplicado em uma composição de morfismos, preserva a ordem desta composição. Veja os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "id_X"] \\
\mathcal{C} \arrow[dd, "F"'] & & Z & X \\
 & F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g)\circ F(f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] & F(X) \arrow[d, "id_{F(X)}"] \\
\mathcal{D} & & F(Z) & F(X).
\end{tikzcd}$$

Analogamente conseguimos definir o funtor *contravariante*, em que a única diferença figura na condição (b), que "inverte" a composição. Neste caso, para quaisquer morfismos

$f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, deve ocorrer $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$. Os diagramas a seguir ilustram a situação

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "id_X"] \\
\mathcal{C} \arrow[dd, "F"'] & & Z & X \\
 & F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] & F(X) \arrow[d, "id_{F(X)}"] \\
\mathcal{D} & & F(Z) \arrow[ul, "F(f)\circ F(g)"] \arrow[u, "F(g)"'] & F(X).
\end{tikzcd}$$

Neste trabalho, toda vez que nos referirmos a um funtor ele será covariante, salvo quando algo for dito ao contrário.

Exemplo 2.9. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O *funtor identidade* $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é tal que $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, para qualquer objeto X em $\mathcal{C}$ e qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$.

Exemplo 2.10. Seja $F : Ring \to Ab$ dado por $F(A) = A$ e $F(f) = f$, para todo A em *Ring* e todo $f : A \to B$ morfismo em *Ring*. Este funtor é chamado *funtor esquecimento*, pois em $F(A) = A$ é desconsiderada a estrutura de anel e é preservada apenas a estrutura de grupo abeliano. Já em $F(f) = f$ é esquecida a estrutura de morfismo de anéis e preserva-se apenas f como morfismo de grupos abelianos.

Outros exemplos de funtores similares seriam $F : {}_R\mathcal{M} \to Ab$ e $F : Ab \to Grp$.

Exemplo 2.11. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto em $\mathcal{C}$ fixado. Dado um morfismo $f : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, definimos $(X, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ como sendo a aplicação

$$(X, -)(Y) = (X, Y) \ \text{ e } \ (X, -)(f) = (id_X, f).$$

Afirmamos que $(X, -)$ é um funtor.

De fato, dado um objeto Y em $\mathcal{C}$ temos que

$$(X, -)(id_Y) = (id_X, id_Y) = id_{(X,Y)} = id_{(X,-)(Y)}$$

e portanto vale (a). Além disso, dados $f : Y \to Z$ e $g : Z \to W$ morfismos em $\mathcal{C}$, temos

$$(X, -)(g\circ f) = (id_X, g\circ f) = (id_X \circ id_X, g\circ f) = (id_X, g)\circ(id_X, f) = (X, -)(g)\circ(X, -)(f),$$

e portanto, vale (b).

Analogamente conseguimos definir o funtor $(-,Y)$. Estes funtores são importantes para a definição de um determinado funtor ser exato à direita, como apontaremos adiante.

Exemplo 2.12. Consideremos $\times : Set \times Set \to Set$ definido por

$$\times(X,Y) = X \times Y \text{ e } \times(f,g) = f \times g,$$

em que $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ e assim, $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ é definida por $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Afirmamos que $\times$ é um funtor.

De fato, sejam $f : X \to X'$, $f' : X' \to X''$, $g : Y \to Y'$ e $g' : Y' \to Y''$. Então, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}
(\times(id_{(X,Y)}))(x,y) &= (\times(id_X, id_Y))(x,y) \\
&= (id_X \times id_Y)(x,y) \\
&= (id_X(x), id_Y(y)) \\
&= (x,y) \\
&= id_{X\times Y}(x,y) \\
&= id_{\times(X,Y)}(x,y)
\end{aligned}$$

e assim, $\times(id_{(X,Y)}) = id_{\times(X,Y)}$. Também,

$$\begin{aligned}
(\times((f',g') \circ (f,g)))(x,y) &= (\times(f' \circ f, g' \circ g))(x,y) \\
&= ((f' \circ f) \times (g' \circ g))(x,y) \\
&= ((f' \circ f)(x), (g' \circ g)(y)) \\
&= (f'(f(x)), g'(g(y))) \\
&= (f' \times g')(f(x), g(y)) \\
&= (f' \times g')((f \times g)(x,y)) \\
&= ((f' \times g') \circ (f \times g))(x,y)
\end{aligned}$$

e portanto, $\times((f',g') \circ (f,g)) = (f' \times g') \circ (f \times g) = \times(f',g') \circ \times(f,g)$.

Exemplo 2.13. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ categorias. Dados dois funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, definimos $F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}' \times \mathcal{D}'$ como sendo a aplicação

$$(F \times G)(X,X') = (F(X), G(X')) \quad \text{e} \quad (F \times G)(f,f') = (F(f), G(f')),$$

em que $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são morfismos em $\mathcal{C}$ e $f' : X' \to Y'$ e $g' : Y' \to Z'$ são morfismos em $\mathcal{D}$.

Afirmamos que $F \times G$ é um funtor. De fato, observemos que

$$\begin{aligned}(F \times G)(id_{(X,X')}) &= (F \times G)(id_X, id_{X'}) \\ &= (F(id_X), G(id_{X'})) \\ &= (id_{F(X)}, id_{G(X')}) \\ &= id_{(F(X),G(X'))} \\ &= id_{(F\times G)(X,X')}\end{aligned}$$

ou seja, é válida a condição (a) da definição de funtor. Daí, como

$$\begin{aligned}(F \times G)((g,g') \circ (f,f')) &= (F \times G)(g \circ f, g' \circ f') \\ &= (F(g \circ f), G(g' \circ f')) \\ &= (F(g) \circ F(f), G(g') \circ G(f')) \\ &= (F(g), G(g')) \circ (F(f), G(f')) \\ &= (F \times G)(g,g') \circ (F \times G)(f,f'),\end{aligned}$$

vale a condição (b) e, portanto, $F \times G$ é um funtor.

Um resultado de fácil demonstração e que é bem utilizado nesse trabalho, diz que a composição de funtores é ainda um funtor.

Proposição 2.14. *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. Então $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ definido por*

$$(G \circ F)(X) = G(F(X)) \text{ e } (G \circ F)(f) = G(F(f)),$$

para qualquer objeto $X \in \mathcal{C}$ e qualquer morfismo $f \in \mathcal{C}$, é um funtor.

A seguir, definimos o importante conceito sobre *transformações naturais.*

Definição 2.15. Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\mu : F \to G$ é uma coleção de morfismos

$$\mu = \{\mu_X : F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$$

em $\mathcal{D}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo, para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, isto é, $\mu_Y \circ F(f) = G(f) \circ \mu_X$.

Se $\mu_X : F(X) \to G(X)$ é um isomorfismo, para todo objeto X em $\mathcal{C}$, diz-se que μ é um *isomorfismo natural*. Neste caso, dizemos que os funtores F e G são *equivalentes* e escrevemos $F{\sim}G$.

Exemplo 2.16. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. A *transformação natural identidade* $ID : F \to F$ é definida pela coleção de morfismos $ID = \{ID_X = id_{F(X)} : F(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$. Além disso, ID é um isomorfismo natural, visto que $ID_X = id_{F(X)}$ é um isomorfismo, para qualquer objeto X em $\mathcal{C}$.

Definição 2.17. Diz-se que as categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *equivalentes* se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G{\sim}Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F{\sim}Id_{\mathcal{C}}$.

Em particular, dizem-se *isomorfas* se existem funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tais que $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$ e $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ e notamos por $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$.

A seguir definimos os objetos zero, núcleo e conúcleo de morfismos. Objetos esses importantes para que possamos definir e estudarmos as chamadas categorias abelianas, como veremos na próxima seção. Em especial, conúcleos desempenham um papel importante nesse trabalho como veremos mais adiante.

Definição 2.18. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto Z em $\mathcal{C}$ é dito objeto zero se, para todo objeto X em $\mathcal{C}$ existem únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$ e $\varphi_X : Z \to X$, ou seja, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\varphi_X\}$.

Proposição 2.19. *O objeto zero, se existir, é único a menos de isomorfismo.*

Definição 2.20. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero Z. Para quaisquer objetos X e Y em $\mathcal{C}$ definimos o morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ como sendo o morfismo que comuta o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "0_Y^X"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & Y \\ & Z. \arrow[ur, "\varphi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 2.21. Nas categorias *Grp*, *Ab*, $\mathcal{M}_R$ e ${}_R\mathcal{M}$ o morfismo nulo é morfismo trivial.

Proposição 2.22. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria em que Z é um objeto zero, X, Y, L, W objetos quaisquer em $\mathcal{C}$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, L)$. Então $f \circ 0_Y^X = 0_L^X$ e $0_W^L \circ f = 0_W^Y$.*

Definição 2.23. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.

(i) Um núcleo para f é um par $(Ker(f), k)$, em que $Ker(f)$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $k : Ker(f) \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$. Além disso, dados K' um objeto em $\mathcal{C}$ e $k' : K' \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, então existe um único morfismo $\mu : K' \to Ker(f)$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y , \\ & K' \arrow[u, "k'"'] \arrow[ul, dashed, "\mu"] & \end{tikzcd}$$

ou seja, $k \circ \mu = k'$.

(ii) Um conúcleo para f é um par $(Coker(f), q)$, em que $Coker(f)$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $q : Y \to Coker(f)$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q \circ f = 0^X_{Coker(f)}$. Além disso, dados Q' um objeto em $\mathcal{C}$ e $q' : Y \to Q'$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q' \circ f = 0^X_{Q'}$, então existe um único morfismo $\gamma : Coker(f) \to Q'$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & Coker(f) , \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & Q' & \end{tikzcd}$$

ou seja, $\gamma \circ q = q'$.

Definição 2.24. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.

(i) Dizemos que um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : W \to X$ tais que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.

(ii) Dizemos que um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é um epimorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : Y \to W$ tais que $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.

Notemos que dizer que $f : X \to Y$ é um monomorfismo significa que podemos o cancelar à esquerda. Analogamente, dizer que $f : X \to Y$ é um epimorfismo significa que podemos o cancelar à direita.

Proposição 2.25. *Se $f : X \to Y$ é um morfismo $\mathcal{C}$, $k : Ker(f) \to X$ é um núcleo para f e $q : Y \to Coker(f)$ é um conúcleo para f, então k é um monomorfismo e q é um epimorfismo.*

Uma outra maneira de enxergarmos o núcleo e o conúcleo de um morfismo $f : X \to Y$ será como um subobjeto de X e um quociente de Y, respectivamente. Apresentamos as seguintes definições.

Definição 2.26. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dois monomorfismos $\iota_1 : X_1 \to X$ e $\iota_2 : X_2 \to X$ em $\mathcal{C}$ são ditos equivalentes se existe um isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ tal que o diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

isto é, $\iota_2 \circ u = \iota_1$.

Um *subobjeto de* X é uma classe de equivalência de monomorfismos para X, ou seja, o par (Y, ι) é dito um subobjeto de X se existe um monomorfismo $\iota : Y \to X$. Assim, dois subobjetos (Y_1, ι_1) e (Y_2, ι_2) de X são iguais se ι_1 e ι_2 são monomorfismos equivalentes.

Proposição 2.27 ([5], Proposição 1.3.14)**.** *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria com objeto zero e* $f : X \to Y$ *um morfismo em* $\mathcal{C}$*. O núcleo de* f*, se existir, é único, como subobjeto de* X*.*

Definição 2.28. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dois epimorfismos $q_1 : X \to X_1$ e $q_2 : X \to X_2$ em $\mathcal{C}$ são ditos equivalentes se existe um isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ tal que o diagrama comuta,

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, dashed, "u"] & & X_2 \\ & X, \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$

isto é, $u \circ q_1 = q_2$.

Um *quociente de* X é uma classe de equivalência de epimorfismos de X, ou seja, o par (Y, q) é dito um quociente de X se existe um epimorfismo $q : X \to Y$. Logo, dois quocientes (Y_1, q_1) e (Y_2, q_2) de X são iguais se q_1 e q_2 são epimorfismos equivalentes.

Proposição 2.29 ([5], Proposição 1.3.17)**.** *Sejam* $\mathcal{C}$ *uma categoria com objeto zero e* $f : X \to Y$ *um morfismo em* $\mathcal{C}$*. O conúcleo de* f*, se existir, é único, como quociente de* Y*.*

2.2 CATEGORIAS ABELIANAS

A existência de núcleos e de conúcleos para quaisquer morfismos não é garantida em qualquer categoria. Em nosso trabalho, é imprescindível a existência dos mesmos, principalmente, de conúcleos. Por isso, as categorias consideradas ao longo desse trabalho, quando nada for dito ao contrário, são categorias abelianas.

Definição 2.30. Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita pré-aditiva se possui objeto zero, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um grupo (aditivo) abeliano e a composição de morfismos é bilinear, isto é, para quaisquer $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ valem

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' \text{ e } (g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Dados uma categoria $\mathcal{C}$ e X, Y objetos em $\mathcal{C}$, uma *soma direta* de X e Y é uma quíntupla $(S, \pi_X, \pi_Y, \iota_X, \iota_Y)$, em que $S \in \mathcal{C}$, $\pi_X : S \to X, \pi_Y : S \to Y, \iota_X : X \to S, \iota_Y : Y \to S$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que

$$\pi_X \circ \iota_X = id_X,\ \pi_Y \circ \iota_Y = id_Y \text{ e } \iota_X \circ \pi_X + \iota_X \circ \pi_X = id_S.$$

A soma direta de dois objetos (se existir) é única, a menos de isomorfismo. Os morfismos π_X e π_Y(projeções) são epimorfismos e os morfismos ι_1 e ι_2 (inclusões) são monomorfismos.

Definição 2.31. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se aditivo se, para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$, vale $F(f + g) = F(f) + F(g)$, para quaisquer $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definição 2.32. Uma categoria pré-aditiva $\mathcal{C}$ diz-se aditiva se todo par de objetos em $\mathcal{C}$ possui soma direta.

Definição 2.33. Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se abeliana se

(i) $\mathcal{C}$ é aditiva;

(ii) todo morfismo em $\mathcal{C}$ possui núcleo e conúcleo;

(iii) todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.

As categorias Ab, $\mathcal{M}_R$ e ${}_R\mathcal{M}$ são exemplos de categorias abelianas. Além disso, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias abelianas, então a categoria produto $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é abeliana também.

A próxima definição, *coequalizador*, desempenha um papel importante nesse trabalho, especificamente no Capítulo 3, onde vamos apresentar a monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$ que irá induzir uma estrutura monoidal em ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$, uma das contribuições desse trabalho. O objeto A é uma álgebra definida numa categoria monoidal, assunto discutido mais adiante. Em se tratando de categorias abelianas, a existência de coequalizadores é garantida, pois como veremos na proposição a seguir, o coequalizador de um par qualquer de morfismos (f, g) é , de fato, o conúcleo de $f - g$ que sempre existe em categorias abelianas.

Definição 2.34. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e $f, g : X \to Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}$. Um coequalizador para o par (f, g) é um par (Z, c), em que $c : Y \to Z$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que

(i) $c \circ f = c \circ g$;

(ii) Se $h : Y \to W$ é um morfismo tal que $h \circ f = h \circ g$, então existe um único morfismo $u : Z \to W$ tal que $u \circ c = h$. O diagrama abaixo reflete essa situação

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h"'] & Z \arrow[d, dashed, "u"] \\ & & W. \end{tikzcd}$$

Para simplificar a notação, escreveremos em alguns momentos apenas o morfismo $c : Y \to Z$ para denotar o coequalizador (Z, c). Entende-se, neste caso, que o par é constituído pelo contradomínio do morfismo c e pelo próprio morfismo.

Proposição 2.35. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, $f, g : X \to Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}$ e $c : Y \to Z$ o coequalizador de (f, g). Então (Z, c) é o conúcleo do morfismo $f - g : X \to Y$.*

Demonstração: Temos que $c \circ (f - g) = c \circ f - c \circ g = 0_Z^X - 0_Z^X = 0_Z^X$ e suponhamos $h : Y \to W$ um morfismo tal que $h \circ (f - g) = 0_W^X$, mas isso nos diz que $h \circ f = h \circ g$. Pela hipótese de (Z, c) ser um coequalizador para o par (f, g), existe um único morfismo $u : Z \to W$ tal que $u \circ c = h$. Logo, (Z, c) é um conúcleo para o morfismo $f - g$. ■

Colorário 2.36. *Em uma categoria abeliana, todo coequalizador é um epimorfismo.*

Demonstração: Segue da proposição acima e da Proposição 2.25. ■

Agora enunciamos, alguns resultados e definições envolvendo sequências exatas em uma categoria abeliana e ao final dessa seção, (re)lembramos a definição da exatidão à direita de um funtor, importante e crucial para se garantir a monoidalidade da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$.

Definição 2.37. Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. A imagem de f, denotada por $Im(f)$, é dada por

$$Im(f) := Ker(coKer(f)).$$

Da definição acima, $Im(f)$ é um subobjeto de Y.

Definição 2.38. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$. A sequência

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

é uma sequência exata em Y se $Im(f) = Ker(g)$, como subobjetos de Y.

Generalizando a definição anterior, uma sequência

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$$

é dita *exata* se é exata em X_i, para todo $i \in \{2, 3, \cdots, n-1, n\}$.

Finalmente, apresentamos definições para que um funtor seja exato à direita, segundo [17] e [7]. Porém, em ([13], p. 24) é mostrado a equivalência entre ambas definições.

Definição 2.39 ([17], **Definición 2.7.36**). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias abelianas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se exato à direita se, para todo morfismo $f : X \to Y$, $Coker(F(f)) = F(Coker(f))$.

Definição 2.40 ([7], **Definition 1.6.1**). Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias abelianas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se exato à direita se para toda sequência exata curta

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

em $\mathcal{C}$, a sequência

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{D}$.

2.3 CATEGORIAS MONOIDAIS

Com a ideia que introduzimos esse capítulo, podemos pensar as categorias monoidais como uma categorificação de um monoide M, que é um conjunto não vazio com uma operação $\cdot$ associativa e um elemento unidade 1 tal que $1 \cdot m = m = m \cdot 1$, para todo $m \in M$. O dicionário traz, por exemplo, a correspondência do isomorfismo natural a com a operação associativa $\cdot$ e o objeto $\mathbf{1}$ e os isomorfismos naturais l e r com o elemento 1 e as duas respectivas igualdades acima. Mais especificamente, essas categorias desempenham um papel crucial para o que estudamos nesse trabalho, uma vez que álgebras e módulos são definidos nessas categorias e ao exigirmos a comutatividade das álgebras, vamos lançar mão das categorias monoidais trançadas.

Definição 2.41 ([7]). Uma categoria monoidal é uma sêxtupla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ onde $\mathcal{C}$ é uma categoria, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um bifuntor (funtor definido numa categoria produto) chamado *funtor produto tensorial*, $\mathbf{1}$ é um objeto em $\mathcal{C}$ chamado *unidade*. A tripla a, r, l são isomorfismos naturais tais que:

$$a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$$

$$l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}}$$

$$r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}},$$

em que, para quaisquer X, Y, Z em $\mathcal{C}$, temos $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, $l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X$ e $r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$ são isomorfismos em $\mathcal{C}$. Além disso, para quaisquer X, Y, Z, W em $\mathcal{C}$,

$$a_{X,Y,Z\otimes W} \circ a_{X\otimes Y,Z,W} = (id_X \otimes a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \tag{2.1}$$

e

$$(id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y} = r_X \otimes id_Y, \tag{2.2}$$

ou seja, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z}\otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X\otimes a_{Y,Z,W}"] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X\otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd}$$

comutam.

Na definição acima, a comutatividade do primeiro diagrama chama-se *axioma do pentágono* e do segundo chama-se *axioma do triângulo*. O isomorfismo natural a chama-se *associatividade* da categoria monoidal $\mathcal{C}$.

Notemos que para o isomorfismo natural $a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$, os funtores envolvidos são

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes\times Id_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, bend left, "\otimes\circ(\otimes\times Id_{\mathcal{C}})"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "Id_{\mathcal{C}}\times\otimes"] \arrow[rr, bend left, "\otimes\circ(Id_{\mathcal{C}}\times\otimes)"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

e para os isomorfismos naturais $l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}}$ e $r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}}$, temos que

$$\mathbf{1} \otimes -, - \otimes \mathbf{1}, Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Descrevemos aqui como tais funtores "aplicam-se" aos morfismos. Sejam $f : X \to Y, g : W \to Z$ e $h : L \to K$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então

$$(\otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}))(f, g, h) = (f \otimes g) \otimes h \text{ e } \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)(f, g, h) = f \otimes (g \otimes h),$$

$$(\mathbf{1}\otimes -)(f) = id_{\mathbf{1}} \otimes f \text{ e } (-\otimes \mathbf{1})(f) = f \otimes id_{\mathbf{1}}.$$

A seguir, descrevemos como o funtor $\otimes$ aplica-se numa composição e à identidade. Os resultados produzidos por esse cálculo são muito utilizados não somente neste capítulo como também no próximo. Iremos usá-los sem fazer qualquer menção. Para $f : X \to Y, f' : Y \to W, g : X' \to Y'$ e $g' : Y' \to W'$ morfismos em $\mathcal{C}$, temos que

$$\otimes((f', g') \circ (f, g)) = \otimes(f' \circ f, g' \circ g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

Por outro lado, por ser $\otimes$ um funtor, segue que

$$\otimes((f', g') \circ (f, g)) = \otimes(f', g') \circ \otimes(f, g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Logo,

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Também,

$$\otimes(id_X, id_Y) = \otimes(id_{(X,Y)}) = id_{\otimes(X,Y)} = id_{X\otimes Y}$$

e, por definição, $\otimes(id_X, id_Y) = id_X \otimes id_Y$. Portanto,

$$id_{X\otimes Y} = id_X \otimes id_Y.$$

Nesse trabalho, muitas vezes vamos considerar $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal estrita, isso ocorrerá para facilitar alguns cálculos que faremos em capítulos posteriores. Inclusive como já dissemos, no capítulo Apêndice, apresentamos um cálculo para o qual o leitor poderá observar a diferença de não admitirmos uma categoria estrita, essencialmente o que alonga os cálculos são as várias vezes que usamos o axioma do pentágono.

Definição 2.42. Uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ diz-se *estrita* se, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$,

$$(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z),\ \mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$$

e os morfismos $a_{X,Y,Z}$, l_X e r_X são morfismos identidade.

Observação 2.43. Se $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal estrita, então $id_{\mathbf{1}} \otimes f = f = f \otimes id_{\mathbf{1}}$, para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$. De fato, seja $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. Como $l_W = id_W = id_{\mathbf{1}\otimes W}$, para qualquer W em $\mathcal{C}$ e l é uma transformação natural, vale a igualdade

$$f = f \circ id_X = id_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes f) = id_{\mathbf{1}\otimes Y} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes f) = id_{\mathbf{1}} \otimes f.$$

Analogamente, usando a transformação natural r, mostramos que $f = f \otimes id_{\mathbf{1}}$.

A partir de agora, apresentamos alguns exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 2.44. Seja R um anel com unidade. A categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ é monoidal. Consideremos $\otimes_R : {}_R\mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M}_R \to {}_R\mathcal{M}_R$ como sendo o produto tensorial sobre R, $\mathbf{1} = R$. Para facilitar a escrita escrevemos $\otimes_R = \otimes$. Sejam R-bimódulos M, N e P. Então

$$\begin{array}{rccc} a_{M,N,P}\colon & (M \otimes N) \otimes P & \to & M \otimes (N \otimes P) \\ & (m \otimes n) \otimes p & \mapsto & m \otimes (n \otimes p), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcclcrccl} l_M : & R \otimes M & \to & M & \text{e} & r_M : & M \otimes R & \to & M \\ & r \otimes m & \mapsto & rm & & & m \otimes r & \mapsto & mr. \end{array}$$

Com esta estrutura definida, afirmamos que $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R, a, l, r)$ é uma categoria monoidal.

O fato de que $\otimes_R$ é funtor e de que a, l e r são isomorfismos naturais são conhecidos e podem ser consultados em ([11], Chapter V). Abaixo mostramos apenas as respectivas naturalidades.

Sejam $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ e $h : P \to P'$ morfismos de R-bimódulos. Precisamos verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd} (M \otimes N) \otimes P \arrow[r, "a_{M,N,P}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes h"'] & M \otimes (N \otimes P) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes h)"] \\ (M' \otimes N') \otimes P' \arrow[r, "a_{M',N',P'}"'] & M' \otimes (N' \otimes P') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R \otimes M \arrow[r, "l_M"] \arrow[d, "id_R\otimes f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ R \otimes M' \arrow[r, "l_{M'}"'] & M' \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} M \otimes R \arrow[r, "r_M"] \arrow[d, "f\otimes id_R"'] & M \arrow[d, "f"] \\ M' \otimes R \arrow[r, "r_{M'}"'] & M' \end{tikzcd}$$

comutam. Sejam M, N e P R-bimódulos, $m \in M, n \in N$, $p \in P$ e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned} &((f \otimes (g \otimes h)) \circ a_{M,N,P})((m \otimes n) \otimes p) = (f \otimes (g \otimes h))(a_{M,N,P}((m \otimes n) \otimes p)) \\ &= (f \otimes (g \otimes h))(m \otimes (n \otimes p)) \\ &= f(m) \otimes ((g \otimes h)(n \otimes p)) \\ &= f(m) \otimes (g(n) \otimes h(p)) \\ &= a_{M',N',P'}((f(m) \otimes g(n)) \otimes h(p)) \\ &= a_{M',N',P'}(((f \otimes g) \otimes h)((m \otimes n) \otimes p)) \\ &= (a_{M',N',P'} \circ ((f \otimes g) \otimes h))((m \otimes n) \otimes p), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ l_M)(r \otimes m) &= f(l_M(r \otimes m)) = f(rm) = rf(m) = l_{M'}(r \otimes f(m)) \\ &= l_{M'}((id_R \otimes f)(r \otimes m)) = (l_{M'} \circ (id_R \otimes f))(r \otimes m) \end{aligned}$$

e analogamente, $f \circ r_M = r_{M'} \circ (f \otimes id_R)$ Logo, os três diagramas comutam e portanto, a, l e r são isomorfismos naturais.

Resta-nos garantir a comutatividade do pentágono e do triângulo. De fato, sejam $m \in M, n \in N, p \in P$ e $q \in Q$, em que M, N, P e Q são R-bimódulos e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
(a_{M,N,P\otimes Q} \circ a_{M\otimes N,P,Q})(((m \otimes n) \otimes p) \otimes q) = \\
&= a_{M,N,P\otimes Q}(a_{M\otimes N,P,Q}(((m \otimes n) \otimes p) \otimes q)) \\
&= a_{M,N,P\otimes Q}((m \otimes n) \otimes (p \otimes q)) \\
&= m \otimes (n \otimes (p \otimes q)) \\
&= (id_M \otimes a_{N,P,Q})(m \otimes ((n \otimes p) \otimes q)) \\
&= (id_M \otimes a_{N,P,Q})(a_{M,N\otimes P,Q}((m \otimes (n \otimes p)) \otimes q)) \\
&= (id_M \otimes a_{N,P,Q})(a_{M,N\otimes P,Q}((a_{M,N,P} \otimes id_Q)(((m \otimes n) \otimes p) \otimes q))) \\
&= ((id_M \otimes a_{N,P,Q}) \circ a_{M,N\otimes P,Q} \circ (a_{M,N,P} \otimes id_Q))(((m \otimes n) \otimes p) \otimes q)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(r_M \otimes id_N)((m \otimes r) \otimes n) &= mr \otimes n \\
&= m \otimes rn \\
&= (id_M \otimes l_N)(m \otimes (r \otimes n)) \\
&= (id_M \otimes l_N)(a_{M,R,N}((m \otimes r) \otimes n)) \\
&= ((id_M \otimes l_N) \circ a_{M,R,N})((m \otimes r) \otimes n).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.45. Com base no exemplo anterior, fazendo $R = \mathbf{k}$ ($\mathbf{k}$ corpo), concluímos que

$$(Vect_{\mathbf{k}}, \otimes_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, a, l, r) \quad \text{e} \quad (vect_{\mathbf{k}}, \otimes_{\mathbf{k}}, \mathbf{k}, a, l, r)$$

são categorias monoidais.

Os resultados apresentados na próxima proposição são usados nos capítulos 3 e 4, sem que façamos qualquer menção aos mesmos.

Proposição 2.46. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então são válidas as afirmações abaixo.*

(i) *Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W, Z)$. Então*

$$f \otimes g = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_W) \quad e \quad f \otimes g = (f \otimes id_Z) \circ (id_X \otimes g).$$

(ii) *Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W, Z)$. Se f e g são isomorfismos então $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.*

A proposição seguinte também apresenta resultados bem úteis em se tratando de categorias monoidais.

Proposição 2.47. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então são válidas as afirmações abaixo.*

(i) $l_{\mathbf{1}\otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X$ *e* $r_{X\otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}}$.

(ii) *Os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1}\otimes X)\otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X\otimes id_Y"'] & & \mathbf{1}\otimes(X\otimes Y) \arrow[dl, "l_{X\otimes Y}"] \\
& X\otimes Y &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_{X\otimes Y}"'] & & X\otimes(Y\otimes \mathbf{1}) \arrow[dl, "id_X\otimes r_Y"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

comutam.

(iii) $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$.

Uma vez que tenhamos categorias monoidais, é natural que sejam definidos *funtores monoidais* assim como categorias monoidais equivalentes ou, em particular, isomorfas. Vamos usar essas definições no próximo capítulo.

Definição 2.48. Um funtor monoidal entre duas categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é uma tripla (F, ξ, ϕ), em que

(i) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um funtor;

(ii) $\xi : \otimes\circ(F\times F) \to F\circ\otimes$ é um isomorfismo natural entre os funtores $\otimes\circ(F\times F), F\circ\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, isto é, $\xi = \{\xi_{X,Y} : F(X)\otimes F(Y) \to F(X\otimes Y) : (X, Y) \in \mathcal{C}\times\mathcal{C}\}$ é uma família de isomorfismos em $\mathcal{C}$;

(ii) $\phi : \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \to F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}})$ é um isomorfismo.

Além disso, são satisfeitas as igualdades

$$\xi_{X,Y\otimes Z} \circ (id_{F(X)} \otimes \xi_{Y,Z}) \circ a_{F(X),F(Y),F(Z)} = F(a_{X,Y,Z}) \circ \xi_{X\otimes Y,Z} \circ (\xi_{X,Y} \otimes id_{F(Z)});$$

$$l_{F(X)} = F(l_X) \circ \xi_{\mathbf{1},X} \circ (\phi \otimes id_{F(X)}) \text{ e } r_{F(X)} = F(r_X) \circ \xi_{X,\mathbf{1}} \circ (id_{F(X)} \otimes \phi).$$

Um funtor monoidal (F, ξ, ϕ) diz-se *estrito* se $F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$, $F(X)\otimes F(Y) = F(X\otimes Y)$, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, os isomorfismos $\xi_{X,Y}$ e ϕ são morfismos identidade, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$.

Agora, sejam (F, ξ, ϕ) e (F', ξ', ϕ') funtores monoidais entre as categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Uma *transformação natural monoidal*

$$\theta : (F, \xi, \phi) \to (F', \xi', \phi')$$

é uma transformação natural $\theta : F \to F'$ tal que, para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, são satisfeitos

$$\theta_{\mathbf{1}} \circ \phi = \phi' \text{ e } \theta_{X\otimes Y} \circ \xi_{X,Y} = \xi'_{X,Y} \circ (\theta_X \otimes \theta_Y).$$

Se θ é uma transformação natural monoidal e θ_X é isomorfismo, para todo objeto $X \in \mathcal{C}$, então θ é chamado *isomorfismo natural monoidal*.

Definição 2.49. Uma *equivalência monoidal* entre as categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é um funtor monoidal $(F, \xi, \phi) : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que existe um outro funtor monoidal $(F', \xi', \phi') : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais monoidais $\theta_1 : F \circ F' \to Id_{\mathcal{D}}$ e $\theta_2 : F' \circ F \to Id_{\mathcal{C}}$.

Um *isomorfismo monoidal* entre as categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ ocorre quando $F \circ F' = Id_{\mathcal{D}}$ e $\theta_1 = ID_{Id_{\mathcal{D}}}$ e $F' \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ e $\theta_2 = ID_{Id_{\mathcal{C}}}$. Nesse caso, as categorias dizem-se *monoidalmente isomorfas*.

A partir de agora, focalizamos as categorias monoidais trançadas. Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Consideremos o funtor *twist* $\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, em que $\tau(X, Y) = (Y, X)$ e $\tau(f, g) = (g, f)$, para quaisquer objetos X, Y em $\mathcal{C}$ e quaisquer morfismos f, g em $\mathcal{C}$.

Definição 2.50. Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. Uma trança para $\mathcal{C}$ é um isomorfismo natural $\sigma : \otimes \to \otimes \circ \tau$, em que os funtores $\otimes, \otimes \circ \tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$,

$$\sigma := \{\sigma_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X\}_{(X,Y)\in\mathcal{C}\times\mathcal{C}}$$

tais que os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\sigma_{X,Y}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & Y \otimes X \arrow[d, "g\otimes f"] \\
Z \otimes W \arrow[r, "\sigma_{Z,W}"'] & W \otimes Z
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dl, "\sigma_{X\otimes Y,Z}"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "id_X\otimes\sigma_{Y,Z}"] & \\
Z \otimes (X \otimes Y) & & & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[dl, "a^{-1}_{X,Z,Y}"] \\
 & (Z \otimes X) \otimes Y \arrow[ul, "a_{Z,X,Y}"] & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[l, "\sigma_{X,Z}\otimes id_Y"] &
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$a^{-1}_{Z,X,Y} \circ \sigma_{X\otimes Y,Z} \circ a^{-1}_{X,Y,Z} = (\sigma_{X,Z} \otimes id_Y) \circ a^{-1}_{X,Z,Y} \circ (id_X \otimes \sigma_{Y,Z}) \tag{2.3}$$

e

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dl, "\sigma_{X,Y} \otimes id_Z"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[dr, "\sigma_{X,Y \otimes Z}"] & \\
(Y \otimes X) \otimes Z \arrow[dr, "a_{Y,X,Z}"'] & & & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dl, "a_{Y,Z,X}"] \\
 & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[r, "id_Y \otimes \sigma_{X,Z}"'] & Y \otimes (Z \otimes X) &
\end{tikzcd}$$

isto é,

$$a_{Y,Z,X} \circ \sigma_{X,Y \otimes Z} \circ a_{X,Y,Z} = (id_Y \otimes \sigma_{X,Z}) \circ a_{Y,X,Z} \circ (\sigma_{X,Y} \otimes id_Z), \tag{2.4}$$

para quaisquer $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ e quaisquer morfismos $f : X \to Z$ e $g : Y \to W$ em $\mathcal{C}$. O primeiro diagrama reflete o fato de σ ser uma transformação natural e os dois últimos refletem as igualdades necessárias para que tenhamos uma trança. As equações (2.3) e (2.4) são chamadas *equações da trança.*

Definição 2.51. Uma categoria monoidal $(\mathcal{C}, \sigma)$ diz-se trançada se σ é uma trança para $\mathcal{C}$.

No caso de $\mathcal{C}$ ser monoidal estrita, as equações (2.3) e (2.4) tornam-se

$$\sigma_{X \otimes Y, Z} = (\sigma_{X,Z} \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes \sigma_{Y,Z}) \tag{2.5}$$

e

$$\sigma_{X, Y \otimes Z} = (id_Y \otimes \sigma_{X,Z}) \circ (\sigma_{X,Y} \otimes id_Z), \tag{2.6}$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{C}$.

Por exemplo, $Vect_{\mathbf{k}}$ e $vect_{\mathbf{k}}$ são categorias (monoidais) trançadas. Finalizamos essa seção, apresentando resultados que nos interessam para o caso de categorias monoidais estritas trançadas.

Proposição 2.52. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal trançada. Então, para qualquer X em $\mathcal{C}$, os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[rr, "\sigma_{\mathbf{1},X}"] \arrow[dr, "l_X"'] & & X \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "r_X"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "\sigma_{X,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_X"'] & & \mathbf{1} \otimes X \arrow[dl, "l_X"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Colorário 2.53. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal estrita trançada. Então*

$$\sigma_{\mathbf{1},X} = id_X = \sigma_{X,\mathbf{1}}.$$

Demonstração: De fato, por ser monoidal estrita, segue que $X \otimes \mathbf{1} = X = \mathbf{1} \otimes X$ e $r_X = id_X = l_X$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Pela Proposição acima, temos que $r_X \circ \sigma_{\mathbf{1},X} = l_X$. Logo, $id_X \circ \sigma_{\mathbf{1},X} = id_X$ e trivialmente, $\sigma_{\mathbf{1},X} = id_X$ e analogamente, $\sigma_{X,\mathbf{1}} = id_X$. ∎

2.4 O CENTRO DE DRINFEL'D

O centro de Drinfel'd de uma categoria monoidal desempenha um papel importante nesse trabalho, pois em sendo uma categoria trançada, as álgebras base definidas no Capítulo 4, por exemplo, são exatamente as álgebras comutativas nessa categoria trançada. O caso particular em que H é uma álgebra de Hopf finito dimensional sobre $\mathbf{k}$ (corpo), as álgebras base na categoria de H-módulos à esquerda, isto é, em ${}_H\mathcal{M}$ ou Rep(H), são as álgebras comutativas na categoria trançada ${}_H^H\mathcal{YD}$, que é a categoria cujos objetos são H-módulos à esquerda e H-comódulos à esquerda, isto porque o centro de ${}_H\mathcal{M}$, isto é, $\mathcal{Z}({}_H\mathcal{M})$, é isomorfo à categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$. Voltaremos a detalhar mais sobre isso no Capítulo 4, quando efetivamente estudaremos álgebras base. Na próxima seção, vamos discutir sobre álgebras, coálgebras, módulos e comódulos numa categoria monoidal e, em particular, recordar sobre $\mathbf{k}$-biálgebras e $\mathbf{k}$-álgebras de Hopf na categoria de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais. Referências recomendadas para o estudo do centro de Drinfel'd são [7], [12], [14], [17] e [25].

Definição 2.54. Seja $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal. O centro de Drinfeld à esquerda de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ é uma categoria $\mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$ tal que

1. os objetos são pares $(Z, \sigma_{Z,-})$, em que Z é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\sigma_{Z,-}$ é um isomorfismo natural, $\sigma_{Z,-} : Z \otimes - \to - \otimes Z$, ambos funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ tal que, para cada $X \in \mathcal{C}$, temos um isomorfimo em $\mathcal{C}$

$$\sigma_{Z,X} : Z \otimes X \to X \otimes Z$$

que satisfaz a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[r, "a_{X,Z,Y}"] & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[dr, "id_X \otimes \sigma_{Z,Y}"] & \\
(Z \otimes X) \otimes Y \arrow[ur, "\sigma_{Z,X} \otimes id_Y"] \arrow[dr, "a_{Z,X,Y}"'] & & & X \otimes (Y \otimes Z) \\
 & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[r, "\sigma_{Z,X \otimes Y}"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$, isto é,

$$a_{X,Y,Z} \circ \sigma_{Z,X \otimes Y} \circ a_{Z,X,Y} = (id_X \otimes \sigma_{Z,Y}) \circ a_{X,Z,Y} \circ (\sigma_{Z,X} \otimes id_Y), \qquad (2.7)$$

2. os morfismos $f : (Z, \sigma_{Z,-}) \to (Z', \sigma_{Z',-})$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tal que para cada $X \in \mathcal{C}$, vale a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \otimes X \arrow[r, "\sigma_{Z,X}"] \arrow[d, "f \otimes id_X"'] & X \otimes Z \arrow[d, "id_X \otimes f"] \\ Z' \otimes X \arrow[r, "\sigma_{Z',X}"'] & X \otimes Z', \end{tikzcd}$$

isto é, $(id_X \otimes f) \circ \sigma_{Z,X} = \sigma_{Z',X} \circ (f \otimes id_X)$.

A categoria $\mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$ torna-se monoidal com o funtor produto tensorial definido como segue. Sejam $(Z, \sigma_{Z,-})$ e $(Z', \sigma_{Z',-})$ objetos de $\mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$, então $(Z, \sigma_{Z,-}) \otimes (Z', \sigma_{Z',-}) = (Z \otimes Z', \sigma_{Z \otimes Z',-})$, para todo $X \in \mathcal{C}$ e

$$\sigma_{Z \otimes Z',X} : (Z \otimes Z') \otimes X \to X \otimes (Z \otimes Z')$$

é definida pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} & (Z \otimes Z') \otimes X \arrow[r, "\sigma_{Z \otimes Z',X}"] \arrow[dl, "a_{Z,Z',X}"'] & X \otimes (Z \otimes Z') & \\ Z \otimes (Z' \otimes X) \arrow[dr, "id_Z \otimes \sigma_{Z',X}"'] & & & (X \otimes Z) \otimes Z' \arrow[ul, "a_{X,Z,Z'}"'] \\ & Z \otimes (X \otimes Z') \arrow[r, "a^{-1}_{Z,X,Z'}"'] & (Z \otimes X) \otimes Z' \arrow[ur, "\sigma_{Z,X} \otimes id_{Z'}"'] & \end{tikzcd}$$

isto é,

$$\sigma_{Z \otimes Z',X} = a_{X,Z,Z'} \circ (\sigma_{Z,X} \otimes id_{Z'}) \circ a^{-1}_{Z,X,Z'} \circ (id_Z \otimes \sigma_{Z',X}) \circ a_{Z,Z',X}. \tag{2.8}$$

O objeto unidade é $(\mathbf{1}, \sigma_{\mathbf{1},-})$, onde

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_{\mathbf{1},X}"'] & X \arrow[r, "r_X^{-1}"] & X \otimes \mathbf{1}, \end{tikzcd}$$

ou seja, $\sigma_{\mathbf{1},X} = r_X^{-1} \circ l_X$.

A categoria $\mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$ é trançada e a trança é dada por

$$\widehat{\sigma}_{(Z,\sigma_{Z,-}),(Z',\sigma_{Z',-})} = \sigma_{Z,Z'} : Z \otimes Z' \to Z' \otimes Z,$$

para quaisquer $(Z, \sigma_{Z,-}), (Z', \sigma_{Z',-}) \in \mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$.

Aqui, ressaltamos que quando $\mathcal{C}$ é monoidal estrita, as igualdades (2.7) e (2.8) tornam-se, respectivamente,

$$\sigma_{Z,X \otimes Y} = (id_X \otimes \sigma_{Z,Y}) \circ (\sigma_{Z,X} \otimes id_Y), \tag{2.9}$$

para qualquer $(Z, \sigma_{Z,-}) \in \mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$, quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ e

$$\sigma_{Z\otimes Z',X} = (\sigma_{Z,X} \otimes id_{Z'}) \circ (id_Z \otimes \sigma_{Z',X}), \tag{2.10}$$

para quaisquer $(Z, \sigma_{Z,-}), (Z', \sigma_{Z',-}) \in \mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$ e $X \in \mathcal{C}$.

De modo análogo, é definido $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$, o centro de Drinfel'd à direita. Os objetos são pares $(Z, c_{-,Z})$, em que Z é um objeto em $\mathcal{C}$ e c é um isomorfismo natural $c_{-,Z} : -\otimes Z \to Z \otimes -$ tal que (admitindo $\mathcal{C}$ monoidal estrita)

$$c_{X\otimes Y,Z} = (c_{X,Z} \otimes id_Y) \circ (id_X \otimes c_{Y,Z}),$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$. A estrutura monoidal de $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$

$$(Z, c_{-,Z}) \otimes (Z', c_{-,Z'}) = (Z \otimes Z', c_{-,Z\otimes Z'})$$

é dada por

$$c_{X,Z\otimes Z'} = (id_Z \otimes c_{X,Z'}) \circ (c_{X,Z} \otimes id_{Z'}),$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. Finalmente, $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ é (monoidal) trançada isomorfa à $\mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$, cuja trança $\widehat{c}_{(Z,c_{-,Z}),(Z',c_{-,Z'})} = c_{Z,Z'} = \sigma^{-1}_{Z',Z}$, para quaisquer $(Z, c_{-,Z}), (Z', c_{-,Z'}) \in \mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$.

Os centros $\mathcal{Z}_l(\mathcal{C})$ e $\mathcal{Z}_r(\mathcal{C})$ são isomorfos como categrias trançadas, veja [14]. Devido a esse isomorfismo, o centro de Drinfel'd (à direita, à esquerda) é simplesmente chamado *centro de uma categoria monoidal* e denotamos por $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Trabalhamos com o centro de Drinfel'd à esquerda, seguindo os autores [4], [12] e [14].

2.5 ÁLGEBRAS E MÓDULOS EM CATEGORIAS MONOIDAIS

Nosso objetivo nessa seção é definir (co)álgebras e (co)módulos em categorias monoidais. Objetos esses importantes para que considerando A e B álgebras em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, possamos estudar sobre as categorias de A-módulos (à direita, à esquerda), $A \otimes A$-módulos à esquerda, $A \otimes B$-módulos à esquerda, A-bimódulos e (A, B)-bimódulos nos dois capítulos posteriores. No final da seção, estudamos estes conceitos na categoria $Vect_{\mathbf{k}}$, em particular $\mathbf{k}$-biálgebras e $\mathbf{k}$-álgebras de Hopf, que nos interessa para o desenvolvimento do Capítulo 4. Sugerimos as referências [7], [17], [23]

Definição 2.55. Uma álgebra em $\mathcal{C}$ é uma tripla (A, m, u), em que A é um objeto em $\mathcal{C}$, $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbf{1} \to A$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "m\otimes id_A"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id_A\otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1}\otimes A \arrow[rr, "u\otimes id_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A\otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "id_A\otimes u"] \arrow[dr, "r_A"'] & & A\otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A, & \end{tikzcd}$$

isto é,

$$m\circ(id_A\otimes m)\circ a_{A,A,A} = m\circ(m\otimes id_A),\ m\circ(u\otimes id_A) = l_A \text{ e } m\circ(id_A\otimes u) = r_A$$

ou, se $\mathcal{C}$ é estrita

$$m\circ(id_A\otimes m) = m\circ(m\otimes id_A),\ m\circ(u\otimes id_A) = id_A \text{ e } m\circ(id_A\otimes u) = id_A. \tag{2.11}$$

Os morfismos m e u são chamados, respectivamente, *multiplicação* e *unidade* de A.

Definição 2.56. Sejam (A, m_A, u_A), (B, m_B, u_B) álgebras em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ diz-se de álgebras se os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B\otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \mathbf{1}, \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

isto é,

$$m_B\circ(f\otimes f) = f\circ m_A \quad \text{e} \quad u_B = f\circ u_A. \tag{2.12}$$

Um exemplo imediato de uma álgebra em $\mathcal{C}$ é a tripla $(\mathbf{1}, l_{\mathbf{1}}, id_{\mathbf{1}})$, aqui $m_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}}$ e $u_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$. Sabemos da Proposição 2.47 que $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$ em qualquer categoria monoidal.

No que segue, (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$.

Definição 2.57. Um módulo à esquerda sobre a álgebra A (ou um A-módulo à esquerda) em $\mathcal{C}$ é um par (M, λ), em que M é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\lambda : A\otimes M \to M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} (A\otimes A)\otimes M \arrow[r, "a_{A,A,M}"] \arrow[d, "m\otimes id_M"'] & A\otimes(A\otimes M) \arrow[r, "id_A\otimes\lambda"] & A\otimes M \arrow[d, "\lambda"] \\ A\otimes M \arrow[rr, "\lambda"'] & & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{1}\otimes M \arrow[rr, "u\otimes id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & A\otimes M \arrow[dl, "\lambda"] \\ & M, & \end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\lambda\circ(id_A\otimes\lambda)a_{A,A,M} = \lambda\circ(m\otimes id_M) \text{ e } \lambda\circ(u\otimes id_M) = l_M \tag{2.13}$$

ou, se $\mathcal{C}$ é estrita

$$\lambda \circ (id_A \otimes \lambda) = \lambda \circ (m \otimes id_M) \text{ e } \lambda \circ (u \otimes id_M) = id_M. \tag{2.14}$$

Definição 2.58. Sejam $(M, \lambda_M), (N, \lambda_N)$ dois A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : M \to N$ em $\mathcal{C}$ diz-se de A-módulos à esquerda se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \otimes M \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\lambda_N"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N, \end{tikzcd}$$

ou seja,

$$f \circ \lambda_M = \lambda_N \circ (id_A \otimes f). \tag{2.15}$$

De maneira análoga são definidos A-módulos à direita e morfismos entre os mesmos. O par (M, ρ) em que $\rho : M \otimes A \to M$ é um A-módulo à direita se são satisfeitas as igualdades

$$\rho \circ (\rho \otimes id_A) = \rho \circ (id_M \otimes m) \circ a_{M,A,A} \text{ e } \rho \circ (id_M \otimes u) = r_M \tag{2.16}$$

ou, se $\mathcal{C}$ é estrita

$$\rho \circ (\rho \otimes id_A) = \rho \circ (id_M \otimes m) \text{ e } \rho \circ (id_M \otimes u) = id_M, \tag{2.17}$$

Sejam $(M, \rho_M), (N, \rho_N)$ dois A-módulos à direita em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : M \to N$ em $\mathcal{C}$ diz-se de A-módulos à direita se é satisfeita a igualdade

$$f \circ \rho_M = \rho_N \circ (f \otimes id_A). \tag{2.18}$$

Uma vez definidos módulos à direita e à esquerda e seus respectivos morfismos em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, denotamos por ${}_A\mathcal{C}$ a categoria dos *A-módulos à esquerda* e por $\mathcal{C}_A$ a categoria dos *A-módulos à direita*. A fim de definirmos a categoria dos (A, B)-bimódulos, denotada por ${}_A\mathcal{C}_B$, procedemos à seguinte definição.

Definição 2.59. Sejam A, B álgebras em $\mathcal{C}$. Um (A, B)-bimódulo em $\mathcal{C}$ é uma terna (M, ρ, λ), em que (M, ρ) é um B-módulo à direita em $\mathcal{C}$, (M, λ) é um A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd} (A \otimes M) \otimes B \arrow[r, "a_{A,M,B}"] \arrow[d, "\lambda \otimes id_B"'] & A \otimes (M \otimes B) \arrow[r, "id_A \otimes \rho"] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda"] \\ M \otimes B \arrow[rr, "\rho"'] & & M \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja,

$$\lambda \circ (id_A \otimes \rho) \circ a_{A,M,B} = \rho \circ (\lambda \otimes id_B) \tag{2.19}$$

ou, se $\mathcal{C}$ é estrita

$$\lambda \circ (id_A \otimes \rho) = \rho \circ (\lambda \otimes id_B). \tag{2.20}$$

Os morfismos de (A, B)-bimódulos são morfismos de A-módulos à esquerda e de B-módulos à direita.

O caso particular em que as álgebras A e B são iguais, temos a categoria dos (A, A)-bimódulos ou apenas a categoria dos A-bimódulos que é denotada por ${}_A\mathcal{C}_A$. Nesse caso, a igualdade (2.19) torna-se

$$\lambda \circ (id_A \otimes \rho) \circ a_{A,M,A} = \rho \circ (\lambda \otimes id_A) \tag{2.21}$$

e (2.20) torna-se

$$\lambda \circ (id_A \otimes \rho) = \rho \circ (\lambda \otimes id_A), \tag{2.22}$$

se $\mathcal{C}$ é estrita.

Exemplo 2.60. Uma álgebra (A, m, u) em $\mathcal{C}$ é um A-bimódulo em $\mathcal{C}$. De fato, considerando $\lambda = \rho = m$, os diagramas comutativos da definição de uma álgebra em $\mathcal{C}$ são exatamente os mesmos das definições de A-módulos à direita, à esquerda e de A-bimódulos em $\mathcal{C}$.

Embora apresentamos, a seguir, as definições de coálgebras e comódulos em uma categoria monoidal qualquer, nosso interesse para o que faremos nesse trabalho, são essas definições nas categorias monoidais $Vect_{\mathbf{k}}$ e $vect_{\mathbf{k}}$.

Definição 2.61. Uma coálgebra em $\mathcal{C}$ é uma tripla (C, Δ, ε), em que C é um objeto em $\mathcal{C}$, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbf{1}$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[r, "id_C \otimes \Delta"] & C \otimes (C \otimes C) \arrow[d, "a^{-1}_{C,C,C}"] \\
C \otimes C \arrow[rr, "\Delta \otimes id_C"'] & & (C \otimes C) \otimes C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[rr, "\varepsilon \otimes id_C"] & & \mathbf{1} \otimes C \arrow[dl, "l_C"] \\
& C \arrow[ul, "\Delta"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[rr, "id_C \otimes \varepsilon"] & & C \otimes \mathbf{1} \arrow[dl, "r_C"] \\
& C, \arrow[ul, "\Delta"] &
\end{tikzcd}$$

isto é, supondo $\mathcal{C}$ estrita

$$(\Delta \otimes id_C) \circ \Delta = (id_C \otimes \Delta) \circ \Delta, \; (\varepsilon \otimes id_C) \circ \Delta = id_C \text{ e } (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id_C. \tag{2.23}$$

Os morfismos Δ e ε são chamados, respectivamente, *comultiplicação* e *counidade* de A.

Definição 2.62. Sejam $(\mathcal{C}, \Delta_C, \varepsilon_C)$, $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ coálgebras em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : C \to D$ em $\mathcal{C}$ diz-se de coálgebras se os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbf{1}. & \end{tikzcd}$$

Um exemplo imediato de uma coálgebra em $\mathcal{C}$ é a tripla $(\mathbf{1}, \Delta_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}}^{-1}, \varepsilon_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}})$.

Definição 2.63. Um comódulo à esquerda sobre a coálgebra (C, Δ, ε) (ou um A-comódulo à esquerda) em $\mathcal{C}$ é um par (M, ρ), em que M é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\rho : M \to C \otimes M$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & C \otimes M \arrow[r, "\Delta \otimes id_M"] & (C \otimes C) \otimes M \arrow[d, "a_{C,C,M}"] \\ C \otimes M \arrow[rr, "id_C \otimes \rho"'] & & C \otimes (C \otimes M) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes M \arrow[rr, "\varepsilon \otimes id_M"] & & \mathbf{1} \otimes M \arrow[dl, "l_M"] \\ & M, \arrow[ul, "\rho"] & \end{tikzcd}$$

isto é, considerando $\mathcal{C}$ estrita

$$(id_C \otimes \rho) \circ \rho = (\Delta \otimes id_M) \circ \rho \text{ e } (\varepsilon \otimes id_M) \circ \rho = id_M. \tag{2.24}$$

Definição 2.64. Sejam $(M, \rho_M), (N, \rho_N)$ dois C-comódulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Um morfismo $f : M \to N$ em $\mathcal{C}$ diz-se de C-comódulos se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ C \otimes M \arrow[r, "id_C \otimes f"'] & C \otimes N. \end{tikzcd}$$

De maneira análoga são definidos C-comódulos à direita e morfismos entre os mesmos.

Definição 2.65. Seja $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal trançada. Uma algebra A em $\mathcal{C}$ diz-se *comutativa* se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[rr, "\sigma_{A,A}"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\ & A, & \end{tikzcd}$$

isto é,

$$m \circ \sigma_{A,A} = m. \tag{2.25}$$

O próximo resultado é conhecido, mas devido à sua grande utilidade para os próximos capítulos, apresentamos sua prova. No que segue, para simplificar, composições de morfismos serão escritas como fg ao invés de $f \circ g$.

Seja $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada. Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras em $\mathcal{C}$. Definimos

$$m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)$$

e

$$u_{A\otimes B} = u_A \otimes u_B.$$

Proposição 2.66. *Sejam $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada, (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) álgebras em $\mathcal{C}$. Então $(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Tendo em mente o Corolário 2.53, verifiquemos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes A \otimes B \arrow[rr, "id_{A\otimes B}"] \arrow[dr, "u_{A\otimes B} \otimes id_{A\otimes B}"'] & & A \otimes B \\
& A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[ur, "m_{A\otimes B}"'] &
\end{tikzcd}$$

comuta. De fato,

$$\begin{aligned}
m_{A\otimes B}(u_{A\otimes B} \otimes id_{A\otimes B}) &= (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)(u_A \otimes u_B \otimes id_A \otimes id_B) \\
&\overset{\text{(nat)}}{=} (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes (id_A \otimes u_B) \otimes id_B)(u_A \otimes \sigma_{\mathbf{1},A} \otimes id_B) \\
&\overset{\text{Cor.2.53}}{=} (m_A \otimes m_B)(u_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_B)(id_{\mathbf{1}} \otimes id_A \otimes id_B) \\
&\overset{(2.11)}{=} (l_A \otimes l_B)(id_{\mathbf{1}} \otimes id_A \otimes id_B) = (id_A \otimes id_B) = l_{A\otimes B},
\end{aligned}$$

em que (nat) é devido à naturalidade da trança σ e usamos essa notação ao longo desse trabalho sempre que nos referirmos à naturalidade da trança, sem fazermos qualquer menção a esse fato. As duas últimas igualdades vem do fato de que $\mathcal{C}$ é estrita. O outro diagrama da definição de álgebra, semelhante a este, é provado de maneira análoga.

Agora, mostremos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "id_{A\otimes B}\otimes m_{A\otimes B}"] \arrow[d, "m_{A\otimes B}\otimes id_{A\otimes B}"'] & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[d, "m_{A\otimes B}"] \\
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "m_{A\otimes B}"'] & A \otimes B.
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&m_{A\otimes B}(id_{A\otimes B} \otimes m_{A\otimes B})\\
&= (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)(id_A \otimes id_B \otimes m_A \otimes m_B)(id_{A\otimes B} \otimes id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A\otimes A} \otimes m_B)\\
&(id_{A\otimes B} \otimes id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)\\
&= (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A\otimes A} \otimes id_{B\otimes B})\\
&(id_{A\otimes B} \otimes id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes u_{A\otimes B} = u_A \otimes u_B id_B)\\
&\overset{(2.6)}{=} (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B)(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_{B\otimes B})\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_A \otimes id_B \otimes id_B)(id_{A\otimes B} \otimes id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)\\
&= (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B)(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_{B\otimes B})\\
&(id_{A\otimes A} \otimes id_B \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&\overset{(2.5)}{=} (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes m_A \otimes id_B \otimes m_B)(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{B\otimes B,A} \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&\overset{(2.11)}{=} (m_A \otimes m_B)(m_A \otimes id_A \otimes m_B \otimes id_B)(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{B\otimes B,A} \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&= (m_A \otimes m_B)(m_A \otimes ((id_A \otimes m_B)\sigma_{B\otimes B,A}) \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} (m_A \otimes m_B)(m_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)(id_A \otimes id_A \otimes m_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&= (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)(m_A \otimes m_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_A \otimes id_B)\\
&= m_{A\otimes B}(m_{A\otimes B} \otimes id_{A\otimes B}).
\end{aligned}
$$

■

Seja **k** corpo. Vamos recordar sobre **k**-biálgebras e **k**-álgebras de Hopf, ou seja, vamos estudar sobre esses objetos na categoria dos espaços vetoriais. Assim como relembrar ações e coações de álgebras de Hopf, esses conceitos serão úteis para entendermos as álgebras base na categoria de H-módulos à esquerda. As referências recomendadas são [3] e [23].

Seja C uma coálgebra em $Vect_{\mathbf{k}}$. A conhecida notação de Sweedler é considerada sabida: $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ ou $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, e a propriedade da counidade é dada por $c = c_1\varepsilon(c_2) = \varepsilon(c_1)c_2$, para todo $c \in C$.

Definição 2.67. Um $\mathbf{k}$-espaço vetorial H que possua uma estrutura de álgebra (H, m, u) e de coálgebra (H, Δ, ε) tais que Δ e ε sejam morfismos de álgebras é dito uma biálgebra.

Sejam (C, Δ, ε) uma coálgebra e (A, m, u) uma álgebra. Então $Hom_{Vect_{\mathbf{k}}}(C, A)$ ou $Hom_{\mathbf{k}}(C, A)$ possui uma estrutura de álgebra em que a multiplicação é dada por

$$(f * g)(c) = f(c_1)g(c_2)$$

para quaisquer $f, g \in Hom_{\mathbf{k}}(C, A), c \in C$, chamado *produto de convolução.* A unidade dessa álgebra é $u\varepsilon$.

Seja H uma biálgebra, denotamos H^c a estrutura de coálgebra de H e H^a a estrutura de álgebra de H. Nessas condições (como um caso particular), temos uma estrutura de álgebra em $Hom_{\mathbf{k}}(H^c, H^a)$. É claro que a identidade $id_H : H \to H$ pertence à $Hom_{\mathbf{k}}(H^c, H^a)$.

Definição 2.68. Seja H uma biálgebra. Uma função $\mathbf{k}$-linear $S : H \to H$ é chamada antípoda de H se S for a inversa da função identidade $id_H : H \to H$ com respeito ao produto de convolução da álgebra $Hom_{\mathbf{k}}(H^c, H^a)$, isto é, $S * id_H = u\varepsilon = id_H * S$

O produto de convolução acima é dado por $S(h_1)h_2 = \varepsilon(h)1_H = h_1S(h_2)$, para todo $h \in H$.

Definição 2.69. Uma biálgebra H é dita uma álgebra de Hopf se H possui uma antípoda.

Proposição 2.70. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda S. Então são verdadeiras as seguintes afirmações.*

(i) $S(hg) = S(g)S(h)$*, para quaisquer* $g, h \in H$.

(ii) $S(1_H) = 1_H$.

(iii) $\Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1)$*, para qualquer* $h \in H$.

(iv) $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$*, para todo* $h \in H$.

As propriedades (i) e (ii) significam que S é um antimorfismo de álgebras e (iii) e (iv) significam que S é um antimorfismo de coálgebras.

Quando a antípoda S de uma álgebra de Hopf é bijetora é conhecido que a categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ é trançada. No Capítulo 4, efetivamente vamos trabalhar com essa categoria e já aproveitamos para apresentar aqui um exemplo de categoria monoidal que será útil também no Capítulo 4.

Exemplo 2.71. Seja H uma $\mathbf{k}$-biálgebra. Então a categoria ${}_H\mathcal{M}$ dos H-módulos à esquerda é uma categoria monoidal. Basta considerar $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{1} = \mathbf{k}$ e podemos observar que $\mathbf{k}$ é um H-módulo à esquerda com $h \cdot \alpha = \varepsilon(h)\alpha$, para quaisquer $\alpha \in \mathbf{k}$ e $h \in H$.

Sejam $(M, \lambda_M), (N, \lambda_N)$ dois H-módulos à esquerda. Então $M \otimes N$ é um H-módulo à esquerda dessa forma: $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$. Não é difícil verificar os demais detalhes para que ${}_H\mathcal{M}$ seja monoidal.

A seguir, recordamos as (co)ações de uma $\mathbf{k}$-álgebra de Hopf H numa $\mathbf{k}$-álgebra A.

Definição 2.72. Diz-se que H age na álgebra A ou que A é um H-módulo álgebra à esquerda se são satisfeitas

(i) A é um H-módulo à esquerda (com ação $h \in H$ sobre $a \in A$ denotada por $h \cdot a$).

(ii) $h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$, para todo $h \in H$ e quaisquer $a, b \in A$, onde $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$.

(iii) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$.

Na verdade, dizer que H age numa álgebra A é fazer com que A seja uma álgebra na categoria de H-módulos à esquerda, veja ([3], Proposition 6.1.4).

Proposição 2.73. *Seja A uma $\mathbf{k}$-álgebra que é também um H-módulo à esquerda. Então A é um H-módulo álgebra à esquerda se, e somente se, A é uma álgebra em ${}_H\mathcal{M}$.*

Definição 2.74. Diz que A é um H-comódulo álgebra à esquerda se são satisfeitas

(i) A é um H-comódulo à esquerda com estrutura

$$\begin{aligned} \rho : A &\to H \otimes A \\ a &\to \sum a_{(-1)} \otimes a_{(0)} \end{aligned}$$

(ii) $\sum (ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} = \sum a_{(-1)} b_{(-1)} \otimes a_{(0)} b_{(0)}$.

(iii) $\rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A$.

Interessante perceber que A é um H-comódulo álgebra à esquerda é o mesmo que A ser uma álgebra na categoria dos H-comódulos à esquerda, veja ([3], Proposition 6.2.2).

Proposição 2.75. *Seja A uma $\mathbf{k}$-álgebra que é também um H-comódulo à esquerda. Então A é um H-comódulo álgebra à esquerda se, e somente se, A é uma álgebra em ${}^H\mathcal{M}$ (categoria de H-comódulos à esquerda).*

3 CATEGORIAS ${}_A\mathcal{C}_B$, ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ E A MONOIDALIDADE DA CATEGORIA ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$

Iniciamos este capítulo apresentando a construção da monoidalidade da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$, seção 3.1, que pode ser vista com detalhes em [5], mas é também apresentada de maneira bem resumida em [7] e [17]. Ainda nessa seção, restringindo a monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$ às categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$, sob certas hipóteses, mostramos que essas duas categorias são monoidalmente isomorfas. Não sabemos se esse resultado é conhecido, uma vez que não o encontramos na literatura que acessamos até o momento.

Como um caso particular do que é desenvolvido na seção 3.1, a categoria ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ é monoidal como uma restrição à monoidalidade de ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}_{A\otimes A}$ (com o funtor $\otimes_{A\otimes A}$). Todavia, apresentamos na seção 3.3 uma estrutura monoidal de ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ induzida pela monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$ (com o funtor $\otimes_A$) e também pelo isomorfismo provado na seção 3.2 entre as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$, no caso particular em que $A = B$.

Na prova do isomorfismo entre as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ é importante destacar que para essa prova foi fundamental a comutatividade das álgebras A e B, além de B ser um objeto do centro de Müger.

Nesse capítulo, $\mathcal{C}$ será considerada uma categoria monoidal estrita trançada na seção 3.1, apenas onde explicamos como ${}_A\mathcal{C}_A$ torna-se monoidal, e nas seções 3.2 e 3.3. Lembrando que, para quaisquer dois morfismos, escrevemos fg invés de $f \circ g$.

3.1 A ESTRUTURA MONOIDAL DA CATEGORIA ${}_A\mathcal{C}_A$

Em [5], as categorias não são estritas até porque para se obter a monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$, é necessário que $\mathcal{C}$ seja monoidal abeliana e que A seja uma álgebra qualquer em $\mathcal{C}$, como o leitor poderá verificar. Como faremos várias referências ao trabalho de L. Dodl, incluímos o link para esse trabalho na bibliografia desta tese.

Começamos apresentando a estrutura monoidal para ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isto, consideremos $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal abeliana tal que o funtor tensor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um funtor exato à direita em cada variável, isto é, segundo a Definição 2.40, se

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta em $\mathcal{C}$ então, para cada $L \in \mathcal{C}$ fixado e considerando $F = \otimes \circ (-, L)$, a sequência

$$X \otimes L \xrightarrow{f\otimes id_L} Y \otimes L \xrightarrow{g\otimes id_L} Z \otimes L \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{C}$ (exatidão à direita na primeira variável) e considerando $F = \otimes \circ (L, -)$, a sequência

$$L \otimes X \xrightarrow{id_L\otimes f} L \otimes Y \xrightarrow{id_L\otimes g} L \otimes Z \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{C}$ (exatidão à direita na segunda variável). Além disso, consideremos (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$.

Primeiramente, é necessário definir o funtor $\otimes_A : {}_A\mathcal{C}_A \times {}_A\mathcal{C}_A \to {}_A\mathcal{C}_A$. Sejam (V, ρ_V, λ_V) e (W, ρ_W, λ_W) objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Consideremos os morfismos

$$\rho_V \otimes id_W : V \otimes A \otimes W \to V \otimes W$$

e

$$id_V \otimes \lambda_W : V \otimes A \otimes W \to V \otimes W.$$

Definimos $\pi_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes_A W$ como o coequalizador do par de morfismos $\rho_V \otimes id_W$ e $id_V \otimes \lambda_W$. Isto quer dizer que

$$\pi_{V,W}(\rho_V \otimes id_W) = \pi_{V,W}(id_V \otimes \lambda_W) \tag{3.1}$$

e se qualquer outro morfismo $h : V \otimes W \to Z$ é tal que $h(\rho_V \otimes id_W) = h(id_V \otimes \lambda_W)$, então existe um único morfismo $v : V \otimes_A W \to Z$ em $\mathcal{C}$ tal que $v\,\pi_{V,W} = h$. Podemos ilustrar esta definição com o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes A \otimes W \arrow[r, shift left, "id_V \otimes \lambda_W"] \arrow[r, shift right, "\rho_V \otimes id_W"'] & V \otimes W \arrow[r, "\pi_{V,W}"] \arrow[dr, "h"'] & V \otimes_A W \arrow[d, dashed, "v"] \\
& & Z.
\end{tikzcd}$$

A Proposição 2.35 nos diz que $\pi_{V,W}$ é o conúcleo do morfismo $id_V \otimes \lambda_W - \rho_V \otimes id_W$.

Lema 3.1. *Sejam $f : V \to W$ e $g : V' \to W'$ morfismos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Então são válidas as afirmações:*

(i) $\pi_{W,W'}(f \otimes g)(\rho_V \otimes id_{V'}) = \pi_{W,W'}(f \otimes g)(id_V \otimes \lambda_{V'})$;

(ii) *existe um único morfismo $f \otimes_A g : V \otimes_A V' \to W \otimes_A W'$ em $\mathcal{C}$ tal que*

$$(f \otimes_A g)\pi_{V,V'} = \pi_{W,W'}(f \otimes g). \tag{3.2}$$

A seguir, vejamos que $V \otimes_A W$ é, de fato, um objeto em ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isso, é necessário definirmos

$$\rho_{V \otimes_A W} : (V \otimes_A W) \otimes A \to V \otimes_A W$$

e

$$\lambda_{V \otimes_A W} : A \otimes (V \otimes_A W) \to V \otimes_A W.$$

Consideremos $\phi : V \otimes W \otimes A \to V \otimes_A W$ como sendo a composição

$$\phi : V \otimes W \otimes A \xrightarrow{id_V \otimes \rho_W} V \otimes W \xrightarrow{\pi_{V,W}} V \otimes_A W,$$

isto é,

$$\phi = \pi_{V,W}(id_V \otimes \rho_W). \tag{3.3}$$

Em ([5], veja (3.18)) é provado que a composição

$$\phi\,(id_V \otimes \lambda_W \otimes id_A - \rho_V \otimes id_W \otimes id_A) = 0, \tag{3.4}$$

ou seja, o diagrama

$$\begin{tikzcd}
V \otimes A \otimes W \otimes A \arrow[dd, equal, "id_{V\otimes A\otimes W}\otimes id_A"'] \arrow[dr, "\rho_V\otimes id_W\otimes id_A"] & & \\
& V \otimes W \otimes A \arrow[r, "\phi"] & V \otimes_A W \\
V \otimes A \otimes W \otimes A \arrow[ur, "id_V\otimes\lambda_W\otimes id_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

O fato de $\otimes$ ser exato à direita na primeira variável nos diz, em particular, que o funtor $\otimes \circ (-, A)$ é exato à direita. Chamando $f = id_V \otimes \lambda_W - \rho_V \otimes id_W$ e sabendo que $(V \otimes_A W, \pi_{V,W})$ é o conúcleo de f, pela Definição 2.39, temos que

$$(\otimes \circ (-, A))(V \otimes_A W, \pi_{V,W}) = (V \otimes_A W \otimes A, \pi_{V,W} \otimes id_A)$$

é o conúcleo de $f \otimes id_A = id_V \otimes \lambda_W \otimes id_A - \rho_V \otimes id_W \otimes id_A$.

Por (3.4), $\phi(f \otimes id_A) = 0$. Portanto, existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $\rho_{V\otimes_A W}$: $(V \otimes_A W) \otimes A \to V \otimes_A W$ tal que $\rho_{V\otimes_A W}(\pi_{V,W} \otimes id_A) = \phi$, isto é,

$$\rho_{V\otimes_A W}(\pi_{V,W} \otimes id_A) = \pi_{V,W}(id_V \otimes \rho_W). \tag{3.5}$$

O diagrama abaixo resume o que acabamos de explanar acima

$$\begin{tikzcd}
V \otimes A \otimes W \otimes A \arrow[r, "f\otimes id_A"] & V \otimes W \otimes A \arrow[r, "\pi_{V,W}\otimes id_A"] \arrow[d, "\phi"'] & (V \otimes_A W) \otimes A \arrow[dl, dashed, "\rho_{V\otimes_A W}"] \\
& V \otimes_A W. &
\end{tikzcd}$$

Desta forma, a ação à direita está bem definida e o próximo resultado foi provado com detalhes em ([5], Lema 3.2.2.).

Lema 3.2. *O morfismo $\rho_{V\otimes_A W}$ define uma ação à direita sobre o objeto $V \otimes_A W$.*

De forma análoga, apresentamos a construção da ação à esquerda $\lambda_{V\otimes_A W}$. Definimos $\varphi : A \otimes V \otimes W \to V \otimes_A W$ como sendo a composição

$$\varphi : A \otimes V \otimes W \xrightarrow{\lambda_V\otimes id_W} V \otimes W \xrightarrow{\pi_{V,W}} V \otimes_A W,$$

isto é,

$$\varphi = \pi_{V,W}(\lambda_V \otimes id_W). \tag{3.6}$$

Segue por ([5], veja (3.29)) que a composta

$$\varphi\,(id_A \otimes id_V \otimes \lambda_W - id_A \otimes \rho_V \otimes id_W) = 0, \tag{3.7}$$

então temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes V \otimes A \otimes W \arrow[dd, equal, "id_A \otimes id_{V\otimes A\otimes W}"'] \arrow[dr, "id_A \otimes \rho_V \otimes id_W"] & & \\
& A \otimes V \otimes W \arrow[r, "\varphi"] & V \otimes_A W \\
A \otimes V \otimes A \otimes W \arrow[ur, "id_A \otimes id_V \otimes \lambda_W"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Seguindo ideia semelhante ao que foi feito anteriormente, sendo $\otimes$ exato à direita na segunda variável e $(V \otimes_A W, \pi_{V,W})$ o conúcleo de $f = id_V \otimes \lambda_W - \rho_V \otimes id_W$, temos que

$$\otimes \circ (A, -)(V \otimes_A W, \pi_{V,W}) = (A \otimes (V \otimes_A W), id_A \otimes \pi_{V,W})$$

é o conúcleo de $id_A \otimes f$. De (3.7), $\varphi(id_A \otimes f) = 0$ e portanto, existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $\lambda_{V\otimes_A W} : A \otimes (V \otimes_A W) \to V \otimes_A W$ tal que $\lambda_{V\otimes_A W}(id_A \otimes \pi_{V,W}) = \varphi$, isto é,

$$\lambda_{V\otimes_A W}(id_A \otimes \pi_{V,W}) = \pi_{V,W}(\lambda_V \otimes id_W). \tag{3.8}$$

Veja o diagrama abaixo que resume a situação acima

$$\begin{tikzcd}
A \otimes ((V \otimes A) \otimes W) \arrow[r, "id_A \otimes f"] & A \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "id_A \otimes \pi_{V,W}"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \otimes (V \otimes_A W) \arrow[dl, dashed, "\lambda_{V\otimes_A W}"] \\
& V \otimes_A W. &
\end{tikzcd}$$

Temos bem definida a ação à esquerda e o lema seguinte pode ser visto com detalhes em ([5], Lema 3.2.3.).

Lema 3.3. *O morfismo $\lambda_{V\otimes_A W}$ define uma ação à esquerda sobre o objeto $V \otimes_A W$.*

Pelos lemas 3.2 e 3.3, $V \otimes_A W$ possui uma estrutura de A-módulo à direita e à esquerda em $\mathcal{C}$, respectivamente, e juntamente com a verificação da igualdade (2.22), ou seja,

$$\lambda_{V\otimes_A W}(id_A \otimes \rho_{V\otimes_A W}) = \rho_{V\otimes_A W}(\lambda_{V\otimes_A W} \otimes id_A)$$

nos garantem que $V \otimes_A W$ é um A-bimódulo. A prova do lema a seguir é apresentada em ([5], Lema 3.2.4.).

Lema 3.4. *$(V \otimes_A W, \lambda_{V\otimes_A W}, \rho_{V\otimes_A W})$ é um A-bimódulo em $\mathcal{C}$.*

Agora, para quaisquer $f : V \to W$ e $g : V' \to W'$ morfismos em ${}_A\mathcal{C}_A$, é mostrado com detalhes em ([5], Lema 3.2.5.) que $f \otimes_A g : V \otimes_A V' \to W \otimes_A W'$ é um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$. Enunciamos a seguir.

Lema 3.5. *O morfismo $f \otimes_A g : V \otimes_A V' \to W \otimes_A W'$ é um morfismo de A-bimódulos.*

Uma vez bem definidos os objetos e morfismos sob a "aplicação" de $\otimes_A$, prova-se que $\otimes_A$ *é um funtor*, veja ([5], Lema 3.2.6.).

Ainda para que seja estabelecida a estrutura monoidal para ${}_A\mathcal{C}_A$ necessitamos obter isomorfismos

$$a'_{U,V,W} : (U \otimes_A V) \otimes_A W \to U \otimes_A (V \otimes_A W),$$

para quaisquer U, V e W objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isso, definimos o morfismo

$$\alpha_{U,V,W} : U \otimes V \otimes W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$$

como sendo a composição

$$\alpha_{U,V,W} : U \otimes V \otimes W \xrightarrow{id_U \otimes \pi_{V,W}} U \otimes (V \otimes_A W) \xrightarrow{\pi_{U,V\otimes_A W}} U \otimes_A (V \otimes_A W),$$

isto é,

$$\alpha_{U,V,W} = \pi_{U,V\otimes_A W}(id_U \otimes \pi_{V,W}). \tag{3.9}$$

A comutatividade do diagrama abaixo é mostrada em ([5], (3.46))

$$\begin{tikzcd}
U \otimes A \otimes V \otimes W \arrow[dd, equal, "id_{U\otimes A\otimes V}\otimes id_W"'] \arrow[dr, "\rho_U \otimes id_V \otimes id_W"] & & \\
& U \otimes V \otimes W \arrow[r, "\alpha_{U,V,W}"] & U \otimes_A (V \otimes_A W), \\
U \otimes A \otimes V \otimes W \arrow[ur, "id_U \otimes \lambda_V \otimes id_W"'] & &
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\alpha_{U,V,W}(id_U \otimes \lambda_V \otimes id_W - \rho_U \otimes id_V \otimes id_W) = 0. \tag{3.10}$$

Considerando $f = id_U \otimes \lambda_V - \rho_U \otimes id_V$ e sendo $(U \otimes_A V, \pi_{U,V})$ o conúcleo de f e $\otimes$ exato à direita em cada variável, segue que $((U \otimes_A V) \otimes W, \pi_{U,V} \otimes id_W)$ é o conúcleo de $f \otimes id_W$. Por (3.10), $\alpha_{U,V,W}(f \otimes id_W) = 0$. Assim, existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $\beta_{U,V,W} : (U \otimes_A V) \otimes W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$ tal que $\beta_{U,V,W}(\pi_{U,V} \otimes id_W) = \alpha_{U,V,W}$, ou seja,

$$\beta_{U,V,W}(\pi_{U,V} \otimes id_W) = \pi_{U,V\otimes_A W}(id_U \otimes \pi_{V,W}). \tag{3.11}$$

Acompanhe o diagrama abaixo para melhor entendimento do que expomos acima

$$\begin{tikzcd}
U \otimes A \otimes V \otimes W \arrow[r, "f\otimes id_W"] & U \otimes V \otimes W \arrow[r, "\pi_{U,V}\otimes id_W"] \arrow[d, "\alpha_{U,V,W}"'] & (U \otimes_A V) \otimes W \arrow[dl, dashed, "\beta_{U,V,W}"] \\
& U \otimes_A (V \otimes_A W). &
\end{tikzcd}$$

Para finalmente obtermos a', consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes_A V) \otimes A \otimes W \arrow[dd, equal, "id_{(U\otimes_A V)\otimes A\otimes W}"'] \arrow[dr, "\rho_{U\otimes_A V}\otimes id_W"] & & \\
& (U \otimes_A V) \otimes W \arrow[r, "\pi_{U\otimes_A V,W}"] \arrow[dd, "\beta_{U,V,W}"] & (U \otimes_A V) \otimes_A W \arrow[ddl, dashed, "a'_{U,V,W}"] \\
(U \otimes_A V) \otimes A \otimes W \arrow[ur, "id_{U\otimes_A V}\otimes \lambda_W"'] & & \\
& U \otimes_A (V \otimes_A W) &
\end{tikzcd}$$

e pode-se mostrar que

$$\beta_{U,V,W}\,(id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W - \rho_{U\otimes_A V} \otimes id_W) = 0. \tag{3.12}$$

Ocorrendo esta igualdade e sendo $((U \otimes_A V) \otimes_A W, \pi_{U\otimes_A V,W})$ o conúcleo de $id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W - \rho_{U\otimes_A V} \otimes id_W$, segue que existe um único morfismo em $\mathcal{C}$,

$$a'_{U,V,W} : (U \otimes_A W) \otimes_A W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$$

tal que

$$a'_{U,V,W}\pi_{U\otimes_A V,W} = \beta_{U,V,W}. \tag{3.13}$$

Lema 3.6. *A coleção* $a' = \{a'_{U,V,W} : (U \otimes_A V) \otimes_A W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)\}_{U,V,W\in {}_A\mathcal{C}_A}$ *é um isomorfismo natural.*

Um exemplo trivial, como já dissemos no Capítulo 2, é a álgebra A que possui uma estrutura de A-bimódulo em $\mathcal{C}$ dada por $\lambda_A = \rho_A = m : A \otimes A \to A$, sendo portanto, a unidade $\mathbf{1}_{{}_A\mathcal{C}_A} = A$.

Os isomorfismos naturais $\{l'_V : A \otimes_A V \to V\}_{V\in {}_A\mathcal{C}_A}$ e $\{r'_U : U \otimes_A A \to U\}_{U\in {}_A\mathcal{C}_A}$ são construídos com a mesma ideia feita para os demais que foram apresentados aqui. Podemos ver com detalhes em ([5], pags. 75 - 81) e podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 3.7. *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria monoidal abeliana tal que o produto tensorial* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é exato à direita em cada variável. Se* A *é uma álgebra em* $\mathcal{C}$*, então* $({}_A\mathcal{C}_A, \otimes_A, A, a', l', r')$ *é uma categoria monoidal.*

Uma vez definida a estrutura monoidal de ${}_A\mathcal{C}_A$, podemos estabelecer uma estrutura monoidal nas categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$. No próximo teorema, demonstramos que as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ são categorias monoidalmente isomorfas.

Teorema 3.8. *Sejam* $(\mathcal{C}, \sigma)$ *uma categoria monoidal trançada e* A *uma álgebra comutativa em* $\mathcal{C}$*. Então* ${}_A\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{C}_A$ *são categorias monoidalmente isomorfas.*

Demonstração: Vamos dividir essa prova em duas partes. Na primeira parte, faremos a prova de que ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ são categorias isomorfas e na segunda parte, iremos tratar da monoidalidade.

Parte 1: Seja (M, ρ_M) um objeto em $\mathcal{C}_A$, em que $\rho_M : M \otimes A \to M$ é o morfismo de estrutura de A-módulo à direita de M. Definimos o morfismo λ_M da seguinte maneira

$$\lambda_M : A \otimes M \xrightarrow{\sigma_{A,M}} M \otimes A \xrightarrow{\rho_M} M,$$

isto é, $\lambda_M \overset{(*)}{=} \rho_M \sigma_{A,M}$. Mostremos que (M, λ_M) é um objeto em ${}_A\mathcal{C}$. Para isso, verifiquemos a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes M \arrow[r, "a_{A,A,M}"] \arrow[d, "m \otimes id_M"'] & A \otimes (A \otimes M) \arrow[r, "id_A \otimes \lambda_M"] & A \otimes M \arrow[d, "\lambda_M"] \\
A \otimes M \arrow[rr, "\lambda_M"'] & & M
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes M \arrow[rr, "u \otimes id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & A \otimes M \arrow[dl, "\lambda_M"] \\
& M. &
\end{tikzcd}$$

Vejamos a comutatividade do segundo diagrama, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_M(u \otimes id_M) &\overset{(*)}{=} \rho_M \sigma_{A,M}(u \otimes id_M) \\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \rho_M (id_M \otimes u) \sigma_{\mathbf{1},M} \\
&\overset{(2.16)}{=} r_M \sigma_{\mathbf{1},M} \\
&\overset{\text{Prop.2.52}}{=} l_M.
\end{aligned}$$

Para o primeiro diagrama, temos que

$$\begin{aligned}
&\lambda_M(id_A \otimes \lambda_M)a_{A,A,M} \overset{(*)}{=} \rho_M\sigma_{A,M}(id_A \otimes \rho_M)(id_A \otimes \sigma_{A,M})a_{A,A,M} \\
&\overset{(\text{nat})}{=} \rho_M(\rho_M \otimes id_A)\sigma_{A,M\otimes A}(id_A \otimes \sigma_{A,M})a_{A,A,M} \\
&\overset{(2.16)}{=} \rho_M(id_M \otimes m)a_{M,A,A}\,\sigma_{A,M\otimes A}(id_A \otimes \sigma_{A,M})a_{A,A,M} \\
&\overset{(2.4)}{=} \rho_M(id_M \otimes m)(id_M \otimes \sigma_{A,A})a_{M,A,A}(\sigma_{A,M} \otimes id_A)a^{-1}_{A,M,A}(id_A \otimes \sigma_{A,M}) \\
&a_{A,A,M} \\
&\overset{(2.3)}{=} \rho_M(id_M \otimes (m\sigma_{A,A}))\sigma_{A\otimes A,M} \\
&\overset{(2.25)}{=} \rho_M(id_M \otimes m)\sigma_{A\otimes A,M} \\
&\overset{(\text{nat})}{=} \rho_M\sigma_{A,M}(m \otimes id_M) \\
&\overset{(*)}{=} \lambda_M(m \otimes id_M).
\end{aligned}$$

Portanto, (M, λ_M) é um objeto em ${}_A\mathcal{C}$.

Seja $f : M \to N$ um morfismo em $\mathcal{C}_A$. Mostremos que f é um morfismo em ${}_A\mathcal{C}$. Para isso temos que mostrar que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "id_A\otimes f"] \arrow[d, "\lambda_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\lambda_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N.
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda_N(id_A \otimes f) &\overset{(*)}{=} \rho_N\sigma_{A,N}(id_A \otimes f) \\
&\overset{(\text{nat})}{=} \rho_N(f \otimes id_A)\sigma_{A,M} \\
&\overset{(2.18)}{=} f\,\rho_M\sigma_{A,M} \\
&\overset{(*)}{=} f\,\lambda_M.
\end{aligned}$$

A seguir, mostremos que as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ são isomorfas. Para isso, definimos os funtores F e G abaixo:

$$\begin{array}{rccc}
F: & \mathcal{C}_A & \longrightarrow & {}_A\mathcal{C} \\
 & (M, \rho_M) & \longmapsto & (M, \lambda_M) \\
 & (f, \rho_M, \rho_N) & \longmapsto & (f, \lambda_M, \lambda_N),
\end{array}$$

em que $\lambda_X = \rho_X\sigma_{A,X}$, para $X = M, N$ e $f : M \to N$ é um morfismo qualquer em $\mathcal{C}_A$. Claramente F é um funtor, pois dado $g : W \to M$ morfismo em $\mathcal{C}_A$, temos

$$F(f\,g) = f\,g = F(f)\,F(g) \text{ e } F(id_M) = id_M = id_{F(M)}.$$

Agora, definimos G de modo análogo.

$$\begin{array}{cccc} G: & {}_A\mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C}_A \\ & (M,\lambda_M) & \longmapsto & (M,\widehat{\rho}_M) \\ & (f,\lambda_M,\lambda_N) & \longmapsto & (f,\widehat{\rho}_M,\widehat{\rho}_N), \end{array}$$

em que $\widehat{\rho}_X \overset{(**)}{=} \lambda_X\,\sigma_{A,X}^{-1}$, para $X = M, N$. A verificação de que $(M,\widehat{\rho}_M)$ é um objeto em $\mathcal{C}_A$ é análoga ao que fizemos acima. Verifiquemos apenas a comutatividade do diagrama abaixo. A verificação da condição $\widehat{\rho}_M(id_M \otimes u) = r_M$ e também de que se f é um morfismo em ${}_A\mathcal{C}$ então f é um morfismo em $\mathcal{C}_A$ procede de modo análogo, como já dissemos,

$$\begin{tikzcd} M\otimes(A\otimes A) \arrow[r, "a^{-1}_{M,A,A}"] \arrow[d, "id_M\otimes m"'] & (M\otimes A)\otimes A \arrow[r, "\widehat{\rho}_M\otimes id_A"] & M\otimes A \arrow[d, "\widehat{\rho}_M"] \\ M\otimes A \arrow[rr, "\widehat{\rho}_M"'] & & M. \end{tikzcd}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
&\widehat{\rho}_M(\widehat{\rho}_M\otimes id_A)a^{-1}_{M,A,A} \overset{(**)}{=} \lambda_M\sigma^{-1}_{A,M}(\lambda_M\otimes id_A)(\sigma^{-1}_{A,M}\otimes id_A)a^{-1}_{M,A,A}\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \lambda_M(id_A\otimes\lambda_M)\sigma^{-1}_{A,A\otimes M}(\sigma^{-1}_{A,M}\otimes id_A)a^{-1}_{M,A,A}\\
&\overset{(2.13)}{=} \lambda_M(m\otimes id_M)a^{-1}_{A,A,M}\sigma^{-1}_{A,A\otimes M}(\sigma^{-1}_{A,M}\otimes id_A)a^{-1}_{M,A,A}\\
&\overset{(2.4)}{=} \lambda_M(m\otimes id_M)(\sigma^{-1}_{A,A}\otimes id_M)a^{-1}_{A,A,M}(id_A\otimes\sigma^{-1}_{A,M})a_{A,M,A}(\sigma^{-1}_{A,M}\otimes id_A)\\
&a^{-1}_{M,A,A}\\
&\overset{(2.3)}{=} \lambda_M((m\,\sigma^{-1}_{A,A})\otimes id_M)\sigma^{-1}_{A\otimes A,M}\\
&\overset{(2.25)}{=} \lambda_M(m\otimes id_M)\sigma^{-1}_{A\otimes A,M}\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \lambda_M\sigma^{-1}_{A,M}(id_M\otimes m)\\
&\overset{(**)}{=} \widehat{\rho}_M(id_M\otimes m).
\end{aligned}$$

Claramente, G é um funtor. Observemos que, para cada objeto M e cada morfismo f em $\mathcal{C}_A$, temos

$$G(F(M,\rho_M)) = G(M,\lambda_M) = (M,\widehat{\rho}_M)$$

e

$$G(F(f,\rho_M,\rho_N)) = G(f,\lambda_M,\lambda_N) = (f,\widehat{\rho}_M,\widehat{\rho}_N).$$

Mas

$$\widehat{\rho}_M = \lambda_M\sigma^{-1}_{A,M} = \rho_M\sigma_{A,M}\sigma^{-1}_{A,M} = \rho_M.$$

Assim, $G \circ F = Id_{\mathcal{C}_A}$. Por outro lado, para cada objeto M e cada morfismo f em ${}_A\mathcal{C}$, temos

$$F(G(M, \lambda_M)) = F(M, \widehat{\rho}_M) = (M, \lambda'_M)$$

e

$$F(G(f, \lambda_M, \lambda_N)) = F(f, \widehat{\rho}_M, \widehat{\rho}_N) = (f, \lambda'_M, \lambda'_N).$$

Como

$$\lambda'_M = \widehat{\rho}_M \sigma_{A,M} = \lambda_M \sigma^{-1}_{A,M} \sigma_{A,M} = \lambda_M$$

e portanto, $F \circ G = Id_{{}_A\mathcal{C}}$. Assim, ${}_A\mathcal{C} \cong \mathcal{C}_A$, isto é, as categorias são isomorfas.

Parte 2: Para garantirmos a monoidalidade dos funtores F e G, é necessário que as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ sejam ambas monoidais e isso ocorre pela restrição à essas categorias da estrutura monoidal de ${}_A\mathcal{C}_A$. Todavia para estabelecermos essa restrição é necessário que um objeto em $\mathcal{C}_A$ (e em ${}_A\mathcal{C}$) sejam objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$.

De fato, suponhamos $(M, \rho_M) \in \mathcal{C}_A$. Sabemos que M possui uma estrutura de A-módulo à esquerda dada por $\lambda_M = \rho_M \sigma_{A,M}$. Mostremos que $\lambda_M(id_A \otimes \rho_M)a_{A,M,A} = \rho_M(\lambda_M \otimes id_A)$. Temos

$$\begin{aligned}
&\lambda_M(id_A \otimes \rho_M)a_{A,M,A} = \rho_M \sigma_{A,M}(id_A \otimes \rho_M)a_{A,M,A} \\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \rho_M(\rho_M \otimes id_A)\sigma_{A,M\otimes A} a_{A,M,A} \\
&\overset{(2.4)}{=} \rho_M(\rho_M \otimes id_A)a^{-1}_{M,A,A}(id_M \otimes \sigma_{A,A})a_{M,A,A}(\sigma_{A,M} \otimes id_A) \\
&\overset{(2.16)}{=} \rho_M(id_M \otimes m)a_{M,A,A}a^{-1}_{M,A,A}(id_M \otimes \sigma_{A,A})a_{M,A,A}(\sigma_{A,M} \otimes id_A) \\
&= \rho_M(id_M \otimes (m\,\sigma_{A,A}))a_{M,A,A}(\sigma_{A,M} \otimes id_A) \\
&\overset{(2.25)}{=} \rho_M(id_M \otimes m)a_{M,A,A}(\sigma_{A,M} \otimes id_A) \\
&\overset{(2.16)}{=} \rho_M(\rho_M \otimes id_A)(\sigma_{A,M} \otimes id_A) = \rho_M(\lambda_M \otimes id_A).
\end{aligned}$$

De modo análogo, um objeto em ${}_A\mathcal{C}$ é também um objeto em ${}_A\mathcal{C}_A$.

Agora provaremos que os funtores F e G são monoidais. Sejam (M, ρ_M) e (N, ρ_N) objetos em $\mathcal{C}_A$. A categoria $\mathcal{C}_A$ possui uma estrutura monoidal dada pela restrição da monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$ da seguinte forma, veja Lema 3.2,

$$(M, \rho_M) \otimes_A (N, \rho_N) = (M \otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}).$$

Por outro lado, ${}_A\mathcal{C}$ é também uma categoria monoidal (pela restrição), e assim

$$F(M \otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}) = (M \otimes_A N, \widehat{\lambda}_{M\otimes_A N}),$$

em que $\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N} = \rho_{M\otimes_A N}\sigma_{A,M\otimes_A N}$.

Sabemos da definição de F que $F(M,\rho_M)=(M,\lambda_M)$ e $F(N,\rho_N)=(N,\lambda_N)$ e, pelo Lema 3.3, temos que $(M,\lambda_M)\otimes_A(N,\lambda_N)=(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N})$. Portanto,

$$F(M,\rho_M)\otimes_A F(N,\rho_N)=(M,\lambda_M)\otimes_A(N,\lambda_N)=(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N}).$$

Mostremos que $\lambda_{M\otimes_A N}=\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N}$. Por definição, $\lambda_{M\otimes_A N}$ é o único morfismo que satisfaz

$$\lambda_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\pi_{M,N})=\varphi,$$

veja (3.8), em que $\varphi=\pi_{M,N}(\lambda_M\otimes id_N)a^{-1}_{A,M,N}$, veja (3.6) ou ([5], (3.28)). Assim, se mostrarmos que $\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\pi_{M,N})=\varphi$, teremos que $\lambda_{M\otimes_A N}=\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\pi_{M,N}) &= \rho_{M\otimes_A N}\sigma_{A,M\otimes_A N}(id_A\otimes\pi_{M,N})\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \rho_{M\otimes_A N}(\pi_{M,N}\otimes id_A)\sigma_{A,M\otimes N}\\
&\overset{(3.5)}{=} \pi_{M,N}(id_M\otimes\rho_N)a_{M,N,A}\sigma_{A,M\otimes N}\\
&\overset{(*)}{=} \pi_{M,N}(id_M\otimes\lambda_N)(id_M\otimes\sigma^{-1}_{A,N})a_{M,N,A}\sigma_{A,M\otimes N}\\
&\overset{(2.4)}{=} \pi_{M,N}(id_M\otimes\lambda_N)a_{M,A,N}(\sigma_{A,M}\otimes id_N)a^{-1}_{A,M,N}\\
&\overset{(3.1)}{=} \pi_{M,N}(\rho_M\otimes id_N)(\sigma_{A,M}\otimes id_N)a^{-1}_{A,M,N}\\
&\overset{(*)}{=} \pi_{M,N}(\lambda_M\otimes id_N)a^{-1}_{A,M,N}\\
&= \varphi,
\end{aligned}$$

em que $(*)$ é a igualdade $\lambda_X=\rho_X\sigma_{A,X}$, isto é, $\rho_X=\lambda_X\sigma^{-1}_{A,X}$, para $X=M,N$. As igualdades (3.5) e (3.1) podem ser vistas, respectivamente, em ([5], (3.22) e (3.14)). Logo, $\lambda_{M\otimes_A N}=\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N}$ e

$$F(M,\rho_M)\otimes_A F(N,\rho_N)=(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N})=(M\otimes_A N,\widehat{\lambda}_{M\otimes_A N})=F(M\otimes_A N,\rho_{M\otimes_A N}),$$

ou seja,

$$F(M,\rho_M)\otimes_A F(N,\rho_N)=F(M\otimes_A N,\rho_{M\otimes_A N}).$$

O funtor F é claramente um funtor monoidal estrito: $\xi_{M,N}=id_{(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N})}$ e $\phi:\mathbf{1}_{{}_A\mathcal{C}}\to F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}_A})$, ou seja, $\phi=id_{(A,m)}$, lembrando que $\mathbf{1}_{{}_A\mathcal{C}}=(A,m)=\mathbf{1}_{\mathcal{C}_A}$.

Prosseguimos mostrando a monoidalidade do funtor G, tendo em mente as monoidalidades de ${}_A\mathcal{C}$ e de $\mathcal{C}_A$. Temos que

$$(M,\lambda_M)\otimes_A(N,\lambda_N)=(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N})$$

e

$$G(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N})=(M\otimes_A N,\widehat{\rho}_{M\otimes_A N}),$$

em que $\widehat{\rho}_{M\otimes_A N} = \lambda_{M\otimes_A N}\sigma^{-1}_{A,M\otimes_A N}$. Também, $G(M,\lambda_M) = (M,\rho_M)$ e $G(N,\lambda_N) = (N,\rho_N)$, em que $\rho_X = \lambda_X\sigma^{-1}_{A,X}$ para $X = M,N$ e portanto, $\lambda_X = \rho_X\sigma_{A,X}$. Sendo $\mathcal{C}_A$ monoidal, segue que

$$(M,\rho_M)\otimes_A (N,\rho_N) = (M\otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}).$$

Portanto,

$$G(M,\lambda_M)\otimes_A G(N,\lambda_N) = (M,\rho_M)\otimes_A (N,\rho_N) = (M\otimes_A N,\rho_{M\otimes_A N}).$$

e

$$G((M,\lambda_M)\otimes_A (N,\lambda_N)) = G(M\otimes_A N,\lambda_{M\otimes_A N}) = (M\otimes_A N,\widehat{\rho}_{M\otimes_A N}).$$

Nosso objetivo é mostrarmos que $\rho_{M\otimes_A N} = \widehat{\rho}_{M\otimes_A N}$. Sabemos que $\rho_{M\otimes_A N}$ é o único morfismo tal que

$$\rho_{M\otimes_A N}(\pi_{M,N}\otimes id_A) = \phi = \pi_{M,N}(id_M\otimes\rho_N)a_{M,N,A},$$

veja (3.5) ou ([5], (3.22)). Se mostramos que $\widehat{\rho}_{M\otimes_A N}(\pi_{M,N}\otimes id_A) = \phi$, então $\rho_{M\otimes_A N} = \widehat{\rho}_{M\otimes_A N}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_{M\otimes_A N}(\pi_{M,N}\otimes id_A) &= \lambda_{M\otimes_A N}\sigma^{-1}_{A,M\otimes_A N}(\pi_{M,N}\otimes id_A)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\pi_{M,N})\sigma^{-1}_{A,M\otimes N}\\
&\overset{(3.8)}{=} \pi_{M,N}(\lambda_M\otimes id_N)a^{-1}_{A,M,N}\sigma^{-1}_{A,M\otimes N}\\
&= \pi_{M,N}(\rho_M\otimes id_N)(\sigma_{A,M}\otimes id_N)a^{-1}_{A,M,N}\sigma^{-1}_{A,M\otimes N}\\
&\overset{(2.4)}{=} \pi_{M,N}(\rho_M\otimes id_N)a^{-1}_{M,A,N}(id_M\otimes\sigma^{-1}_{A,N})a_{M,N,A}\\
&\overset{(3.1)}{=} \pi_{M,N}(id_M\otimes\lambda_N)(id_M\otimes\sigma^{-1}_{A,N})a_{M,N,A}\\
&= \pi_{M,N}(id_M\otimes\rho_N)a_{M,N,A}\\
&= \phi.
\end{aligned}$$

As igualdades (3.8) e (3.1) podem ser vistas, respectivamente, em ([5], (3.33) e (3.14)). Assim, $\rho_{M\otimes_A N} = \widehat{\rho}_{M\otimes_A N}$ e da mesma forma que anteriormente, G é um funtor monoidal estrito. Já tendo mostrado que $F\circ G = Id_{{}_A\mathcal{C}}$ e que $G\circ F = Id_{\mathcal{C}_A}$ e sendo óbvio que $\theta_1 = ID_{Id_{{}_A\mathcal{C}}}$ e $\theta_2 = ID_{Id_{\mathcal{C}_A}}$, segue o resultado. ■

Colorário 3.9. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e A uma álgebra comutativa em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Então ${}_A\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{Z}(\mathcal{C})_A$ são categorias monoidalmente isomorfas.*

Terminamos essa seção mostrando um resultado em que retiramos a hipótese trançada de uma categoria monoidal $\mathcal{C}$ e, por conseguinte, a comutatividade das álgebras em $\mathcal{C}$. Com isso, as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_A$ não "herdam" a monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$.

Teorema 3.10. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, (A, m, u) e (A', m', u') álgebras isomorfas em $\mathcal{C}$. Então ${}_A\mathcal{C}$ e ${}_{A'}\mathcal{C}$ são categorias isomorfas assim como o são $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_{A'}$.*

Demonstração: Como A e A' são isomorfas, existe um isomorfismo de álgebras, $\psi : A' \to A$. Primeiramente, mostremos que a estrutura de A'-módulo à esquerda pode ser definida a partir da estrutura de A-módulo à esquerda via o isomorfismo ψ.

Seja (M, λ_M) um objeto em ${}_A\mathcal{C}$. Definimos $\widehat{\lambda}_M = \lambda_M(\psi \otimes id_M)$ e mostremos que $(M, \widehat{\lambda}_M)$ é um objeto em ${}_{A'}\mathcal{C}$. De fato, verifiquemos a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A' \otimes A') \otimes M \arrow[r, "a_{A',A',M}"] \arrow[d, "m' \otimes id_M"'] & A' \otimes (A' \otimes M) \arrow[r, "id_{A'} \otimes \widehat{\lambda}_M"] & A' \otimes M \arrow[d, "\widehat{\lambda}_M"] \\
A' \otimes M \arrow[rr, "\widehat{\lambda}_M"'] & & M.
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_M(id_{A'} \otimes \widehat{\lambda}_M)a_{A',A',M} &= \lambda_M(\psi \otimes id_M)(id_{A'} \otimes \lambda_M)(id_{A'} \otimes (\psi \otimes id_M))a_{A',A',M} \\
&\overset{(a)}{=} \lambda_M(\psi \otimes id_M)(id_{A'} \otimes \lambda_M)a_{A',A,M}((id_{A'} \otimes \psi) \otimes id_M) \\
&= \lambda_M(id_A \otimes \lambda_M)(\psi \otimes id_{A \otimes M})a_{A',A,M}((id_{A'} \otimes \psi) \otimes id_M) \\
&\overset{(a)}{=} \lambda_M(id_A \otimes \lambda_M)a_{A,A,M}((\psi \otimes id_A) \otimes id_M)((id_{A'} \otimes \psi) \otimes id_M) \\
&\overset{(2.13)}{=} \lambda_M(m \otimes id_M)((\psi \otimes id_A) \otimes id_M)((id_{A'} \otimes \psi) \otimes id_M) \\
&= \lambda_M(m \otimes id_M)((\psi \otimes \psi) \otimes id_M) \\
&= \lambda_M((m\,(\psi \otimes \psi)) \otimes id_M) \\
&\overset{(2.12)}{=} \lambda_M((\psi\, m') \otimes id_M) \\
&= \lambda_M(\psi \otimes id_M)(m' \otimes id_M) \\
&= \widehat{\lambda}_M(m' \otimes id_M),
\end{aligned}$$

em que (a) segue pela naturalidade de a. A seguir, verifiquemos a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes M \arrow[rr, "u' \otimes id_M"] \arrow[dr, "l_M"'] & & A' \otimes M \arrow[dl, "\widehat{\lambda}_M"] \\
& M. &
\end{tikzcd}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_M(u' \otimes id_M) &= \lambda_M(\psi \otimes id_M)(u' \otimes id_M) \\
&= \lambda_M((\psi u') \otimes id_M) \\
&\overset{(2.12)}{=} \lambda_M(u \otimes id_M), \\
&\overset{(2.13)}{=} l_M.
\end{aligned}$$

Observamos que se $f : M \to N$ é um morfismo em ${}_A\mathcal{C}$, isto é,

$$\lambda_N(id_A \otimes f) = f\lambda_M,$$

então f é também um morfismo em ${}_{A'}\mathcal{C}$. De fato,

$$\begin{aligned} f\widehat{\lambda}_M &= f\lambda_M(\psi \otimes id_M) \\ &= \lambda_N(id_A \otimes f)(\psi \otimes id_M) \\ &= \lambda_N(\psi \otimes id_N)(id_{A'} \otimes f) \\ &= \widehat{\lambda}_N(id_{A'} \otimes f). \end{aligned}$$

Da mesma forma, se (M, λ'_M) é um objeto em ${}_{A'}\mathcal{C}$ então $(M, \widehat{\lambda'}_M)$ é um objeto ${}_A\mathcal{C}$ com $\widehat{\lambda'}_M = \lambda'_M(\psi^{-1} \otimes id_M)$. O mesmo para os morfismos.

Assim, é claro que F e G definidos abaixo são funtores. Sejam

$$\begin{array}{rccc} F: & {}_A\mathcal{C} & \longrightarrow & {}_{A'}\mathcal{C} \\ & (M, \lambda_M) & \longmapsto & (M, \widehat{\lambda}_M) \\ & (f, \lambda_M, \lambda_N) & \longmapsto & (f, \widehat{\lambda}_M, \widehat{\lambda}_N), \end{array}$$

em que $\widehat{\lambda}_X = \lambda_X \circ (\psi \otimes id_X)$, para $X = M, N$ e

$$\begin{array}{rccc} G: & {}_{A'}\mathcal{C} & \longrightarrow & {}_A\mathcal{C} \\ & (M, \lambda'_M) & \longmapsto & (M, \widehat{\lambda'}_M) \\ & (f, \lambda'_M, \lambda'_N) & \longmapsto & (f, \widehat{\lambda'}_M, \widehat{\lambda'}_N), \end{array}$$

em que $\widehat{\lambda'}_X = \lambda'_X(\psi^{-1} \otimes id_X)$, para $X = M, N$. Temos que

$$G(F(M, \lambda_M)) = G(M, \widehat{\lambda}_M) = (M, \widehat{\widehat{\lambda}}_M)$$

e

$$F(G(M, \lambda'_M)) = F(M, \widehat{\lambda'}_M) = (M, \widehat{\widehat{\lambda'}}_M).$$

Das definições de cada funtor, obtemos

$$\widehat{\widehat{\lambda}}_M = \widehat{\lambda}_M(\psi^{-1} \otimes id_M) = \lambda_M(\psi \otimes id_M)(\psi^{-1} \otimes id_M) = \lambda_M$$

e

$$\widehat{\widehat{\lambda'}}_M = \widehat{\lambda'}_M(\psi \otimes id_M) = \lambda'_M(\psi^{-1} \otimes id_M)(\psi \otimes id_M) = \lambda'_M.$$

Assim, $G \circ F = Id_{{}_A\mathcal{C}}$ e $F \circ G = Id_{{}_{A'}\mathcal{C}}$ e portanto, as categorias ${}_A\mathcal{C}$ e ${}_{A'}\mathcal{C}$ são isomorfas. ■

Colorário 3.11. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal, A e A' álgebras em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ isomorfas. Então*

(i) *${}_A\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ e ${}_{A'}\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ são categorias isomorfas.*

(ii) *$\mathcal{Z}(\mathcal{C})_A$ e $\mathcal{Z}(\mathcal{C})_{A'}$ são categorias isomorfas.*

3.2 ISOMORFISMO ENTRE AS CATEGORIAS ${}_A\mathcal{C}_B$ E ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$

Nessa seção, $(\mathcal{C}, \sigma)$ é uma categoria monoidal (estrita) trançada, A e B são álgebras comutativas em $\mathcal{C}$. O objetivo dessa seção é estabelecer um isomorfismo entre as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$. A fim de obtermos os funtores $F : {}_A\mathcal{C}_B \to {}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ e $G : {}_{A\otimes B}\mathcal{C} \to {}_A\mathcal{C}_B$ é necessário que $A \otimes B$ seja uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$, além do fato de que B deve pertencer ao chamado centro de Müger de $\mathcal{C}$. O isomorfismo supracitado é de fundamental importância para a construção de nossa próxima seção, onde iremos discutir a monoidalidade da categoria ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$. A primeira definição a seguir é encontrada em [10], a mesma é exigida na primeira proposição dessa seção a fim de que $A \otimes B$ seja comutativa. A segunda definição é encontrada em [20] e é exigida no teorema em que provamos o isomorfismo citado.

Definição 3.12. Dois objetos X, Y numa categoria monoidal trançada $(\mathcal{C}, \sigma)$ são ditos *centralizadores um do outro* se $\sigma_{X,Y}\sigma_{Y,X} = id_{Y\otimes X}$.

Definição 3.13. O *centro de Müger* da categoria trançada $(\mathcal{C}, \sigma)$ é definido como

$$\mathcal{Z}_2(\mathcal{C}) = \{X \in \mathcal{C} : \sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = id_{X\otimes Y},\ \forall Y \in \mathcal{C}\}.$$

A cerca da definição acima observamos o fato seguinte.

Observação 3.14. Seja $X \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$. Então $\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$, $\forall Y \in \mathcal{C}$. Mostremos que $\sigma_{X,Y}\sigma_{Y,X} = id_{Y\otimes X}$, $\forall Y \in \mathcal{C}$.

De fato, como $\sigma_{X,Y}$ é um isomorfismo, então $\sigma_{X,Y}\sigma^{-1}_{X,Y} = id_{Y\otimes X}$ e $\sigma^{-1}_{X,Y}\sigma_{X,Y} = id_{X\otimes Y}$. Assim, para todo $Y \in \mathcal{C}$, temos

$$\sigma_{Y,X}\sigma_{X,Y}\sigma^{-1}_{X,Y} = id_{X\otimes Y}\sigma^{-1}_{X,Y},$$

ou seja, $\sigma_{Y,X} = \sigma^{-1}_{X,Y}$ e isso implica que $\sigma_{X,Y}\sigma_{Y,X} = id_{Y\otimes X}$.

Proposição 3.15. *Seja $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal trançada estrita. Se (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) são álgebras comutativas em $\mathcal{C}$ tais que $\sigma_{B,A}\sigma_{A,B} = id_{A\otimes B}$, então $A \otimes B$ é uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Sabemos, de acordo com a Proposição 2.66, que $A \otimes B$ é uma álgebra. Portanto, precisamos mostrar apenas a comutatividade de $A \otimes B$, ou seja, a igualdade $m_{A\otimes B} = m_{A\otimes B}\,\sigma_{A\otimes B, A\otimes B}$.

Lembremos que $m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B)$ e $u_{A\otimes B} = u_A \otimes u_B$. Além disso, pelas equações da trança (2.5) e (2.6), temos

$$\begin{aligned}
\sigma_{A\otimes B,A\otimes B} &= (\sigma_{A,A\otimes B}\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,A\otimes B})\\
&= (((id_A\otimes\sigma_{A,B})(\sigma_{A,A}\otimes id_B))\otimes id_B)(id_A\otimes((id_A\otimes\sigma_{B,B})(\sigma_{B,A}\otimes id_B)))\\
&= (id_A\otimes\sigma_{A,B}\otimes id_B)(\sigma_{A,A}\otimes id_B\otimes id_B)(id_A\otimes id_A\otimes\sigma_{B,B})\\
&\quad (id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
& m_{A\otimes B}\,\sigma_{A\otimes B,A\otimes B}\\
&= (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{A,B}\otimes id_B)(\sigma_{A,A}\otimes id_B\otimes id_B)\\
&\quad (id_A\otimes id_A\otimes\sigma_{B,B})(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)\\
&= (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes(\sigma_{B,A}\sigma_{A,B})\otimes id_B)(\sigma_{A,A}\otimes id_B\otimes id_B)(id_A\otimes id_A\otimes\sigma_{B,B})\\
&\quad (id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)\\
&= (m_A\otimes m_B)(\sigma_{A,A}\otimes id_B\otimes id_B)(id_A\otimes id_A\otimes\sigma_{B,B})(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)\\
&= (m_A\otimes m_B)(\sigma_{A,A}\otimes\sigma_{B,B})(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)\\
&= ((m_A\,\sigma_{A,A})\otimes(m_B\,\sigma_{B,B}))(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)\\
&\overset{(2.25)}{=} (m_A\otimes m_B)(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B)\\
&= m_{A\otimes B}.
\end{aligned}$$

Na 3ª igualdade usamos a hipótese de que $\sigma_{B,A}\sigma_{A,B} = id_{A\otimes B}$. ■

Teorema 3.16. *Seja $(\mathcal{C},\sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada. Sejam A, B álgebras comutativas em $\mathcal{C}$ tal que $B\in\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$. Então ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ são categorias isomorfas.*

Demonstração: Antes de iniciarmos a demonstração, notemos que o fato de $B\in\mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$, nos diz pela Observação 3.14 que $\sigma_{B,X}\sigma_{X,B} = id_{X\otimes B}$, para todo $X\in\mathcal{C}$. Em particular, $\sigma_{B,A}\sigma_{A,B} = id_{A\otimes B}$ e como A e B são comutativas, segue que $A\otimes B$ é uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$. Vamos usar tal comutatividade nessa prova.

Seja (M,λ_M,ρ_M) um objeto em ${}_A\mathcal{C}_B$, em que $\lambda_M : A\otimes M\to M$ e $\rho_M : M\otimes B\to M$. Podemos definir $\overline{\lambda}_M = \rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M})$. Mostremos primeiramente que $(M,\overline{\lambda}_M)$ é um $A\otimes B$-módulo à esquerda e para isso, devemos verificar que

$$\overline{\lambda}_M(id_{A\otimes B}\otimes\overline{\lambda}_M) = \overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B}\otimes id_M) \text{ e } \overline{\lambda}_M(u_{A\otimes B}\otimes id_M) = id_M.$$

Vamos à segunda igualdade.

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_M(u_{A\otimes B}\otimes id_M) &= \rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M})(u_A\otimes u_B\otimes id_M)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(u_A\otimes id_M\otimes u_B)(id_{\mathbf{1}}\otimes\sigma_{\mathbf{1},M})\\
&\overset{(2.14)}{=} \rho_M(id_M\otimes u_B)\\
&= id_M,
\end{aligned}$$

em que na penúltima igualdade usamos também o Corolário 2.53. Agora, procedemos à prova da primeira igualdade. Temos que

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_M(id_{A\otimes B}\otimes\overline{\lambda}_M)\\
&=\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M})(id_A\otimes id_B\otimes\rho_M)(id_A\otimes id_B\otimes\lambda_M\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.20),(\mathrm{nat})}{=}\lambda_M(id_A\otimes\rho_M)(id_A\otimes\rho_M\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M\otimes B})(id_A\otimes id_B\otimes\lambda_M\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.17)}{=}\lambda_M(id_A\otimes\rho_M)(id_A\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M\otimes B})(id_A\otimes id_B\otimes\lambda_M\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.20),(2.6)}{=}\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes id_M\otimes\sigma_{B,B})(id_A\otimes\sigma_{B,M}\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_B\otimes\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.25),(\mathrm{nat})}{=}\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes\lambda_M\otimes id_B\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes\sigma_{B,A\otimes M}\otimes id_B)(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&=\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes\lambda_M\otimes id_B)(id_{A\otimes A}\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes\sigma_{B,A\otimes M}\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.14)}{=}\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(m_A\otimes id_M\otimes id_B)(id_{A\otimes A}\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes\sigma_{B,A\otimes M}\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.6)}{=}\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(m_A\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M}\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_M\otimes id_B)(id_A\otimes id_B\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M})\\
&=\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(m_A\otimes id_M\otimes m_B)(id_A\otimes id_A\otimes\sigma_{B,M}\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes id_A\otimes id_B\otimes\sigma_{B,M})(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B\otimes id_M)\\
&\overset{(2.5)}{=}\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(m_A\otimes id_M\otimes m_B)(id_{A\otimes A}\otimes\sigma_{B\otimes B,M})\\
&(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B\otimes id_M)\\
&\overset{(\mathrm{nat})}{=}\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M})(m_A\otimes m_B\otimes id_M)(id_A\otimes\sigma_{B,A}\otimes id_B\otimes id_M)\\
&=\overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B}\otimes id_M).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(M,\overline{\lambda}_M)$ é um $A\otimes B$-módulo à esquerda.

Agora, seja $(M,\overline{\lambda}_M)$ um objeto em ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$. Assim, $\overline{\lambda}_M : A\otimes B\otimes M\to M$ e, dessa forma, podemos definir os morfismos

$$\lambda_M=\overline{\lambda}_M(id_A\otimes u_B\otimes id_M)\text{ e }\rho_M=\overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M\otimes u_A\otimes id_B).$$

Para o que segue, lembremos que quando $\mathcal{C}$ é estrita, segue que $X\otimes \mathbf{1} = X = \mathbf{1}\otimes X$ e, por conseguinte, $id_{\mathbf{1}\otimes X} = id_X = id_{X\otimes \mathbf{1}}$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Assim como $f\otimes id_{\mathbf{1}} = f = id_{\mathbf{1}}\otimes f$, para todo morfismo f em $\mathcal{C}$, vide Observação 2.43.

Mostremos que (M, λ_M, ρ_M) é um objeto na categoria ${}_A\mathcal{C}_B$. Comecemos provando que $\lambda_M(id_A\otimes \rho_M) = \rho_M(\lambda_M\otimes id_B)$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&\rho_M(\lambda_M\otimes id_B)\\
&= \overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M\otimes u_A\otimes id_B)(\overline{\lambda}_M\otimes id_B)(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_B)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \overline{\lambda}_M(u_A\otimes id_B\otimes id_M)\sigma_{M,B}(\overline{\lambda}_M\otimes id_B)(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_B)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \overline{\lambda}_M(u_A\otimes id_B\otimes id_M)(id_{\mathbf{1}\otimes B}\otimes \overline{\lambda}_M)\sigma_{A\otimes B\otimes M,B}(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_B)\\
&= \overline{\lambda}_M(id_{A\otimes B}\otimes \overline{\lambda}_M)(u_A\otimes id_B\otimes id_{A\otimes B\otimes M})\sigma_{A\otimes B\otimes M,\mathbf{1}\otimes B}\\
&(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_B)\\
&\overset{(2.14),(\text{nat})}{=} \overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B}\otimes id_M)\sigma_{A\otimes B\otimes M,A\otimes B}(id_{A\otimes B\otimes M}\otimes u_A\otimes id_B)\\
&(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_{\mathbf{1}\otimes B})\\
&\overset{(2.5)}{=} \overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B}\otimes id_M)(\sigma_{A\otimes B,A\otimes B}\otimes id_M)(id_{A\otimes B}\otimes \sigma_{M,A\otimes B})\\
&(id_{A\otimes B\otimes M}\otimes u_A\otimes id_B)(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_{\mathbf{1}\otimes B})\\
&\overset{(2.25)}{=} \overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B}\otimes id_M)(id_{A\otimes B}\otimes \sigma_{M,A\otimes B})(id_A\otimes u_B\otimes id_M\otimes id_{A\otimes B})\\
&(id_A\otimes id_{\mathbf{1}\otimes M}\otimes u_A\otimes id_B)\\
&\overset{(2.14)}{=} \overline{\lambda}_M(id_{A\otimes B}\otimes \overline{\lambda}_M)(id_A\otimes u_B\otimes id_{A\otimes B}\otimes id_M)(id_{A\otimes \mathbf{1}}\otimes \sigma_{M,A\otimes B})\\
&(id_A\otimes id_M\otimes u_A\otimes id_B)\\
&= \overline{\lambda}_M(id_A\otimes u_B\otimes id_M)(id_{\mathbf{1}\otimes A}\otimes \overline{\lambda}_M)(id_A\otimes \sigma_{M,A\otimes B})(id_A\otimes id_M\otimes u_A\otimes id_B)\\
&= \lambda_M(id_A\otimes \rho_M).
\end{aligned}
$$

A seguir mostremos que (M, λ_M) é um A-módulo à esquerda. Procedemos verificando a igualdade $\lambda_M(u_A\otimes id_M) = id_M$.

$$
\begin{aligned}
\lambda_M(u_A\otimes id_M) &= \overline{\lambda}_M(id_A\otimes u_B\otimes id_M)(u_A\otimes id_{\mathbf{1}\otimes M})\\
&= \overline{\lambda}_M(u_A\otimes u_B\otimes id_M)\\
&= \overline{\lambda}_M(u_{A\otimes B}\otimes id_M)\\
&\overset{(2.14)}{=} id_M.
\end{aligned}
$$

Agora, verificamos a 2ª igualdade da definição de um módulo à esquerda, nesse caso, sobre A. Temos que

$$
\begin{aligned}
&\lambda_M(id_A \otimes \lambda_M)\\
&= \overline{\lambda}_M(id_A \otimes u_B \otimes id_M)(id_A \otimes \overline{\lambda}_M)(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&= \overline{\lambda}_M(id_A \otimes u_B \otimes id_M)(id_{A\otimes \mathbf{1}} \otimes \overline{\lambda}_M)(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&= \overline{\lambda}_M(id_{A\otimes B} \otimes \overline{\lambda}_M)(id_A \otimes u_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&\overset{(2.14)}{=} \overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B} \otimes id_M)(id_A \otimes u_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&= \overline{\lambda}_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes u_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})\\
&(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_{A\otimes A} \otimes u_B \otimes id_{B\otimes M})(id_A \otimes \sigma_{\mathbf{1},A} \otimes id_{B\otimes M})\\
&(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&\overset{\text{Cor.2.53}}{=} \overline{\lambda}_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_{A\otimes A} \otimes u_B \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes id_A \otimes id_{B\otimes M})\\
&(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&\overset{(2.11)}{=} \overline{\lambda}_M(m_A \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes id_A \otimes u_B \otimes id_M)\\
&= \overline{\lambda}_M(id_A \otimes u_B \otimes id_M)(m_A \otimes id_{\mathbf{1}\otimes M})\\
&= \lambda_M(m_A \otimes id_M).
\end{aligned}
$$

Por último, mostremos que M é um B-módulo à direita, ou seja, devemos verificar que

$$\rho_M(\rho_M \otimes id_B) = \rho_M(id_M \otimes m_B) \text{ e } \rho_M(id_M \otimes u_B) = id_M.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
&\rho_M(\rho_M \otimes id_B)\\
&= \overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B)(\overline{\lambda}_M \otimes id_B)(\sigma_{M,A\otimes B} \otimes id_B)\\
&(id_M \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_B)\\
&= \overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(\overline{\lambda}_M \otimes id_{A\otimes B})(id_{A\otimes B\otimes M} \otimes u_A \otimes id_B)(\sigma_{M,A\otimes B} \otimes id_B)\\
&(id_M \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_B)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(id_{A\otimes B} \otimes \overline{\lambda}_M)\sigma_{A\otimes B\otimes M,A\otimes B}(id_{A\otimes B\otimes M} \otimes u_A \otimes id_B)(\sigma_{M,A\otimes B} \otimes id_B)\\
&(id_M \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_B)\\
&\overset{(2.14),\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(m_{A\otimes B} \otimes id_M)(u_A \otimes id_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})\sigma_{A\otimes B\otimes M,B}(\sigma_{M,A\otimes B} \otimes id_B)\\
&(id_M \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_B)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_M)(u_A \otimes id_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})\\
&(id_B \otimes \sigma_{M,A\otimes B})\sigma_{M\otimes A\otimes B,B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_B)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(u_A \otimes id_A \otimes id_{B\otimes B} \otimes id_M)(id_{\mathbf{1}} \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_M)\\
&(id_B \otimes \sigma_{M,A\otimes B})(id_B \otimes id_M \otimes u_A \otimes id_B)\sigma_{M\otimes B,B}\\
&\overset{(2.11)}{=} \overline{\lambda}_M(id_A \otimes m_B \otimes id_M)(\sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_M)(id_B \otimes \sigma_{M,A\otimes B})\\
&(id_B \otimes id_M \otimes u_A \otimes id_B)\sigma_{M,A\otimes B}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(id_A \otimes m_B \otimes id_M)(\sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_M)(id_B \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_M)\\
&(id_B \otimes \sigma_{M,B})\sigma_{M\otimes B,B}\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(id_A \otimes m_B \otimes id_M)(u_A \otimes id_B \otimes id_B \otimes id_M)(\sigma_{B,\mathbf{1}} \otimes id_B \otimes id_M)\\
&(id_B \otimes \sigma_{M,B})\sigma_{M\otimes B,B}\\
&\overset{\text{Cor.2.53}}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)(id_{\mathbf{1}} \otimes m_B \otimes id_M)(id_B \otimes \sigma_{M,B})\sigma_{M\otimes B,B}\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)(m_B \otimes id_M)\sigma_{B\otimes M,B}(\sigma_{M,B} \otimes id_B)\\
&\overset{(2.5)}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)(m_B \otimes id_M)(\sigma_{B,B} \otimes id_M)(id_B \otimes \sigma_{M,B})(\sigma_{M,B} \otimes id_B)\\
&\overset{(2.6)}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)(m_B \otimes id_M)(\sigma_{B,B} \otimes id_M)\sigma_{M,B\otimes B}\\
&\overset{(2.25)}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)(m_B \otimes id_M)\sigma_{M,B\otimes B}\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)\sigma_{M,B}(id_M \otimes m_B)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B)(id_M \otimes m_B)\\
&= \rho_M(id_M \otimes m_B)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\rho_M(id_M \otimes u_B) &= \overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B)(id_{M\otimes\mathbf{1}} \otimes u_B)\\
&= \overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes u_B)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \overline{\lambda}_M(u_A \otimes u_B \otimes id_M)\sigma_{M,\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}}\\
&= \overline{\lambda}_M(u_{A\otimes B} \otimes id_M)\\
&\overset{(2.14)}{=} id_M.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que (M, λ_M, ρ_M) é um objeto na categoria ${}_A\mathcal{C}_B$. Uma vez estudada a questão dos objetos, vamos agora abordar a questão dos morfismos.

Seja $f : M \to N$ um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_B$, isto é, valem as igualdades

$$\lambda_N(id_A \otimes f) \overset{\text{(a)}}{=} f\lambda_M \text{ e } \rho_N(f \otimes id_B) \overset{\text{(b)}}{=} f\rho_M.$$

Então f é também um morfismo em ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\overline{\lambda}_N(id_{A\otimes B} \otimes f) &= \rho_N(\lambda_N \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,N})(id_A \otimes id_B \otimes f)\\
&= \rho_N(\lambda_N \otimes id_B)(id_A \otimes f \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{\text{(a)}}{=} \rho_N(f \otimes id_B)(\lambda_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{\text{(b)}}{=} f\rho_M(\lambda_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&= f\overline{\lambda}_M.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, se $f : M \to N$ é um morfismo em ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ então f é também um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_B$. Mostremos (a) e (b). Para (a), temos

$$\begin{aligned}
\lambda_N(id_A\otimes f) &= \overline{\lambda}_N(id_A\otimes u_B\otimes id_N)(id_{A\otimes\mathbf{1}}\otimes f)\\
&= \overline{\lambda}_N(id_A\otimes id_B\otimes f)(id_A\otimes u_B\otimes id_M)\\
&= \overline{\lambda}_N(id_{A\otimes B}\otimes f)(id_A\otimes u_B\otimes id_M)\\
&\overset{(2.15)}{=} f\overline{\lambda}_M(id_A\otimes u_B\otimes id_M)\\
&= f\lambda_M
\end{aligned}$$

e, para (b), temos

$$\begin{aligned}
\rho_N(f\otimes id_B) &= \overline{\lambda}_N\sigma_{N,A\otimes B}(id_N\otimes u_A\otimes id_B)(f\otimes id_{\mathbf{1}\otimes B})\\
&= \overline{\lambda}_N\sigma_{N,A\otimes B}(f\otimes id_A\otimes id_B)(id_M\otimes u_A\otimes id_B)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \overline{\lambda}_N(id_A\otimes id_B\otimes f)\sigma_{M,A\otimes B}(id_M\otimes u_A\otimes id_B)\\
&= \overline{\lambda}_N(id_{A\otimes B}\otimes f)\sigma_{M,A\otimes B}(id_M\otimes u_A\otimes id_B)\\
&\overset{(2.15)}{=} f\overline{\lambda}_M\sigma_{M,A\otimes B}(id_M\otimes u_A\otimes id_B)\\
&= f\rho_M.
\end{aligned}$$

O próximo passo é mostrarmos que as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ são isomorfas. Devido ao que já desenvolvemos nessa prova até o momento, podemos definir

$$\begin{array}{cccc}
F: & {}_A\mathcal{C}_B & \longrightarrow & {}_{A\otimes B}\mathcal{C}\\
 & (M,\lambda_M,\rho_M) & \longmapsto & (M,\overline{\lambda}_M)\\
 & f & \longmapsto & f,
\end{array}$$

em que $\overline{\lambda}_X=\rho_X(\lambda_X\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,X})$, para $X=M,N$ e $f:M\to N$ é um morfismo qualquer em ${}_A\mathcal{C}_B$. Claramente F é um funtor, por definição. Da mesma forma, definimos o funtor G

$$\begin{array}{cccc}
G: & {}_{A\otimes B}\mathcal{C} & \longrightarrow & {}_A\mathcal{C}_B\\
 & (M,\lambda'_M) & \longmapsto & (M,\widehat{\lambda}_M,\widehat{\rho}_M)\\
 & f & \longmapsto & f
\end{array}$$

em que $\widehat{\lambda}_X=\lambda'_X(id_A\otimes u_B\otimes id_X)$ e $\widehat{\rho}_X=\lambda'_X\sigma_{X,A\otimes B}(id_X\otimes u_A\otimes id_B)$, para $X=M,N$ e $f:M\to N$ é um morfismo qualquer em ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$.

Temos que $G(F(M,\lambda_M,\rho_M))=G(M,\overline{\lambda}_M)=(M,\widehat{\lambda}_M,\widehat{\rho}_M)$. Mostremos que $\lambda_M=\widehat{\lambda}_M$ e que $\rho_M=\widehat{\rho}_M$. De fato,

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}_M=\overline{\lambda}_M(id_A\otimes u_B\otimes id_M) &= \rho_M(\lambda_M\otimes id_B)(id_A\otimes\sigma_{B,M})(id_A\otimes u_B\otimes id_M)\\
&\overset{(2.20),(\text{nat})}{=} \lambda_M(id_A\otimes\rho_M)(id_A\otimes id_M\otimes u_B)(id_A\otimes\sigma_{\mathbf{1},M})\\
&\overset{\text{Cor.}2.53}{=} \lambda_M(id_A\otimes\rho_M)(id_A\otimes id_M\otimes u_B)(id_A\otimes id_M)\\
&= \lambda_M(id_A\otimes\rho_M)(id_A\otimes id_M\otimes u_B)\\
&\overset{(2.17)}{=} \lambda_M(id_A\otimes id_M)=\lambda_M
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\widehat{\rho}_M = \overline{\lambda}_M \sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B)\\
&= \rho_M(\lambda_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B)\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \rho_M(\lambda_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})(u_A \otimes id_B \otimes id_M)\sigma_{M,B}\\
&= \rho_M(\lambda_M \otimes id_B)(u_A \otimes id_M \otimes id_B)(id_{\mathbf{1}} \otimes \sigma_{B,M})\sigma_{M,B}\\
&= \rho_M(\lambda_M \otimes id_B)(u_A \otimes id_M \otimes id_B)\sigma_{B,M}\sigma_{M,B}\\
&\overset{(2.14)}{=} \rho_M(id_M \otimes id_B)\sigma_{B,M}\sigma_{M,B}\\
&= \rho_M \sigma_{B,M}\sigma_{M,B}\\
&= \rho_M,
\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos que $B \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$, isto é, $\sigma_{B,M}\sigma_{M,B} = id_{M\otimes B}$. Logo, $G(F(M, \lambda_M, \rho_M)) = (M, \lambda_M, \rho_M)$.

Por outro lado,

$$F(G(M, \lambda'_M)) = F(M, \widehat{\lambda}_M, \widehat{\rho}_M) = (M, \overline{\lambda}_M)$$

e devemos provar que $\lambda'_M = \overline{\lambda}_M$. Vamos à verificação. Temos que

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_M = \widehat{\rho}_M(\widehat{\lambda}_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&= \lambda'_M \sigma_{M,A\otimes B}(id_M \otimes u_A \otimes id_B)(\lambda'_M \otimes id_B)(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \lambda'_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)\sigma_{M,B}(\lambda'_M \otimes id_B)(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \lambda'_M(u_A \otimes id_B \otimes id_M)(id_{\mathbf{1}\otimes B} \otimes \lambda'_M)\sigma_{A\otimes B\otimes M,B}(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&= \lambda'_M(id_{A\otimes B} \otimes \lambda'_M)(u_A \otimes id_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})\sigma_{A\otimes B\otimes M,B}\\
&(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&= \lambda'_M(id_{A\otimes B} \otimes \lambda'_M)(u_A \otimes id_B \otimes id_{A\otimes B\otimes M})\sigma_{A\otimes B\otimes M,\mathbf{1}\otimes B}\\
&(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.14),(\text{nat})}{=} \lambda'_M(m_{A\otimes B} \otimes id_M)\sigma_{A\otimes B\otimes M,A\otimes B}(id_{A\otimes B\otimes M} \otimes u_A \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_B)(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.5)}{=} \lambda'_M(m_{A\otimes B} \otimes id_M)(\sigma_{A\otimes B,A\otimes B} \otimes id_M)(id_{A\otimes B} \otimes \sigma_{M,A\otimes B})\\
&(id_{A\otimes B\otimes M} \otimes u_A \otimes id_B)(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes id_{\mathbf{1}\otimes B})(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{(2.25)}{=} \lambda'_M(m_{A\otimes B} \otimes id_M)(id_{A\otimes B} \otimes \sigma_{M,A\otimes B})(id_A \otimes u_B \otimes id_M \otimes u_A \otimes id_B)\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,M})\\
&\overset{(\text{nat})}{=} \lambda'_M(m_{A\otimes B} \otimes id_M)(id_A \otimes u_B \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_M)(id_{A\otimes\mathbf{1}} \otimes \sigma_{M,B})\\
&(id_A \otimes \sigma_{B,M})
\end{aligned}$$

$= \lambda'_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_A \otimes \sigma_{B,A} \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes u_B \otimes u_A \otimes id_B \otimes id_M)$
$(id_A \otimes \sigma_{M,B})(id_A \otimes \sigma_{B,M})$
$\overset{(\text{nat})}{=} \lambda'_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_A \otimes u_A \otimes u_B \otimes id_B \otimes id_M)$
$(id_A \otimes \sigma_{\mathbf{1},\mathbf{1}} \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes \sigma_{M,B})(id_A \otimes \sigma_{B,M})$
$= \lambda'_M(m_A \otimes m_B \otimes id_M)(id_A \otimes u_A \otimes u_B \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes (\sigma_{M,B}\sigma_{B,M}))$
$\overset{(2.11)}{=} \lambda'_M(id_A \otimes id_B \otimes id_M)(id_A \otimes (\sigma_{M,B}\sigma_{B,M}))$
$= \lambda'_M.$

em que na última igualdade usamos que $B \in \mathcal{Z}_2(\mathcal{C})$, isto é, $\sigma_{M,B}\sigma_{B,M} = id_{B\otimes M}$. Do exposto acima, está provado que ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ e ${}_A\mathcal{C}_B$ são categorias isomorfas. ∎

3.3 A MONOIDALIDADE DA CATEGORIA ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$

Nosso propósito nessa seção é, usando o isomorfismo estabelecido na seção anterior, induzir em ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ a monoidalidade já conhecida de ${}_A\mathcal{C}_A$. Na seção anterior, fornecemos condições necessárias para que as categorias ${}_A\mathcal{C}_B$ e ${}_{A\otimes B}\mathcal{C}$ fossem isomorfas, uma delas é que as álgebras fossem comutativas e daí, a necessidade de considerarmos categorias monoidais trançadas. Nessa seção, temos o caso particular em que $A = B$ e preservamos a comutatividade de A, dado que aplicaremos o Teorema 3.16 e iniciamos essa seção com um corolário imediato desse teorema.

Colorário 3.17. *Seja $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada. Seja A uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$ tal que $A \in Z_2(\mathcal{C})$. Então ${}_A\mathcal{C}_A$ e ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ são categorias isomorfas.*

Demonstração: A prova segue diretamente Teorema 3.16, sendo um caso particular. Escrevemos os funtores F e G, pois ambos são importantes para o desenvolvimento dos nossos resultados a seguir. Temos que $F : {}_A\mathcal{C}_A \to {}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ e $G : {}_{A\otimes A}\mathcal{C} \to {}_A\mathcal{C}_A$ são isomorfismos de categorias dados por

$$F(M, \rho_M, \lambda_M) = (M, \overline{\lambda}_M),\ \overline{\lambda}_M = \rho_M(\lambda_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M})$$

e

$$G(M, \lambda) = (M, \lambda_M, \rho_M),\ \rho_M = \lambda\sigma_{M,A\otimes A}(id_M \otimes u_A \otimes id_A) \text{ e } \lambda_M = \lambda(id_A \otimes u_A \otimes id_M).$$

Os morfismos, como já mostramos no Teorema 3.16, ficam fixados. ∎

Teorema 3.18. *Seja $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal estrita trançada. Seja A uma álgebra comutativa em $\mathcal{C}$ tal que $A \in Z_2(\mathcal{C})$. Então a categoria ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ é monoidal.*

Demonstração: Definimos

$$\overline{\otimes} : {}_{A\otimes A}\mathcal{C} \times {}_{A\otimes A}\mathcal{C} \xrightarrow{G\times G} {}_A\mathcal{C}_A \times {}_A\mathcal{C}_A \xrightarrow{\otimes_A} {}_A\mathcal{C}_A \xrightarrow{F} {}_{A\otimes A}\mathcal{C}$$

por $\overline{\otimes} = F \circ \otimes_A \circ (G \times G)$ que é claramente um funtor, pois é a composição de funtores. Por definição, temos nos objetos que

$$\begin{aligned}(M,\lambda)\overline{\otimes}(N,\lambda') = \overline{\otimes}((M,\lambda),(N,\lambda')) &= F \circ \otimes_A(G(M,\lambda),G(N,\lambda'))\\ &= F\circ\otimes_A((M,\rho_M,\lambda_M),(N,\rho_N,\lambda_N))\\ &= F(M\otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}, \lambda_{M\otimes_A N})\\ &= (M\otimes_A N, \overline{\lambda}_{M\otimes_A N}),\end{aligned}$$

em que

$$\rho_M = \lambda\sigma_{M,A\otimes A}(id_M\otimes u_A\otimes id_A),\ \ \rho_N = \lambda'\sigma_{N,A\otimes A}(id_N\otimes u_A\otimes id_A),$$

$$\lambda_M = \lambda(id_A\otimes u_A\otimes id_M),\ \ \lambda_N = \lambda'(id_A\otimes u_A\otimes id_N),$$

$$\rho_{M\otimes_A N} \text{ é o único morfismo tal que } \rho_{M\otimes_A N}(\pi_{M,N}\otimes id_A) \overset{(3.5)}{=} \pi_{M,N}(id_M\otimes\rho_N),$$

$$\lambda_{M\otimes_A N} \text{ é o único morfismo tal que } \lambda_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\pi_{M,N}) \overset{(3.8)}{=} \pi_{M,N}(\lambda_M\otimes id_N)$$

e

$$\overline{\lambda}_{M\otimes_A N} = \rho_{M\otimes_A N}(\lambda_{M\otimes_A N}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A N}).$$

Por definição, para f,g morfismos em ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$, temos

$$f\overline{\otimes}g = \overline{\otimes}((f,g) = F\circ\otimes_A(G(f),G(g)) = F\circ\otimes_A(f,g) = F(f\otimes_A g) = f\otimes_A g.$$

A boa definição do funtor $\overline{\otimes}$ segue da boa definição dos funtores F e G provadas no Teorema 3.16 e também da monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$. Apresentamos essa prova a fim de que se possa verificar efetivamente onde entram as ações acima e a monoidalidade de ${}_A\mathcal{C}_A$, demonstrações essas nada diretas exatamente pela forma como é definida a estrutura monoidal de ${}_A\mathcal{C}_A$, vista na seção 3.1.

Vejamos que $(M\otimes_A N, \overline{\lambda}_{M\otimes_A N})$ é um $A\otimes A$-módulo à esquerda. De fato,

$$\begin{aligned}&\overline{\lambda}_{M\otimes_A N}(id_{A\otimes A}\otimes\overline{\lambda}_{M\otimes_A N})\\ &= \rho_{M\otimes_A N}(\lambda_{M\otimes_A N}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A N})(id_{A\otimes A}\otimes\rho_{M\otimes_A N})\\ &(id_{A\otimes A}\otimes\lambda_{M\otimes_A N}\otimes id_A)(id_{A\otimes A}\otimes id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A N})\\ &\overset{(2.22)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\rho_{M\otimes_A N})(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A N})(id_A\otimes id_A\otimes\rho_{M\otimes_A N})\\ &(id_{A\otimes A}\otimes\lambda_{M\otimes_A N}\otimes id_A)(id_{A\otimes A}\otimes id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A N})\\ &\overset{(\text{nat})}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A\otimes\rho_{M\otimes_A N})(id_A\otimes\rho_{M\otimes_A N}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes A})\\ &(id_{A\otimes A}\otimes\lambda_{M\otimes_A N}\otimes id_A)(id_{A\otimes A}\otimes id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A N})\end{aligned}$$

$$= \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes (\rho_{M\otimes_A N}(\rho_{M\otimes_A N} \otimes id_A)))(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes A})$$
$$(id_{A\otimes A} \otimes \lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.17),(2.6)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)(id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes \sigma_{A,A})$$
$$(id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_{A\otimes A} \otimes \lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.25)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes \lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$= \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes (\sigma_{A,M\otimes_A N}(id_A \otimes \lambda_{M\otimes_A N})) \otimes id_A)(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$\overset{(nat)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes \lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes(M\otimes_A N)} \otimes id_A)$$
$$(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.6)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes \lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.22)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \lambda_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.14)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(m_A \otimes id_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(id_A \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$= \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(m_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_{A\otimes A} \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})$$
$$= \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(m_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$
$$= \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(m_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes ((\sigma_{A,M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})))$$
$$(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.5)}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(m_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes \sigma_{A\otimes A,M\otimes_A N})(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$

$$= \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(m_A \otimes ((id_{M\otimes_A N} \otimes m_A)\sigma_{A\otimes A, M\otimes_A N}))$$
$$(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$
$$\overset{\text{(nat)}}{=} \lambda_{M\otimes_A N}(id_A \otimes \rho_{M\otimes_A N})(m_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})(id_{A\otimes A} \otimes m_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$
$$(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$
$$\overset{(2.22)}{=} \rho_{M\otimes_A N}(\lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N})(m_A \otimes m_A \otimes id_{M\otimes_A N})$$
$$(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A \otimes id_{M\otimes_A N}) = \overline{\lambda}_{M\otimes_A N}(m_{A\otimes A} \otimes id_{M\otimes_A N}).$$

Na última igualdade usamos, além da definição de $\overline{\lambda}_{M\otimes_A N}$, a igualdade $m_{A\otimes A} = (m_A \otimes m_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A} \otimes id_A)$.

A seguir, mostremos que $\overline{\lambda}_{M\otimes_A N}(u_{A\otimes A} \otimes id_{M\otimes_A N}) = id_{M\otimes_A N}$ e aproveitamos para lembrar que $u_{A\otimes A} = u_A \otimes u_A$. Temos

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}_{M\otimes_A N}(u_{A\otimes A} \otimes id_{M\otimes_A N}) &= \rho_{M\otimes_A N}(\lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A N}) \\
&\quad (u_A \otimes u_A \otimes id_{M\otimes_A N}) \\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \rho_{M\otimes_A N}(\lambda_{M\otimes_A N} \otimes id_A)(u_A \otimes id_{M\otimes_A N} \otimes u_A) \\
&\overset{(2.14)}{=} \rho_{M\otimes_A N}(id_{M\otimes_A N} \otimes u_A) \overset{(2.17)}{=} id_{M\otimes_A N}.
\end{aligned}$$

Sejam $f : M \to N$ e $g : M' \to N'$ morfismos de $A \otimes A$-módulos à esquerda. Pela equivalência, temos que f e g são morfismos de A-bimódulos e, pelo Lema 3.5, $f \otimes_A g$ é um morfismo de A-bimódulos, ou seja,

$$(f \otimes_A g)\lambda_{M\otimes_A M'} \overset{(2.15)}{=} \lambda_{N\otimes_A N'}(id_A \otimes (f \otimes_A g))$$

$$(f \otimes_A g)\rho_{M\otimes_A M'} \overset{(2.18)}{=} \rho_{N\otimes_A N'}((f \otimes_A g) \otimes id_A)$$

e além disso, $f \otimes_A g : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$ é o único morfismo tal que

$$(f \otimes_A g)\pi_{M,M'} \overset{(3.2)}{=} \pi_{N,N'}(f \otimes g).$$

Mostremos que $f \otimes_A g : M \otimes_A M' \to N \otimes_A N'$ é morfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda. De fato,

$$\overline{\lambda}_{N\otimes_A N'}(id_{A\otimes A} \otimes (f \otimes_A g))(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M,M'})$$
$$= \overline{\lambda}_{N\otimes_A N'}(id_{A\otimes A} \otimes ((f \otimes_A g)\pi_{M,M'}))$$
$$\overset{(3.2)}{=} \overline{\lambda}_{N\otimes_A N'}(id_{A\otimes A} \otimes (\pi_{N,N'}(f \otimes g)))$$
$$= \rho_{N\otimes_A N'}(\lambda_{N\otimes_A N'} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,N\otimes_A N'})$$
$$(id_A \otimes id_A \otimes \pi_{N,N'})(id_{A\otimes A} \otimes f \otimes g)$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{(nat)}}{=} \rho_{N\otimes_A N'}(\lambda_{N\otimes_A N'}\otimes id_A)(id_A\otimes\pi_{N,N'}\otimes id_A)\\
&(id_A\otimes\sigma_{A,N\otimes N'})(id_A\otimes id_A\otimes f\otimes g)\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} \rho_{N\otimes_A N'}(\lambda_{N\otimes_A N'}\otimes id_A)(id_A\otimes\pi_{N,N'}\otimes id_A)\\
&(id_A\otimes f\otimes g\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes M'})\\
&\overset{(3.2)}{=} \rho_{N\otimes_A N'}(\lambda_{N\otimes_A N'}\otimes id_A)(id_A\otimes(f\otimes_A g)\otimes id_A)\\
&(id_A\otimes\pi_{M,M'}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes M'})\\
&\overset{(2.15)}{=} \rho_{N\otimes_A N'}((f\otimes_A g)\otimes id_A)(\lambda_{M\otimes_A M'}\otimes id_A)\\
&(id_A\otimes\pi_{M,M'}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes M'})\\
&\overset{(2.18)}{=} (f\otimes_A g)\rho_{M\otimes_A M'}(\lambda_{M\otimes_A M'}\otimes id_A)\\
&(id_A\otimes\pi_{M,M'}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes M'})\\
&\overset{\text{(nat)}}{=} (f\otimes_A g)\rho_{M\otimes_A M'}(\lambda_{M\otimes_A M'}\otimes id_A)\\
&(id_A\otimes\sigma_{A,M\otimes_A M'})(id_A\otimes id_A\otimes\pi_{M,M'})\\
&= (f\otimes_A g)\overline{\lambda}_{M\otimes_A M'}(id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M,M'}).
\end{aligned}
$$

Como $id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M,M'}$ é um epimorfismo, segue que $\overline{\lambda}_{N\otimes_A N'}(id_{A\otimes A}\otimes(f\otimes_A g)) = (f\otimes_A g)\overline{\lambda}_{M\otimes_A M'}$. Com respeito ao epimorfismo anterior, esclarecemos: como dito na seção 3.1, $id_A\otimes\pi_{M,M'}$ é o conúcleo de $id_A\otimes f$ $(f = id_M\otimes\lambda_{M'} - \rho_M\otimes id_{M'})$ e portanto, um epimorfismo e também pela exatidão à direita na segunda variável do funtor $\otimes$, segue $id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M,M'} = id_A\otimes(id_A\otimes\pi_{M,M'})$ é um epimorfismo.

Queremos definir uma transformação natural $\overline{a}:\overline{\otimes}\circ(\overline{\otimes}\times Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}})\to\overline{\otimes}\circ(Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}}\times\overline{\otimes})$ em que ambos os funtores estejam definidos de ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}\times{}_{A\otimes A}\mathcal{C}\times{}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ para ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$.

Observamos que

$$
\begin{aligned}
&\overline{\otimes}\circ(\overline{\otimes}\times Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}})((M,\lambda),(N,\lambda'),(P,\lambda''))\\
&=\overline{\otimes}\circ((F\circ\otimes_A\circ(G\times G))\times Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}})((M,\lambda),(N,\lambda'),(P,\lambda''))\\
&=\overline{\otimes}\circ((F\circ\otimes_A\circ(G\times G))((M,\lambda),(N,\lambda')),(P,\lambda''))\\
&=\overline{\otimes}((F\circ\otimes_A)(G(M,\lambda),G(N,\lambda')),(P,\lambda''))\\
&=\overline{\otimes}(F(\otimes_A((M,\rho_M,\lambda_M),(N,\rho_N,\lambda_N))),(P,\lambda''))\\
&=\overline{\otimes}(F(M\otimes_A N,\rho_{M\otimes_A N},\lambda_{M\otimes_A N}),(P,\lambda''))\\
&=F\circ\otimes_A\circ(G\times G)(F(M\otimes_A N,\rho_{M\otimes_A N},\lambda_{M\otimes_A N}),(P,\lambda''))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= F \circ \otimes_A(G(F(M \otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}, \lambda_{M\otimes_A N})), G(P, \lambda''))\\
&= F \circ \otimes_A(G \circ F(M \otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}, \lambda_{M\otimes_A N}), (P, \rho_P, \lambda_P))\\
&\overset{(a)}{=} F \circ \otimes_A((M \otimes_A N, \rho_{M\otimes_A N}, \lambda_{M\otimes_A N}), (P, \rho_P, \lambda_P))\\
&= F((M \otimes_A N) \otimes_A P, \rho_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}, \lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P})\\
&= ((M \otimes_A N) \otimes_A P, \overline{\lambda}_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}),
\end{aligned}
$$

a igualdade (a) é devida ao fato de que $G \circ F = Id_{{}_A\mathcal{C}_A}$. De modo análogo, vemos que

$$\overline{\otimes} \circ (Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}} \times \overline{\otimes})((M, \lambda), (N, \lambda'), (P, \lambda'')) = (M \otimes_A (N \otimes_A P), \overline{\lambda}_{M\otimes_A (N\otimes_A P)}).$$

Dessa forma,

$$\overline{a}_{(M,\lambda),(N,\lambda'),(P,\lambda'')} : ((M\otimes_A N)\otimes_A P, \overline{\lambda}_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}) \to (M\otimes_A (N\otimes_A P), \overline{\lambda}_{M\otimes_A (N\otimes_A P)}).$$

Em ([5], Lema 3.2.7.), é provado que

$$a'_{M,N,P} : (M \otimes_A N) \otimes_A P \to M \otimes_A (N \otimes_A P)$$

é um isomorfismo de A-bimódulos, quaisquer que sejam os bimódulos M, N, P. Em particular, para os bimódulos que provêm do isomorfismo dado pelo funtor G. Se mostrarmos que $a'_{M,N,P}$ é um morfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda, poderemos definir $\overline{a}_{(M,\lambda),(N,\lambda'),(P,\lambda'')} = (a'_{M,N,P}, \overline{\lambda}_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}, \overline{\lambda}_{M\otimes_A (N\otimes_A P)})$, uma vez que este será também um isomorfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda.

A naturalidade de $\overline{a}$, segue da naturalidade de a', via a equivalência (já que $a'_{M,N,P}$ será um morfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda, veja abaixo), isto é, o diagrama da naturalidade de a' ([5], p.70) comuta para módulos à esquerda sobre $A \otimes A$.

Mostremos que $a'_{M,N,P}$ é um morfismo em ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(id_{A\otimes A} \otimes a'_{M,N,P})(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M\otimes_A N,P})(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)\\
&= \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M\otimes_A(N\otimes_A P)})(id_{A\otimes A} \otimes a'_{M,N,P})\\
&(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M\otimes_A N,P})(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)\\
&\overset{(nat)}{=} \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)} \otimes id_A)(id_A \otimes a'_{M,N,P} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes_A P})\\
&(id_A \otimes id_A \otimes \pi_{M\otimes_A N,P})(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)\\
&\overset{(nat)}{=} \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)} \otimes id_A)(id_A \otimes a'_{M,N,P} \otimes id_A)(id_A \otimes \pi_{M\otimes_A N,P} \otimes id_A)\\
&(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes P})(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)
\end{aligned}
$$

$\overset{(3.13)}{=} \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)} \otimes id_A)(id_A \otimes \beta_{M,N,P} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes P})$
$(id_A \otimes id_A \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)$

$\overset{(\mathrm{nat})}{=} \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)} \otimes id_A)(id_A \otimes \beta_{M,N,P} \otimes id_A)$
$(id_A \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.11)}{=} \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)} \otimes id_A)(id_A \otimes \pi_{M,N\otimes_A P} \otimes id_A)$
$(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.8)}{=} \rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(\pi_{M,N\otimes_A P} \otimes id_A)(\lambda_M \otimes id_{N\otimes_A P} \otimes id_A)$
$(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.5)}{=} \pi_{M,N\otimes_A P}(id_M \otimes \rho_{N\otimes_A P})(\lambda_M \otimes id_{N\otimes_A P} \otimes id_A)(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P} \otimes id_A)$
$(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$= \pi_{M,N\otimes_A P}(\lambda_M \otimes id_{N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \rho_{N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P} \otimes id_A)$
$(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.8)}{=} \lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(id_A \otimes \pi_{M,N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \rho_{N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P} \otimes id_A)$
$(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.5)}{=} \lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(id_A \otimes \pi_{M,N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P})(id_A \otimes id_M \otimes id_N \otimes \rho_P)$
$(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.11)}{=} \lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(id_A \otimes \beta_{M,N,P})(id_A \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)(id_A \otimes id_M \otimes id_N \otimes \rho_P)$
$(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.13)}{=} \lambda_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(id_A \otimes a'_{M,N,P})(id_A \otimes \pi_{M\otimes_A N,P})(id_A \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)$
$(id_A \otimes id_M \otimes id_N \otimes \rho_P)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(2.15)}{=} a'_{M,N,P}\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_A \otimes \pi_{M\otimes_A N,P})(id_A \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)(id_A \otimes id_M \otimes id_N \otimes \rho_P)$
$(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.13)}{=} a'_{M,N,P}\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_A \otimes a'^{-1}_{M,N,P})(id_A \otimes \beta_{M,N,P})(id_A \otimes \pi_{M,N} \otimes id_P)$
$(id_A \otimes id_M \otimes id_N \otimes \rho_P)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.11)}{=} a'_{M,N,P}\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_A \otimes a'^{-1}_{M,N,P})(id_A \otimes \pi_{M,N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P})$
$(id_A \otimes id_M \otimes id_N \otimes \rho_P)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.5)}{=} a'_{M,N,P}\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_A \otimes a'^{-1}_{M,N,P})(id_A \otimes \pi_{M,N\otimes_A P})(id_A \otimes id_M \otimes \rho_{N\otimes_A P})$
$(id_A \otimes id_M \otimes \pi_{N,P} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$

$\overset{(3.5)}{=} a'_{M,N,P}\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_A\otimes a'^{-1}_{M,N,P})(id_A\otimes\rho_{M\otimes_A(N\otimes_A P)})(id_A\otimes\pi_{M,N\otimes_A P}\otimes id_A)$
$(id_A\otimes id_M\otimes\pi_{N,P}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$
$\overset{(2.18)}{=} a'_{M,N,P}\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_A\otimes\rho_{(M\otimes_A N)\otimes_A P})(id_A\otimes a'^{-1}_{M,N,P}\otimes id_A)$
$(id_A\otimes\pi_{M,N\otimes_A P}\otimes id_A)(id_A\otimes id_M\otimes\pi_{N,P}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$
$\overset{(2.22)}{=} a'_{M,N,P}\rho_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}\otimes id_A)(id_A\otimes a'^{-1}_{M,N,P}\otimes id_A)$
$(id_A\otimes\pi_{M,N\otimes_A P}\otimes id_A)(id_A\otimes id_M\otimes\pi_{N,P}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$
$\overset{(3.11)}{=} a'_{M,N,P}\rho_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}\otimes id_A)(id_A\otimes a'^{-1}_{M,N,P}\otimes id_A)$
$(id_A\otimes\beta_{M,N,P}\otimes id_A)(id_A\otimes\pi_{M,N}\otimes id_P\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes N)\otimes P})$
$\overset{(3.13),(\text{nat})}{=} a'_{M,N,P}\rho_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}\otimes id_A)(id_A\otimes a'^{-1}_{M,N,P}\otimes id_A)$
$(id_A\otimes a'_{M,N,P}\otimes id_A)(id_A\otimes\pi_{M\otimes_A N,P}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes P})$
$(id_A\otimes id_A\otimes\pi_{M,N}\otimes id_P)$
$\overset{(\text{nat})}{=} a'_{M,N,P}\rho_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(\lambda_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}\otimes id_A)(id_A\otimes\sigma_{A,(M\otimes_A N)\otimes_A P})$
$(id_A\otimes id_A\otimes\pi_{M\otimes_A N,P})(id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M,N}\otimes id_P)$
$= a'_{M,N,P}\overline{\lambda}_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}(id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M\otimes_A N,P})(id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M,N}\otimes id_P).$

Como $id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M\otimes_A N,P}$ e $id_{A\otimes A}\otimes\pi_{M,N}\otimes id_P$ são epimorfismos, por motivos análogos aos já explicados anteriormente, segue que

$$\overline{\lambda}_{M\otimes_A(N\otimes_A P)}(id_{A\otimes A}\otimes a'_{M,N,P}) = a'_{M,N,P}\overline{\lambda}_{(M\otimes_A N)\otimes_A P}.$$

Para as igualdades (2.15) e (2.18) usamos que $a'_{M,N,P}$ é morfismo de A-módulo à esquerda e à direita, respectivamente. A igualdade (2.22) segue do fato de que $(M\otimes_A N)\otimes_A P$ é um A-bimódulo.

A comutatividade do pentágono segue imediatamente, uma vez que os morfismos de $A\otimes A$-módulos à esquerda são morfismos de A-bimódulos. Observamos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & ((M\otimes_A N)\otimes_A P)\otimes_A Q \arrow[dl, "a'_{M,N,P}\otimes_A id_Q=\overline{a}_{M,N,P}\overline{\otimes} id_Q"'] \arrow[dr, "a'_{M\otimes_A N,P,Q}=\overline{a}_{M\overline{\otimes} N,P,Q}"] & \\
(M\otimes_A(N\otimes_A P))\otimes_A Q \arrow[d, "a'_{M,N\otimes_A P,Q}"', "=\overline{a}_{M,N\overline{\otimes} P,Q}"] & & (M\otimes_A N)\otimes_A(P\otimes_A Q) \arrow[d, "a'_{M,N,P\otimes_A Q}="', "\overline{a}_{M,N,P\overline{\otimes} Q}"] \\
M\otimes_A((N\otimes_A P)\otimes_A Q) \arrow[rr, "id_M\otimes_A a'_{N,P,Q}=id_M\overline{\otimes}\overline{a}_{N,P,Q}"'] & & M\otimes_A(N\otimes_A(P\otimes_A Q)).
\end{tikzcd}$$

O fato de que $\mathbf{1}_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}} = A$ segue diretamente do Teorema 3.16, pois sendo A um A-bimódulo com $\lambda_A = \rho_A = m_A$, segue que A é um $A \otimes A$-módulo à esquerda com a estrutura

$$\overline{\lambda}_A = \rho_A(\lambda_A \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A}) = m_A(m_A \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A}).$$

Finalmente, definimos uma transformação natural $\overline{l} : \overline{\otimes} \circ ((A, \overline{\lambda}_A), -) \to Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}}$, em que ambos os funtores são definidos de ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ para ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$.

Observamos que

$$\overline{\otimes} \circ ((A, \overline{\lambda}_A), -)(M, \lambda) = \overline{\otimes}((A, \overline{\lambda}_A), (M, \lambda)) = (A \otimes_A M, \overline{\lambda}_{A\otimes_A M}),$$

em que $\overline{\lambda}_A$ é como acima e $\overline{\lambda}_{A\otimes_A M} = \rho_{A\otimes_A M}(\lambda_{A\otimes_A M} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes_A M})$.

Dessa forma,

$$\overline{l}_{(M,\lambda)} : (A \otimes_A M, \overline{\lambda}_{A\otimes_A M}) \to (M, \lambda).$$

Além disso, sabemos que

$$Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}}(M, \lambda) = (F \circ G)(M, \lambda) = F(M, \rho_M, \lambda_M) = (M, \overline{\lambda}_M)$$

e já provamos anteriormente que $\lambda \overset{(*)}{=} \overline{\lambda}_M$.

Em ([5], Lema 3.2.8.), é provado que

$$l'_M : A \otimes_A M \to M$$

é um isomorfismo de A-bimódulos, para qualquer bimódulo M. Em particular, para os bimódulos que provêm do isomorfismo dado pelo funtor G. Se mostrarmos que l'_M é um morfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda, poderemos definir $\overline{l}_{(M,\lambda)} = (l'_M, \overline{\lambda}_{A\otimes_A M}, \lambda)$, uma vez que este será também um isomorfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda.

A naturalidade de $\overline{l}$, segue da naturalidade de l', via a equivalência (já que l'_M será um morfismo de $A \otimes A$-módulos à esquerda, veja abaixo), isto é, o diagrama da naturalidade de l' ([5], p.77) comuta para módulos à esquerda sobre $A \otimes A$.

Tendo em vista a estrutura de A-bimódulo de A dada por (A, ρ_A, λ_A) com $\rho_A = \lambda_A = m_A$, mostremos que l'_M é um morfismo em ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$. De fato,

$$\begin{aligned}
&l'_M \overline{\lambda}_{A\otimes_A M}(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{A,M}) \\
&= l'_M \rho_{A\otimes_A M}(\lambda_{A\otimes_A M} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes_A M})(id_A \otimes id_A \otimes \pi_{A,M}) \\
&\overset{(\text{nat})}{=} l'_M \rho_{A\otimes_A M}(\lambda_{A\otimes_A M} \otimes id_A)(id_A \otimes \pi_{A,M} \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes M})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.8)}{=} l'_M \rho_{A\otimes_A M}(\pi_{A,M} \otimes id_A)(\lambda_A \otimes id_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes M})\\
&\overset{(3.5)}{=} l'_M \pi_{A,M}(id_A \otimes \rho_M)(\lambda_A \otimes id_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes M})\\
&\overset{(a)}{=} \lambda_M(id_A \otimes \rho_M)(m_A \otimes id_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes M})\\
&\overset{(2.22)}{=} \rho_M(\lambda_M \otimes id_A)(m_A \otimes id_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes M})\\
&\overset{(2.14)}{=} \rho_M(\lambda_M \otimes id_A)(id_A \otimes \lambda_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,A\otimes M})\\
&\overset{(nat)}{=} \rho_M(\lambda_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M})(id_A \otimes id_A \otimes \lambda_M)\\
&\overset{(a)}{=} \rho_M(\lambda_M \otimes id_A)(id_A \otimes \sigma_{A,M})(id_A \otimes id_A \otimes l'_M)(id_A \otimes id_A \otimes \pi_{A,M})\\
&= \overline{\lambda}_M(id_{A\otimes A} \otimes l'_M)(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{A,M})\\
&\overset{(*)}{=} \lambda(id_{A\otimes A} \otimes l'_M)(id_{A\otimes A} \otimes \pi_{A,M}).
\end{aligned}
$$

Como $id_{A\otimes A} \otimes \pi_{A,M}$ é um epimorfismo, segue que $l'_M\overline{\lambda}_{A\otimes_A M} = \lambda(id_{A\otimes A} \otimes l'_M)$ que é o desejado. A igualdade (a), dada em ([5], (3.76)), é $l'_M\pi_{A,M} = \lambda_M$.

Analogamente, definimos a transformação natural $\overline{r} : \overline{\otimes} \circ (-, (A, \overline{\lambda}_A)) \to Id_{{}_{A\otimes A}\mathcal{C}}$, em que ambos os funtores estejam definidos de ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ para ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$. Assim,

$$\overline{r}_{(M,\lambda)} : (M \otimes_A A, \overline{\lambda}_{M\otimes_A A}) \to (M, \lambda)$$

e definimos $\overline{r}_{(M,\lambda)} = (r'_M, \overline{\lambda}_{M\otimes_A A}, \lambda)$, veja ([5], p.78).

A comutatividade do triângulo segue imediatamente, uma vez que os morfismos de $A \otimes A$-módulos à esquerda são morfismos de A-bimódulos. Observamos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(M \otimes \mathbf{1}) \otimes N \arrow[rr, "a'_{M,\mathbf{1},N} = \overline{a}_{M,\mathbf{1},N}"] \arrow[dr, "r'_M \otimes_A id_N = \overline{r}_M \overline{\otimes} id_N"'] & & M \otimes (\mathbf{1} \otimes N) \arrow[dl, "id_M \otimes_A l'_N = id_M \overline{\otimes} \overline{l}_N"] \\
& M \otimes N. &
\end{tikzcd}
$$

Com isso, concluímos que ${}_{A\otimes A}\mathcal{C}$ é monoidal. ■

4 ÁLGEBRAS BASE E EXTENSÕES DINÂMICAS

Neste capítulo, consideramos que dada uma álgebra de Hopf H, a mesma seja de dimensão finita sobre um corpo $\mathbf{k}$, o que implica sua antípoda ser bijetora. Começaremos apresentando a definição de álgebra base numa categoria monoidal $\mathcal{C}$, a qual pode ser encontrada em [4], como sendo álgebras comutativas em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$. Por exemplo, considerando a categoria monoidal ${}_H\mathcal{M}$ já mencionada nas seções 2.4 e 2.5, chamamos a atenção para o fato de que os objetos e morfismos em ${}_H\mathcal{M}$ são exatamente os H-módulos à esquerda e seus morfismos em $Vect_{\mathbf{k}}$ ou $vect_{\mathbf{k}}$, no caso em questão em $vect_{\mathbf{k}}$, pois $\dim_{\mathbf{k}} H < \infty$. Sabemos, por [25], que $\mathcal{Z}({}_H\mathcal{M})$ é equivalente à categoria de módulos de Yetter-Drinfel'd ${}_H^H\mathcal{YD}$ e devido a esse fato, as álgebras base em ${}_H\mathcal{M}$ são exatamente as álgebras comutativas em ${}_H^H\mathcal{YD}$, explicamos sobre isso com detalhes mais adiante.

Essa definição é fundamental para a construção de novas categorias, denominadas extensões dinâmicas, que estudamos na segunda seção desse capítulo. Além disso, apresentamos exemplos e discutimos algumas propriedades relevantes. Entre essas, como nossa contribuição, mostramos que o produto tensorial finito de álgebras base é também uma álgebra base, desde que sejam centralizadoras uma da outra, isto é, obedeçam à Definição 3.12. Apresentamos também uma prova independente sobre a funtorialidade do tensor que estabelece a monoidalidade das extensões dinâmicas, veja Teorema 4.8.

4.1 ÁLGEBRAS BASE E EXEMPLOS

Definição 4.1. ([4], Definition 4.1) Seja $(\mathcal{C}, \otimes, a, l, r, \mathbf{1})$ uma categoria monoidal. Uma álgebra $(\mathcal{L}, m, u)$ em $\mathcal{C}$ é dita uma *álgebra base*, se $\mathcal{L}$ é uma álgebra comutativa em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Equivalentemente (não é difícil ver essa equivalência), uma álgebra base $\mathcal{L}$ em $\mathcal{C}$ é um par $(\mathcal{L}, \sigma_{\mathcal{L},-})$, em que $\mathcal{L}$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$, $\{\sigma_{\mathcal{L},X} : \mathcal{L} \otimes X \to X \otimes \mathcal{L}\}_{X \in \mathcal{C}}$ é uma coleção de isomorfismos em $\mathcal{C}$ e os seguintes diagramas comutam

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{L}} \otimes f"'] & X \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "f \otimes id_{\mathcal{L}}"] \\
\mathcal{L} \otimes Y \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},Y}"'] & Y \otimes \mathcal{L}
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

Observemos que a coleção de isomorfismos acima aliada à comutatividade do diagrama (4.1), é exatamente dizer que tal coleção é um isomorfismo natural.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{L}\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X\otimes Y}"] \arrow[dl, "a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y}"'] & (X\otimes Y)\otimes\mathcal{L} & \\
(\mathcal{L}\otimes X)\otimes Y \arrow[dr, "\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y"'] & & & X\otimes(Y\otimes\mathcal{L}) \arrow[ul, "a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}}"'] \\
 & (X\otimes\mathcal{L})\otimes Y \arrow[r, "a_{X,\mathcal{L},Y}"'] & X\otimes(\mathcal{L}\otimes Y) \arrow[ur, "id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L},Y}"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X}"] \arrow[d, "m\otimes id_X"'] & X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}) \arrow[d, "id_X\otimes m"] \\
\mathcal{L}\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X}"'] & X\otimes\mathcal{L}
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[rr, "\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "m"'] & & \mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[dl, "m"] \\
 & \mathcal{L} &
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "u\otimes id_X"'] & X\otimes\mathbf{1} \arrow[d, "id_X\otimes u"] \\
\mathcal{L}\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X}"'] & X\otimes\mathcal{L},
\end{tikzcd} \tag{4.5}$$

em que $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um morfismo qualquer, $\sigma_{\mathbf{1},X} = r_X^{-1} l_X$ e

$$\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X} = a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}. \tag{4.6}$$

Exemplo 4.2. Seja $(C,\otimes,a,l,r,\mathbf{1})$ uma categoria monoidal. Então o objeto $(\mathbf{1},\sigma_{\mathbf{1},-})$ é uma álgebra base com $\sigma_{\mathbf{1},X} = r_X^{-1} l_X$, para todo $X \in \mathcal{C}$. Sabemos que $\mathbf{1}$ é uma álgebra com $m_{\mathbf{1}} = l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$ e $u_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}}$. Mostremos a comutatividade dos diagramas. Comecemos com a comutatividade do diagrama (4.4), temos

$$\begin{aligned}
m_{\mathbf{1}}\sigma_{\mathbf{1},\mathbf{1}} &= l_{\mathbf{1}} r_{\mathbf{1}}^{-1} l_{\mathbf{1}} \\
&= r_{\mathbf{1}} r_{\mathbf{1}}^{-1} l_{\mathbf{1}} \\
&= l_{\mathbf{1}} = m_{\mathbf{1}}.
\end{aligned}$$

Seja $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$. Então

$$\begin{aligned}(f \otimes id_{\mathbf{1}})\sigma_{\mathbf{1},X} &= (f \otimes id_{\mathbf{1}})r_X^{-1}l_X\\ &\overset{(\star)}{=} r_Y^{-1}fl_X\\ &\overset{(\star\star)}{=} r_Y^{-1}l_Y(id_{\mathbf{1}} \otimes f)\\ &= \sigma_{\mathbf{1},Y}(id_{\mathbf{1}} \otimes f),\end{aligned}$$

$(\star)$ e $(\star\star)$ seguem da naturalidade de r_X^{-1} e de l_X, respectivamente, e temos que o diagrama (4.1) comuta. Mostremos a comutatividade do diagrama (4.2). De fato,

$$\begin{aligned}&a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}}(id_X \otimes \sigma_{\mathbf{1},Y})a_{X,\mathbf{1},Y}(\sigma_{\mathbf{1},X} \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathbf{1},X,Y}\\ &= a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}}(id_X \otimes r_Y^{-1})(id_X \otimes l_Y)a_{X,\mathbf{1},Y}(r_X^{-1} \otimes id_Y)(l_X \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathbf{1},X,Y}\\ &\overset{(2.2)}{=} a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}}(id_X \otimes r_Y^{-1})(r_X \otimes id_Y)(r_X^{-1} \otimes id_Y)(l_X \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathbf{1},X,Y}\\ &= a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}}(id_X \otimes r_Y^{-1})(l_X \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathbf{1},X,Y}\\ &\overset{\text{Prop.2.47}}{=} a^{-1}_{X,Y,\mathbf{1}}(id_X \otimes r_Y^{-1})l_{X\otimes Y}\\ &\overset{\text{Prop.2.47}}{=} r^{-1}_{X\otimes Y}l_{X\otimes Y}\\ &= \sigma_{\mathbf{1},X\otimes Y}.\end{aligned}$$

Para o diagrama (4.3), temos

$$\begin{aligned}&(id_X \otimes m)\sigma_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1},X}\\ &= (id_X \otimes l_{\mathbf{1}})a_{X,\mathbf{1},\mathbf{1}}(\sigma_{\mathbf{1},X} \otimes id_{\mathbf{1}})a^{-1}_{\mathbf{1},X,\mathbf{1}}(id_{\mathbf{1}} \otimes \sigma_{\mathbf{1},X})a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\\ &= (id_X \otimes l_{\mathbf{1}})a_{X,\mathbf{1},\mathbf{1}}(r_X^{-1} \otimes id_{\mathbf{1}})(l_X \otimes id_{\mathbf{1}})a^{-1}_{\mathbf{1},X,\mathbf{1}}(id_{\mathbf{1}} \otimes r_X^{-1})\\ &(id_{\mathbf{1}} \otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\\ &\overset{\text{Prop.2.47}}{=} (id_X \otimes l_{\mathbf{1}})a_{X,\mathbf{1},\mathbf{1}}(r_X^{-1} \otimes id_{\mathbf{1}})l_{X\otimes\mathbf{1}}(id_{\mathbf{1}} \otimes r_X^{-1})(id_{\mathbf{1}} \otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}\\ &\overset{(2.2)}{=} (r_X \otimes id_{\mathbf{1}})(r_X^{-1} \otimes id_{\mathbf{1}})l_{X\otimes\mathbf{1}}(id_{\mathbf{1}} \otimes r_X^{-1})(r_{\mathbf{1}} \otimes id_X)\\ &= l_{X\otimes\mathbf{1}}(id_{\mathbf{1}} \otimes r_X^{-1})(r_{\mathbf{1}} \otimes id_X)\\ &\overset{(a)}{=} r_X^{-1}l_X(r_{\mathbf{1}} \otimes id_X)\\ &= \sigma_{\mathbf{1},X}(m \otimes id_X)\end{aligned}$$

onde em (a), usamos a naturalidade de l dada pela comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes r_X^{-1}"'] & X \arrow[d, "r_X^{-1}"] \\
\mathbf{1} \otimes X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "l_{X\otimes\mathbf{1}}"'] & X \otimes \mathbf{1}.
\end{tikzcd}$$

Fazendo $\mathcal{L} = \mathbf{1}$, é trivial a comutatividade do diagrama (4.5).

Exemplo 4.3. Seja $(\mathcal{C}, \sigma)$ uma categoria monoidal trançada. Então, qualquer álgebra comutativa $\mathcal{L}$ nesta categoria possui duas estruturas algébricas de álgebra base.

Antes de procedermos à proxima definição, lembramos rapidamente a definição da categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$. Os objetos são H-módulos à esquerda e H-comódulos à esquerda, cuja estrutura de H-módulo à esquerda é dada por $h \cdot m$, de comódulo à esquerda é dada por $\rho(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ (com $\rho : M \to H \otimes M$) e vale a relação de compatibilidade, veja ([23], Section 11.6),

$$h_1 m_{(-1)} \otimes h_2 \cdot m_{(0)} = (h_1 \cdot m)_{(-1)} h_2 \otimes (h_1 \cdot m)_{(0)}.$$

Os morfismos nessa categoria são morfismos de H-módulos à esquerda e de H-comódulos à esquerda. Como estamos supondo que $\dim_{\mathbf{k}} H < \infty$, essa categoria é trançada, com trança

$$c_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M \text{ dada por } \; c_{M,N}(m \otimes n) = m_{(-1)} \cdot n \otimes m_{(0)},$$

para quaisquer $M, N \in {}_H^H\mathcal{YD}$. Assim como dissemos na introdução desse capítulo com respeito à categoria ${}_H\mathcal{M}$, os objetos e morfismos em ${}_H^H\mathcal{YD}$ são exatamente os H-módulos e H-comódulos (e seus morfismos) em $vect_{\mathbf{k}}$.

Seja (A, m, u) uma $\mathbf{k}$-álgebra em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Então A é um H-módulo à esquerda e um H-comódulo à esquerda e os morfismos de $\mathbf{k}$-espaços vetoriais m e u são também morfismos de H-módulos à esquerda e de H-comódulos à esquerda, pois A é um objeto em ${}_H^H\mathcal{YD}$. Portanto, A é uma álgebra na categoria dos H-módulos à esquerda e dos H-comódulos à esquerda. Pelas proposições 2.73 e 2.75, segue que A é H-módulo álgebra à esquerda e um H-comódulo álgebra à esquerda, respectivamente.

A definição dada abaixo por ([4], Definition 3.1) é, naturalmente, um caso particular da Definição 4.1 quando $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}$, caso este, em que $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ é a categoria ${}_H^H\mathcal{YD}$.

Definição 4.4. Uma $\mathbf{k}$-álgebra $\mathcal{L}$ é dita uma álgebra base sobre H se $\mathcal{L}$ é um H-módulo álgebra à esquerda e H-comódulo álgebra à esquerda que satisfaz

$$(h_1 \cdot l)_{(-1)} h_2 \otimes (h_1 \cdot l)_{(0)} = h_1 l_{(-1)} \otimes h_2 \cdot l_{(0)} \tag{4.7}$$

e

$$ll' = (l_{(-1)} \cdot l') l_{(0)}, \tag{4.8}$$

para quaisquer $h \in H$ e $l, l' \in \mathcal{L}$, onde $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$.

Notemos que a igualdade (4.7) é exatamente a igualdade da compatibilidade dita acima e a igualdade (4.8) é a comutatividade da álgebra ($ll' = m_{\mathcal{L}}(l \otimes l') = m_{\mathcal{L}} c_{\mathcal{L},\mathcal{L}}(l \otimes l') =$

$m_{\mathcal{L}}(l_{(-1)} \cdot l' \otimes l_{(0)}) = (l_{(-1)} \cdot l')l_{(0)})$. Portanto, uma álgebra base sobre H nada mais é do que uma álgebra comutativa na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$. O exemplo seguinte mostra exatamente isso.

Exemplo 4.5. Consideremos $\mathcal{C} = {}_H\mathcal{M}$, a categoria monoidal de H-módulos à esquerda, com $\otimes = \otimes_{\mathbf{k}}$. Lembramos que a estrutura de H-módulo à esquerda de $M \otimes N$, para quaisquer $M, N \in \mathcal{C}$ é dada por $h \cdot (m \otimes n) = h_1 \cdot m \otimes h_2 \cdot n$, para quaisquer $m \in M, n \in N$ e $h \in H$.

Verifiquemos que toda álgebra base sobre H é uma álgebra base na categoria $\mathcal{C}$. De fato, seja $(\mathcal{L}, m_{\mathcal{L}}, u_{\mathcal{L}})$ uma álgebra base sobre H e, para cada $M \in {}_H\mathcal{M}$, definimos

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{L},M} : \mathcal{L} \otimes M &\to M \otimes \mathcal{L} \\ l \otimes m &\mapsto l_{(-1)} \cdot m \otimes l_{(0)} \end{aligned}$$

A estrutura de H-comódulo à esquerda de $\mathcal{L}$ é dada por $\rho_{\mathcal{L}}(l) = l_{(-1)} \otimes l_{(0)}$, em que $\rho : \mathcal{L} \to H \otimes \mathcal{L}$.

Mostremos primeiramente que $\sigma_{\mathcal{L},M}$ é um morfismo de H-módulos à esquerda. Como $\mathcal{L}$ é uma álgebra base sobre H, então é satisfeita a igualdade

$$(h_1 \cdot l)_{(-1)} h_2 \otimes (h_1 \cdot l)_0 \overset{(4.7)}{=} h_1 l_{(-1)} \otimes h_2 \cdot l_{(0)},$$

para quaisquer $h \in H$ e $l \in \mathcal{L}$.

Consideramos $\varphi : H \otimes M \to M$ a estrutura de H-módulo à esquerda de M dada por $\varphi(h \otimes m) = h \cdot m$, $\lambda : H \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ a estrutura de H-módulo à esquerda de $\mathcal{L}$ dada por $\lambda(h \otimes l) = h \cdot l$ e lembramos que o morfismo *twist*, $tw : X \otimes Y \to Y \otimes X$, é dado por $tw(x \otimes y) = y \otimes x$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, em que X e Y são quaisquer H-módulos à esquerda. Observe que podemos reescrever o lado direito da igualdade acima como a seguinte composição f de morfismos

$$\begin{aligned} f(h \otimes l) &= ((m_H \otimes \lambda)(id_H \otimes tw \otimes id_{\mathcal{L}})(\Delta \otimes \rho))(h \otimes l) \\ &= ((m_H \otimes \lambda)(id_H \otimes tw \otimes id_{\mathcal{L}}))(h_1 \otimes h_2 \otimes l_{(-1)} \otimes l_{(0)}) \\ &= ((m_H \otimes \lambda))(h_1 \otimes l_{(-1)} \otimes h_2 \otimes l_{(0)}) \\ &= h_1 l_{(-1)} \otimes h_2 \cdot l_{(0)}. \end{aligned}$$

O lado esquerdo da igualdade é a seguinte composição g de morfismos

$$
\begin{aligned}
&g(h\otimes l)\\
&=((m_H\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw)(\rho\otimes id_H)(\lambda\otimes id_H)(id_H\otimes tw)(\Delta\otimes id_{\mathcal{L}}))(h\otimes l)\\
&=((m_H\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw)(\rho\otimes id_H)(\lambda\otimes id_H)(id_H\otimes tw))(h_1\otimes h_2\otimes l)\\
&=((m_H\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw)(\rho\otimes id_H)(\lambda\otimes id_H))(h_1\otimes l\otimes h_2)\\
&=((m_H\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw)(\rho\otimes id_H))(h_1\cdot l\otimes h_2)\\
&=((m_H\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw))((h_1\cdot l)_{(-1)}\otimes (h_1\cdot l)_{(0)}\otimes h_2)\\
&=((m_H\otimes id_{\mathcal{L}}))((h_1\cdot l)_{(-1)}\otimes h_2\otimes (h_1\cdot l)_{(0)})\\
&=(h_1\cdot l)_{(-1)}h_2\otimes (h_1\cdot l)_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Agora notemos que, para qualquer $m\in M$, temos

$$
\begin{aligned}
&((\varphi\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw)(f\otimes id_M))(h\otimes l\otimes m)\\
&=((\varphi\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw))(h_1l_{(-1)}\otimes h_2\cdot l_{(0)}\otimes m)\\
&=((\varphi\otimes id_{\mathcal{L}}))(h_1l_{(-1)}\otimes m\otimes h_2\cdot l_{(0)})\\
&=(h_1l_{(-1)})\cdot m\otimes h_2\cdot l_{(0)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&((\varphi\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw)(g\otimes id_M))(h\otimes l\otimes m)\\
&=((\varphi\otimes id_{\mathcal{L}})(id_H\otimes tw))((h_1\cdot l)_{(-1)}h_2\otimes (h_1\cdot l)_{(0)}\otimes m)\\
&=((\varphi\otimes id_{\mathcal{L}}))((h_1\cdot l)_{(-1)}h_2\otimes m\otimes (h_1\cdot l)_{(0)})\\
&=((h_1\cdot l)_{(-1)}h_2)\cdot m\otimes (h_1\cdot l)_{(0)}.
\end{aligned}
$$

Como $f(h\otimes l)=g(h\otimes l)$ então

$$(h_1l_{(-1)})\cdot m\otimes h_2\cdot l_{(0)}=((h_1\cdot l)_{(-1)}h_2)\cdot m\otimes (h_1\cdot l)_{(0)}$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{L},M}(h\cdot(l\otimes m)) &=\sigma_{\mathcal{L},M}(h_1\cdot l\otimes h_2\cdot m)\\
&=(h_1\cdot l)_{(-1)}\cdot(h_2\cdot m)\otimes (h_1\cdot l)_{(0)}\\
&=((h_1\cdot l)_{(-1)}h_2)\cdot m\otimes (h_1\cdot l)_0\\
&=(h_1l_{(-1)})\cdot m\otimes h_2\cdot l_{(0)}\\
&=h_1\cdot(l_{(-1)}\cdot m)\otimes h_2\cdot l_{(0)}\\
&=h\cdot(l_{(-1)}\cdot m\otimes l_{(0)})\\
&=h\cdot\sigma_{\mathcal{L},M}(l\otimes m).
\end{aligned}
$$

Logo, $\sigma_{\mathcal{L},M}$ é um morfismo de H-módulos à esquerda. Também temos que $\sigma_{\mathcal{L},M}$ é um isomorfismo, cujo isomorfismo inverso é dado por

$$
\begin{aligned}
\sigma^{-1}_{\mathcal{L},M}:M\otimes\mathcal{L} &\to \mathcal{L}\otimes M\\
m\otimes l &\mapsto l_{(0)}\otimes S^{-1}(l_{(-1)})\cdot m.
\end{aligned}
$$

Tendo isso em mente, temos

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\mathcal{L},M}^{-1}\sigma_{\mathcal{L},M})(l\otimes m) &= \sigma_{\mathcal{L},M}^{-1}(l_{(-1)}\cdot m\otimes l_{(0)})\\
&= (l_{(0)})_{(0)}\otimes S^{-1}((l_{(0)})_{(-1)})\cdot(l_{(-1)}\cdot m)\\
&\overset{(a)}{=} l_{(0)}\otimes S^{-1}((l_{(-1)})_2)\cdot((l_{(-1)})_1\cdot m)\\
&\overset{(b)}{=} l_{(0)}\otimes (S^{-1}((l_{(-1)})_2)\,((l_{(-1)})_1)\cdot m\\
&\overset{(c)}{=} l_{(0)}\otimes(\varepsilon(l_{(-1)})1_H)\cdot m\\
&= l_{(0)}\varepsilon(l_{(-1)})\otimes m\\
&\overset{(a)}{=} l\otimes m
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\mathcal{L},M}\sigma_{\mathcal{L},M}^{-1})(m\otimes l) &= \sigma_{\mathcal{L},M}(l_{(0)}\otimes S^{-1}(l_{(-1)})\cdot m)\\
&= ((l_{(0)})_{(-1)}\cdot(S^{-1}(l_{(-1)})\cdot m)\otimes(l_{(0)})_{(0)}\\
&\overset{(a)}{=} (l_{(-1)})_2\cdot(S^{-1}((l_{(-1)})1)\cdot m)\otimes l_{(0)}\\
&\overset{(b)}{=} ((l_{(-1)})_2 S^{-1}((l_{(-1)})1))\cdot m\otimes l_{(0)}\\
&\overset{(c)}{=} (\varepsilon(l_{(-1)})1_H)\cdot m\otimes l_{(0)}\\
&= m\otimes\varepsilon(l_{(-1)})l_{(0)}\\
&\overset{(a)}{=} m\otimes l.
\end{aligned}$$

As igualdades (a) e (b) seguem dos fatos de que $\mathcal{L}$ é H-comódulo à esquerda e de que M é um H-módulo à esquerda, respectivamente. A igualdade (c) é devida ao fato de que S^{-1} é a antípoda de H^{cop} (isto é, H possui a mesma estrutura de álgebra de H e a estrutura de coálgebra co-oposta de H). Ainda com respeito às igualdades acima, lembramos que o fato de $\mathcal{L}$ ser um H-comódulo à esquerda, valem as igualdades

$$(\Delta\otimes id_{\mathcal{L}})\rho(l) = (l_{(-1)})_1\otimes(l_{(-1)})_2\otimes l_{(0)} = l_{(-1)}\otimes(l_{(0)})_{(-1)}\otimes(l_{(0)})_{(0)} = (id_H\otimes\rho)\rho(l)$$

e

$$(\varepsilon\otimes id_{\mathcal{L}})\rho(l) = \varepsilon(l_{(-1)})l_{(0)} = l = id_{\mathcal{L}}(l),$$

para qualquer $l\in\mathcal{L}$.

A seguir, verificamos a comutatividade do diagrama (4.4). Sejam $l, l'\in\mathcal{L}$. Então

$$\begin{aligned}
(m_{\mathcal{L}}\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(l\otimes l') &= m_{\mathcal{L}}(l_{(-1)}\cdot l'\otimes l_{(0)})\\
&= (l_{(-1)}\cdot l')l_{(0)}\\
&\overset{(4.8)}{=} ll'\\
&= m_{\mathcal{L}}(l\otimes l').
\end{aligned}$$

Sejam $M, N \in {}_H\mathcal{M}$ e $f \in Hom_{{}_H\mathcal{M}}(M, N)$. Então, para quaisquer $l \in \mathcal{L}$ e $m \in M$, temos

$$\begin{aligned} ((f \otimes id_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathcal{L},M})(l \otimes m) &= (f \otimes id_{\mathcal{L}})(l_{(-1)} \cdot m \otimes l_{(0)}) \\ &= f(l_{(-1)} \cdot m) \otimes l_{(0)} \\ &\overset{(*)}{=} l_{(-1)} \cdot f(m) \otimes l_{(0)} \\ &= \sigma_{\mathcal{L},N}(l \otimes f(m)) \\ &= (\sigma_{\mathcal{L},N}(id_{\mathcal{L}} \otimes f))(l \otimes m), \end{aligned}$$

em que $(*)$ segue do fato de que f é morfismo de H-módulos à esquerda. Portanto, temos a comutatividade do diagrama (4.1).

Agora mostremos a comutatividade do diagrama (4.2). Sejam $l \in \mathcal{L}$, $m \in M$ e $n \in N$. Então

$$\begin{aligned} &(a^{-1}_{M,N,\mathcal{L}}(id_M \otimes \sigma_{\mathcal{L},N})a_{M,\mathcal{L},N}(\sigma_{\mathcal{L},M} \otimes id_N)a^{-1}_{\mathcal{L},M,N})(l \otimes (m \otimes n)) \\ &= (a^{-1}_{M,N,\mathcal{L}}(id_M \otimes \sigma_{\mathcal{L},N})a_{M,\mathcal{L},N}(\sigma_{\mathcal{L},M} \otimes id_N))((l \otimes m) \otimes n) \\ &= (a^{-1}_{M,N,\mathcal{L}}(id_M \otimes \sigma_{\mathcal{L},N})a_{M,\mathcal{L},N})((l_{(-1)} \cdot m \otimes l_{(0)}) \otimes n) \\ &= (a^{-1}_{M,N,\mathcal{L}}(id_M \otimes \sigma_{\mathcal{L},N}))(l_{(-1)} \cdot m \otimes (l_{(0)} \otimes n)) \\ &= (a^{-1}_{M,N,\mathcal{L}})(l_{(-1)} \cdot m \otimes ((l_{(0)})_{(-1)} \cdot n \otimes (l_{(0)})_{(0)})) \\ &= (l_{(-1)} \cdot m \otimes (l_{(0)})_{(-1)} \cdot n) \otimes (l_{(0)})_{(0)} \\ &= ((l_{(-1)})_1 \cdot m \otimes (l_{(-1)})_2 \cdot n) \otimes l_{(0)} \\ &\overset{(**)}{=} l_{(-1)} \cdot (m \otimes n) \otimes l_{(0)} \\ &= \sigma_{\mathcal{L},M\otimes N}(l \otimes (m \otimes n)), \end{aligned}$$

em $(**)$ usamos que $M \otimes N$ é um H-módulo à esquerda. Seguimos mostrando a comutatividade do diagrama (4.3). Sejam $l, l' \in \mathcal{L}$ e $m \in M$. Então

$$\begin{aligned} &((id_M \otimes m_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},M})((l \otimes l') \otimes m) \\ &\overset{(4.6)}{=} ((id_M \otimes m_{\mathcal{L}})a_{M,\mathcal{L},\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{L},M} \otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L},M,\mathcal{L}}(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},M})a_{\mathcal{L},\mathcal{L},M})((l \otimes l') \otimes m) \\ &= ((id_M \otimes m_{\mathcal{L}})a_{M,\mathcal{L},\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{L},M} \otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L},M,\mathcal{L}}(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},M}))(l \otimes (l' \otimes m)) \\ &= ((id_M \otimes m_{\mathcal{L}})a_{M,\mathcal{L},\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{L},M} \otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L},M,\mathcal{L}})(l \otimes (l'_{(-1)} \cdot m \otimes l'_{(0)})) \\ &= ((id_M \otimes m_{\mathcal{L}})a_{M,\mathcal{L},\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{L},M} \otimes id_{\mathcal{L}}))((l \otimes l'_{(-1)} \cdot m) \otimes l'_{(0)}) \\ &= ((id_M \otimes m_{\mathcal{L}})a_{M,\mathcal{L},\mathcal{L}})(((l_{(-1)} \cdot (l'_{(-1)} \cdot m) \otimes l_{(0)}) \otimes l'_{(0)}) \\ &= (id_M \otimes m_{\mathcal{L}})(l_{(-1)} \cdot (l'_{(-1)} \cdot m) \otimes (l_{(0)} \otimes l'_{(0)})) \\ &= l_{(-1)} \cdot (l'_{(-1)} \cdot m) \otimes l_{(0)}l'_{(0)} \\ &= (l_{(-1)}l'_{(-1)}) \cdot m \otimes l_{(0)}l'_{(0)} \\ &\overset{(a)}{=} (ll')_{(-1)} \cdot m \otimes (ll')_{(0)} \\ &= \sigma_{\mathcal{L},M}(ll' \otimes m) \\ &= (\sigma_{\mathcal{L},M}(m_{\mathcal{L}} \otimes id_M))((l \otimes l') \otimes m), \end{aligned}$$

em que a igualdade (a) segue que do fato de que $\mathcal{L}$ é um H-comódulo álgebra à esquerda, veja Definição 2.74. Portanto, o diagrama (4.3) comuta. Resta mostrar que o diagrama (4.5) comuta. De fato,

$$\begin{aligned}
(\sigma_{\mathcal{L},M}(u_{\mathcal{L}} \otimes id_M))(1_{\mathbf{k}} \otimes m) &= \sigma_{\mathcal{L},M}(1_{\mathcal{L}} \otimes m)\\
&= (1_{\mathcal{L}})_{(-1)} \cdot m \otimes (1_{\mathcal{L}})_{(0)}\\
&\overset{\text{Def.2.74}}{=} 1_H \cdot m \otimes 1_{\mathcal{L}}\\
&= m \otimes 1_{\mathcal{L}}\\
&= (id_M \otimes u_{\mathcal{L}})(m \otimes 1_{\mathbf{k}})\\
&= ((id_M \otimes u_{\mathcal{L}})r_M^{-1})(m)\\
&= ((id_M \otimes u_{\mathcal{L}})r_M^{-1}l_M)(1_{\mathbf{k}} \otimes m)\\
&= ((id_M \otimes u_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathbf{k},M})(1_{\mathbf{k}} \otimes m).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{L}$ é uma álgebra base na categoria ${}_H\mathcal{M}$.

A partir de agora, $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ é uma categoria monoidal estrita e se $\mathcal{L}$ uma álgebra base em $\mathcal{C}$ com $\sigma_{\mathcal{L},X} : \mathcal{L} \otimes X \to X \otimes \mathcal{L}$ uma coleção de isomorfismos, então os diagramas da definição de álgebra base tornam-se mais "simplificados"

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{L}}\otimes f"'] & X \otimes \mathcal{L} \arrow[d, "f\otimes id_{\mathcal{L}}"] \\
\mathcal{L} \otimes Y \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},Y}"'] & Y \otimes \mathcal{L},
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

ou seja,

$$\sigma_{\mathcal{L},Y}(id_{\mathcal{L}} \otimes f) = (f \otimes id_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathcal{L},X} \tag{4.10}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \otimes X \otimes Y \arrow[rr, "\sigma_{\mathcal{L},X\otimes Y}"] \arrow[dr, "\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y"'] & & X \otimes Y \otimes \mathcal{L} \\
& X \otimes \mathcal{L} \otimes Y, \arrow[ur, "id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L},Y}"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

isto é, vale a igualdade

$$\sigma_{\mathcal{L},X\otimes Y} = (id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_Y) \tag{4.12}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\otimes X \arrow[r, "id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X}"] \arrow[d, "m\otimes id_X"'] & \mathcal{L}\otimes X\otimes\mathcal{L} \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}}"] & X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[d, "id_X\otimes m"] \\
\mathcal{L}\otimes X \arrow[rr, "\sigma_{\mathcal{L},X}"'] & & X\otimes\mathcal{L},
\end{tikzcd} \tag{4.13}$$

$$\sigma_{\mathcal{L},X}(m\otimes id_X) = (id_X\otimes m)(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X}) \tag{4.14}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[rr, "\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "m"'] & & \mathcal{L}\otimes\mathcal{L} \arrow[dl, "m"] \\
& \mathcal{L} &
\end{tikzcd} \tag{4.15}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, equal, "\sigma_{\mathbf{1},X}=id_X=id_{\mathbf{1}\otimes X}"] \arrow[d, "u\otimes id_X"'] & X\otimes\mathbf{1} \arrow[d, "id_X\otimes u"] \\
\mathcal{L}\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L},X}"'] & X\otimes\mathcal{L},
\end{tikzcd} \tag{4.16}$$

$$id_X\otimes u = \sigma_{\mathcal{L},X}(u\otimes id_X). \tag{4.17}$$

Sabemos que o produto tensorial de duas álgebras (comutativas) numa categoria monoidal trançada é uma álgebra (comutativa) (veja Proposição 2.66 e Proposição 3.15). Como o centro de uma categoria monoidal é uma categoria trançada, nos perguntamos se o produto tensorial de duas álgebras base poderia ser novamente uma álgebra base. Mostramos que sim, desde que as álgebras em questão satisfaçam Definição 3.12, e esse é o enunciado do teorema abaixo. Essencialmente, é fundamental verificarmos que os morfismos multiplicação e unidade do produto tensorial de duas álgebras base voltam a ser morfismos em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$.

Teorema 4.6. *Seja $(\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1})$ uma categoria monoidal estrita. Sejam $(\mathcal{L},\sigma_{\mathcal{L},-},m,u)$ e $(\mathcal{L}',\sigma_{\mathcal{L}',-},m',u')$ duas álgebras base na categoria $\mathcal{C}$ tais que $\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}$. Então $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$ é uma álgebra base em $\mathcal{C}$.*

Demonstração: O fato de que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são álgebras base, implica que as mesmas são objetos em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ e portanto, vale a igualdade (2.10). A Proposição 2.66 nos dá que $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$

é um objeto em $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$, em que $\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',-}$ é definida pela igualdade (2.10) mencionada há pouco e com morfismos multiplicação e unidade dados por

$$\widehat{m} = (m \otimes m')(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \text{ e } \widehat{u} = u \otimes u'$$

que satisfazem as comutatividades dos diagramas da definição de álgebra. Começamos mostrando a comutatividade do diagrama (4.9)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes f"'] & X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' \arrow[d, "f\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}"] \\
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes Y \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}"'] & Y\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',
\end{tikzcd}$$

para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$. Temos

$$\begin{aligned}
(f\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X} &\overset{(2.10)}{=} (f\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\\
&\overset{(4.10)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes f\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\\
&\overset{(4.10)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}\otimes f)\\
&= \sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes f).
\end{aligned}$$

As igualdades dadas por (4.10) ocorrem, pois $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são álgebras base. Agora, a verificação da comutatividade do diagrama (4.11), temos que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes X\otimes Y \arrow[rr, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X\otimes Y}"] \arrow[dr, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_Y"'] & & X\otimes Y\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' \\
& X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes Y \arrow[ur, "id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
&(id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y})(\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_Y)\\
&\overset{(2.10)}{=} (id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_X\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}\otimes id_Y)(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_Y)\\
&= (id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_Y)\\
&\overset{(4.12)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},X\otimes Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X\otimes Y})\\
&\overset{(2.10)}{=} \sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}$$

Com a comutatividade do diagrama (4.16), estaremos mostrando que o morfismo $\widehat{u}$ é um morfismo no centro de $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, equal, "\sigma_{\mathbf{1},X}=id_X"] \arrow[d, "\widehat{u}\otimes id_X"'] & X\otimes \mathbf{1} \arrow[d, "id_X\otimes\widehat{u}"] \\
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"'] & X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'.
\end{tikzcd}$$

De fato, para todo $X\in\mathcal{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}(\widehat{u}\otimes id_X) &\overset{(2.10)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(u\otimes u'\otimes id_X)\\
&\overset{(4.17)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(u\otimes id_X\otimes u')\\
&\overset{(4.17)}{=} (id_X\otimes u\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_X\otimes id_{\mathbf{1}}\otimes u')\\
&= id_X\otimes u\otimes u'\\
&= id_X\otimes\widehat{u}.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que o morfismo $\widehat{m}$ é também um morfismo no centro da categoria $\mathcal{C}$, ou seja, mostrar que o diagrama (4.13) comuta, veja abaixo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes X \arrow[r, "id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"] \arrow[d, "\widehat{m}\otimes id_X"'] & \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}"] & X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' \arrow[d, "id_X\otimes\widehat{m}"] \\
\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'\otimes X \arrow[rr, "\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"'] & & X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'.
\end{tikzcd}$$

Para todo $X\in\mathcal{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}(\widehat{m}\otimes id_X)\\
&\overset{(2.10)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(m\otimes m'\otimes id_X)(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}\otimes id_X)\\
&= (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(m\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes m'\otimes id_X)(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&= (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(m\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes m'\otimes id_X)(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&\overset{(4.14)}{=} (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(m\otimes id_X\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes id_X\otimes m')(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&= (\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes m')(m\otimes id_X\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&= (id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes m')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(m\otimes id_X\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})
\end{aligned}$$

$\overset{(4.14)}{=} (id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes m')(id_X \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$
$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})$
$= (id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes m')(id_X \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$
$(id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_X \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})$
$\overset{(4.12)}{=} (id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes m')(id_X \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$
$(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})$
$\overset{(4.10)}{=} (id_X \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes m')(id_X \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})$
$(id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})$
$\overset{(4.12)}{=} (id_X \otimes m \otimes m')(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})$
$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})$
$= (id_X \otimes m \otimes m')(id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})$
$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})$
$\overset{(2.10)}{=} (id_X \otimes \widehat{m})(\sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}).$

A comutatividade do diagrama (4.15) decorre da Proposição 3.15 e o leitor pode observar que naquela prova é usada a hipótese de que as álgebras cumpram a condição de centralizadoras uma da outra. Assim, concluímos a demonstração. ■

Colorário 4.7. *Sejam $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \cdots, \mathcal{L}_n$ álgebras base na categoria $\mathcal{C}$. Se $\sigma_{\mathcal{L}_s,\mathcal{L}_r}\sigma_{\mathcal{L}_r,\mathcal{L}_s} = id_{\mathcal{L}_r\otimes\mathcal{L}_s}$, para $r, s \in \{1, 2, \cdots, n\}$, então $\mathcal{L}_1\otimes\mathcal{L}_2\otimes\cdots\otimes\mathcal{L}_n$ é uma álgebra base na categoria $\mathcal{C}$.*

4.2 CATEGORIA DINÂMICA SOBRE UMA ÁLGEBRA BASE

Essa última seção do trabalho é desenvolvida com base em ([4], section 4.). Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e $\mathcal{B}$ uma subcategoria monoidal de $\mathcal{C}$. Dada uma álgebra base $(\mathcal{L}, \sigma_{\mathcal{L},-}, m, u)$ em $\mathcal{C}$, é construída uma nova categoria monoidal $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$ como segue.

Os objetos em $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$ são os mesmos de $\mathcal{B}$ e os morfismos em $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$ são tais que

$$Hom_{\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(X, Y \otimes \mathcal{L}).$$

Sejam $\bar{f} : A \to B$ e $\bar{f}' : B \to C$ morfismos em $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$, isto é, $\bar{f} : A \to B \otimes \mathcal{L}$, $\bar{f}' : B \to C \otimes \mathcal{L}$ morfismos em $\mathcal{C}$. A composição $\bar{f}'\bar{\circ}\bar{f} \in Hom_{\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}}(A, C) = Hom_{\mathcal{C}}(A, C \otimes \mathcal{L})$, isto é, $\bar{f}'\bar{\circ}\bar{f} : A \to C \otimes \mathcal{L}$ é definida como a composição de morfismos em $\mathcal{C}$, assim

$$\bar{f}'\bar{\circ}\bar{f} = (id_C \otimes m)(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f}.$$

Considerando $\bar{f}'' : C \to F \otimes \mathcal{L}$ outro morfismo em $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$ e sabendo que $\bar{f}''\bar{\circ}\bar{f}' : B \to F \otimes \mathcal{L}$, é definida a composição

$$(\bar{f}''\bar{\circ}\bar{f}')\bar{\circ}\bar{f} = (id_F \otimes m)(id_F \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}'' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f}. \tag{4.18}$$

Escrevemos também a composta

$$\bar{f}''\bar{\circ}(\bar{f}'\bar{\circ}\bar{f}) = (id_F \otimes m)(\bar{f}'' \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes m)(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f}. \tag{4.19}$$

Além disso, podemos introduzir em $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$ uma estrutura monoidal dada a seguir. Para $\bar{g} : D \to E$ morfismo em $\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}$, isto é, $\bar{g} : D \to E \otimes \mathcal{L}$ morfismo em $\mathcal{C}$, define-se

$$\bar{f}\overline{\otimes}\bar{g} : A \otimes D \to B \otimes E \otimes \mathcal{L}$$

por

$$\bar{f}\overline{\otimes}\bar{g} = (id_{B\otimes E} \otimes m)(id_B \otimes \sigma_{\mathcal{L},E} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g}). \tag{4.20}$$

Nossa contribuição para a demonstração do próximo teorema reside onde efetivamente é mostrado que $\overline{\otimes}$ é um funtor, oferecemos uma prova independente da apresentada em [4].

Teorema 4.8. *Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1})$ uma categoria monoidal estrita e $(\mathcal{L}, \sigma_{\mathcal{L},-}, m, u)$ uma álgebra base em $\mathcal{C}$. Então $(\overline{\mathcal{C}}_{\mathcal{L}}, \overline{\otimes})$ é uma categoria monoidal.*

Demonstração: Inicialmente mostremos a associatividade da composição $\bar{\circ}$, considerando os morfismos $\bar{f}$, $\bar{f}'$ e $\bar{f}''$ já definidos acima e sabendo que $\bar{f}''\bar{\circ}\bar{f}' : B \to F \otimes \mathcal{L}$, segue que

$$\begin{aligned}
(\bar{f}''\bar{\circ}\bar{f}')\bar{\circ}\bar{f} &\overset{(4.18)}{=} (id_F \otimes m)(id_F \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}'' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f} \\
&\overset{(2.11)}{=} (id_F \otimes m)(id_F \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes m)(\bar{f}'' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f} \\
&= (id_F \otimes m)(\bar{f}'' \otimes m)(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f} \\
&= (id_F \otimes m)(\bar{f}'' \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes m)(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{f} \\
&\overset{(4.19)}{=} \bar{f}''\bar{\circ}(\bar{f}'\bar{\circ}\bar{f}).
\end{aligned}$$

Antes de provarmos os axiomas do triângulo e do pentágono, observamos que

$$\overline{id}_X = \bar{l}_X = \bar{r}_X : X \otimes \mathbf{1} \to X \otimes \mathcal{L} \ (\mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1})$$

é definido por $\overline{id}_X = \bar{l}_X = \bar{r}_X = id_X \otimes u$ e

$$\bar{a}_{X,Y,Z} : X \otimes Y \otimes Z \to X \otimes Y \otimes Z \otimes \mathcal{L} \text{ é definido por } \bar{a}_{X,Y,Z} = id_{X\otimes Y\otimes Z} \otimes u.$$

Além disso,

$$\overline{id}_X\overline{\otimes}\bar{l}_Y : X \otimes \mathbf{1} \otimes Y \to X \otimes \mathbf{1} \otimes Y \otimes \mathcal{L} \text{ e } \bar{r}_X\overline{\otimes}\overline{id}_Y : X \otimes \mathbf{1} \otimes Y \to X \otimes \mathbf{1} \otimes Y \otimes \mathcal{L}$$

são definidos como

$$\bar{r}_X \overline{\otimes} \overline{id}_Y = \overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{l}_Y = (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes u).$$

Procedemos com a prova do axioma do triângulo, ou seja, verifiquemos que

$$(\overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{l}_Y) \,\bar{\circ}\, \bar{a}_{X,\mathbf{1},Y} = \bar{r}_X \overline{\otimes} \overline{id}_Y.$$

$$\begin{aligned}
(\overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{l}_Y) \,\bar{\circ}\, \bar{a}_{X,\mathbf{1},Y} &= (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)((\overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{l}_Y) \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{a}_{X,\mathbf{1},Y} \\
&= (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\quad (id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes u) \\
&\overset{(2.11)}{=} (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_X \otimes id_Y \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes m)(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\quad (id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes u) \\
&= (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_Y \otimes m) \\
&\quad (id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes u) \\
&= (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes (m(u \otimes id_{\mathcal{L}}))) \\
&\quad (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes u) \\
&\overset{(2.11)}{=} (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\quad (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes u) \\
&= (id_{X\otimes \mathbf{1}\otimes Y} \otimes m)(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_Y \otimes u) \\
&= \bar{r}_X \overline{\otimes} \overline{id}_Y.
\end{aligned}$$

A seguir, prosseguimos com o axioma do pentágono. Para isso, devemos mostrar que

$$((\overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{a}_{Y,Z,W}) \,\bar{\circ}\, \bar{a}_{X,Y\otimes Z,W}) \bar{\circ} (\bar{a}_{X,Y,Z} \overline{\otimes} \overline{id}_W) = \bar{a}_{X,Y,Z\otimes W} \,\bar{\circ}\, \bar{a}_{X\otimes Y,Z,W}.$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{X,Y,Z\otimes W} \,\bar{\circ}\, \bar{a}_{X\otimes Y,Z,W} &= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(\bar{a}_{X,Y,Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}})\bar{a}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\quad (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u).
\end{aligned}$$

Por outro lado, chamando

$$H = ((\overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{a}_{Y,Z,W}) \,\bar{\circ}\, \bar{a}_{X,Y\otimes Z,W}) \bar{\circ} (\bar{a}_{X,Y,Z} \overline{\otimes} \overline{id}_W),$$

segue que

$$\begin{aligned}
H &\overset{(4.18)}{=} (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})((\overline{id}_X \overline{\otimes} \bar{a}_{Y,Z,W}) \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}}) \\
&\quad (\bar{a}_{X,Y\otimes Z,W} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{a}_{X,Y,Z} \overline{\otimes} \overline{id}_W)
\end{aligned}$$

$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z} \otimes \sigma_{\mathcal{L},W} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z} \otimes u \otimes id_W \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},W}(u \otimes id_W)) \otimes u)$$
$$\overset{(4.17)}{=} (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z} \otimes (id_W \otimes u) \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes (m(u \otimes u))) \text{ [note: } u \otimes u = (u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{\mathbf{1}} \otimes u)]$$
$$\overset{(2.11)}{=} (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathbf{1}} \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u) \text{ [lembre que } W \otimes \mathbf{1} = W]$$
$$\overset{(2.11)}{=} (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W\otimes \mathcal{L}} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$$
$$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L},Y\otimes Z\otimes W}(u \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W}) \otimes m(u \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$$
$$\overset{(4.17),(2.11)}{=} (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})$$
$$(id_X \otimes id_{Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$$

$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m(u \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$
$\overset{(2.11)}{=} (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$
$= (id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes m)(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{X\otimes Y\otimes Z\otimes W} \otimes u)$
$= \overline{a}_{X,Y,Z\otimes W} \,\overline{\circ}\, \overline{a}_{X\otimes Y,Z,W}.$

Provemos que $\overline{\otimes}$ é de fato um funtor. Seja $\bar{g}' : E \to F \otimes \mathcal{L}$ e os demais morfismos como definidos acima. É necessário mostrarmos que

$$(\bar{f}'\overline{\otimes}\bar{g}')\overline{\circ}(\bar{f}\overline{\otimes}\bar{g}) = (\bar{f}'\overline{\circ}\bar{f})\overline{\otimes}(\bar{g}'\overline{\circ}\bar{g}).$$

Temos que $\bar{f}'\overline{\circ}\bar{f} : A \to C \otimes \mathcal{L}$, $\bar{g}'\overline{\circ}\bar{g} : D \to F \otimes \mathcal{L}$, $\bar{f}\overline{\otimes}\bar{g} : A \otimes D \to B \otimes E \otimes \mathcal{L}$, $\bar{f}'\overline{\otimes}\bar{g}' : B \otimes E \to C \otimes F \otimes \mathcal{L}$ e

$$(\bar{f}'\overline{\circ}\bar{f})\overline{\otimes}(\bar{g}'\overline{\circ}\bar{g}) = (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes m\otimes id_F\otimes m)(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g}).$$

Por outro lado,

$(\bar{f}'\overline{\otimes}\bar{g}')\overline{\circ}(\bar{f}\overline{\otimes}\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_{C\otimes F} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}' \otimes \bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{B\otimes E} \otimes m)(id_B \otimes \sigma_{\mathcal{L},E} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$= (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_{C\otimes F} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F\otimes\mathcal{L}} \otimes m)$
$(\bar{f}' \otimes \bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_B \otimes \sigma_{\mathcal{L},E} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$= (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_{C\otimes F} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F\otimes\mathcal{L}} \otimes m)$
$(\bar{f}' \otimes ((\bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathcal{L},E}) \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$\overset{(4.10)}{=} (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_{C\otimes F} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F\otimes\mathcal{L}} \otimes m)$
$(\bar{f}' \otimes (\sigma_{\mathcal{L},F\otimes\mathcal{L}}(id_{\mathcal{L}} \otimes \bar{g}')) \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$= (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_{C\otimes F} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F\otimes\mathcal{L}} \otimes m)$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},F\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$\overset{(4.12)}{=} (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_{C\otimes F} \otimes m \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F\otimes\mathcal{L}} \otimes m)$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes (id_F \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$\overset{(2.11),(4.15)}{=} (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_C \otimes id_F \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes m)(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F\otimes\mathcal{L}} \otimes (m\,\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}))(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes id_F \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$
$= (id_{C\otimes F} \otimes m)(id_C \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_C \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_F \otimes m)(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes m)$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes id_F \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},F} \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}' \otimes id_{\mathcal{L}} \otimes \bar{g}' \otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f} \otimes \bar{g})$

$\overset{(2.11)}{=} (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes m)(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$\overset{(4.15)}{=} (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes m\,\sigma^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes m)(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes id_F\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes m)(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})\,(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}}))(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$\overset{(2.11)}{=} (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes id_F\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})\,(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}}))(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$\overset{(4.12)}{=} (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes id_F\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(id_{C\otimes\mathcal{L}\otimes F}\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}})$
$(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes id_F\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes(\sigma^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\,(m\otimes id_{\mathcal{L}})\,\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}))(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$\overset{(4.10)}{=} (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes id_F\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_F\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes m))(id_{C\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes id_F\otimes m\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(id_C\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes m)\otimes(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes((id_F\otimes m)\,(\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}))\otimes m)(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})$
$(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$\overset{(4.14)}{=} (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes(\sigma_{\mathcal{L},F}\,(m\otimes id_F))\otimes m)(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (id_{C\otimes F}\otimes m)(id_C\otimes\sigma_{\mathcal{L},F}\otimes id_{\mathcal{L}})(id_C\otimes m\otimes id_F\otimes m)(\bar{f}'\otimes id_{\mathcal{L}}\otimes\bar{g}'\otimes id_{\mathcal{L}})(\bar{f}\otimes\bar{g})$
$= (\bar{f}'\bar{\circ}\bar{f})\overline{\otimes}(\bar{g}'\bar{\circ}\bar{g}).$

■

APÊNDICE A – SOBRE ÁLGEBRAS BASE

O objetivo desse apêndice é apresentar o prova do Teorema 4.6 admitindo que $\mathcal{C}$ não seja estrita. O leitor pode observar o quão longo tornam-se os cálculos uma vez que aplicamos numerosas vezes o axioma do pentágono. Enquanto que com a condição estrita, o pentágono trivializa-se, pois os morfismos tornam-se identidades.

Inicialmente queríamos desenvolver todo o Capítulo 4 sem admitir $\mathcal{C}$ estrita e de fato, provamos alguns resultados seguindo essa ideia. Inclusive este, que escolhemos para apresentar aqui no apêndice. Entretanto quando estávamos fazendo a prova de que $\overline{\otimes}$ é um funtor, de forma independente daquela apresentada em [4], como pode ser visto no Teorema 4.8, percebemos a inviabilidade de não considerar $\mathcal{C}$ estrita. Na realidade, a prova tornava-se inviável e partimos então para a condição estrita. Como dissemos, a ideia de fazer o apêndice foi com o intuito de se comparar as duas provas, mostrando como o emprego dessa condição pode viabilizar algumas demonstrações.

Teorema A.1. *Sejam $(\mathcal{L}, \sigma, m, u)$ e $(\mathcal{L}', \sigma, m', u')$ duas álgebras bases na categoria $\mathcal{C}$, se $\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}$, então $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$ é uma álgebra base na categoria $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Sabemos que $\sigma_{\mathcal{L},X} : \mathcal{L}\otimes X \to X \otimes \mathcal{L}$ para cada objeto X em $\mathcal{C}$. Seja $\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X} : (\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X \to X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')$, definido como

$$\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X} = a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \tag{A.1}$$

para qualquer objeto X em $\mathcal{C}$. Sabemos que $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$ é uma álgebra em $\mathcal{C}$ com multiplicação definida por

$$\widehat{m} = (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}.$$

Vamos começar mostrando que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(X\otimes Y) \arrow[r, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X\otimes Y}"] \arrow[d, "a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,Y}"'] & (X\otimes Y)\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')) \\
((\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X)\otimes Y \arrow[d, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_Y"'] & X\otimes(Y\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}') \arrow[u, "a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}"'] \\
(X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'))\otimes Y \arrow[r, "a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}"'] & X\otimes((\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes Y), \arrow[u, "id_X\otimes\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}"']
\end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$.

Pela definição de $\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}$ e de $\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}$, temos

$$\begin{aligned}
&a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes \widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X} \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,Y}\\
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y}))\\
&(id_X \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',Y})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_Y)((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_Y)(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_Y)\\
&((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}) \otimes id_Y)(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,Y}.
\end{aligned}$$

Aplicando o diagrama do pentágono no morfismo $(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,Y}$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y}))\\
&(id_X \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',Y})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_Y)((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_Y)(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_Y)\\
&((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}) \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,Y}(id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,Y}$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y}))\\
&(id_X \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',Y})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_Y)((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_Y)(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_Y)\\
&a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',Y}(id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}$$

Aplicando o diagrama do pentágono ao morfismo $(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',Y}$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y}))\\
&(id_X \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',Y})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_Y)((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}',Y}\\
&a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}(id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}$$

Utilizando o diagrama do pentágono ao morfismo $(id_X \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',Y})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_Y)$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y}))\\
&a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes Y}a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',Y}((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_Y)a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}',Y}a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}(id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})\\
&(id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes Y}$ e de $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}',Y}$

$$\begin{aligned}
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},Y\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y})a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',Y}a^{-1}_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',Y}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes Y})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}\\
&(id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}\\
&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X \otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (\sigma_{\mathcal{L},Y} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},Y\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',Y})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes Y})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}(id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})\\
&(id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}$$

Como

$$(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes Y})=(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{Y\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})$$

então

$$\begin{aligned}&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X\otimes(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},Y\otimes\mathcal{L}'}\\&(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{Y\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})\\&(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.\end{aligned}$$

Aplicando o diagrama do pentágono ao morfismo $(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},Y\otimes\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X\otimes(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'}))a_{X,\mathcal{L}\otimes Y,\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\&a^{-1}_{X\otimes\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{Y\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})\\&(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{X\otimes\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}$ e de $a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes Y}$

$$\begin{aligned}&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X\otimes(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'}))a_{X,\mathcal{L}\otimes Y,\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y)\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,Y,\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y}))\\&(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.\end{aligned}$$

O diagrama do pentágono aplicado ao morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,Y,\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y\otimes\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X\otimes(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'}))a_{X,\mathcal{L}\otimes Y,\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y)\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}'})\\&(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_Y))(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.\end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}'$ é uma álgebra base, e pelo diagrama (4.3) da definição temos

$$\begin{aligned}&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X\otimes(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'}))a_{X,\mathcal{L}\otimes Y,\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y)\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X\otimes Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}\end{aligned}$$

e assim, pela naturalidade de $a_{X,\mathcal{L}\otimes Y,\mathcal{L}'}$, segue que

$$\begin{aligned}&= a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})a_{X,Y\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}((id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L},Y})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{X,\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y)\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X\otimes Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}.\end{aligned}$$

Utilizando o diagrama do pentágono ao morfismo $a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_X\otimes a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'})a_{X,Y\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}&= a_{X\otimes Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(a^{-1}_{X,Y,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_X\otimes\sigma_{\mathcal{L},Y})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{X,\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_Y)\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X\otimes Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}\end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{L}$ uma álgebra base, segue pelo diagrama (4.3) da definição que

$$
\begin{aligned}
&= a_{X\otimes Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X\otimes Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X\otimes Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes Y}\\
&= \widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X\otimes Y}.
\end{aligned}
$$

Do exposto, podemos concluir que

$$
\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} = a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'} \tag{A.2}
$$

e por (A.1) temos que

$$
\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}} = a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \tag{A.3}
$$

e

$$
\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'} = a_{\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}. \tag{A.4}
$$

As últimas equações acima são úteis para demonstrar a comutatividade do último diagrama desse teorema. A seguir, mostramos que o seguinte diagrama comuta

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X \arrow[r, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"] \arrow[d, "id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes f"'] & X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}') \arrow[d, "f\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}"] \\
(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes Y \arrow[r, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}"'] & Y\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')
\end{tikzcd}
$$

em que $f : X \to Y$ é um morfismo em $\mathcal{C}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
&(f\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\\
&= (f\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&\overset{(a)}{=} a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}((f\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&= a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(((f\otimes id_{\mathcal{L}})\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&\overset{(b)}{=} a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}((\sigma_{\mathcal{L},Y}(id_{\mathcal{L}}\otimes f))\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&= a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes f)\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&\overset{(a)}{=} a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes(f\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&= a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes((f\otimes id_{\mathcal{L}'})\sigma_{\mathcal{L}',X}))a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&\overset{(c)}{=} a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',Y}(id_{\mathcal{L}'}\otimes f)))a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&= a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes f))a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\\
&\overset{(a)}{=} a_{Y,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},Y}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},Y,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',Y})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',Y}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes f)\\
&= \widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',Y}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes f)
\end{aligned}
$$

(a) se tem pela naturalidade de a, (b) e (c) são dados por $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ serem álgebras base.

Agora, vamos definir o morfismo unidade para $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$. Sejam u e u' os morfismos unidade de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ respectivamente, assim definimo $\widehat{u} = (u \otimes u')l_{\mathbf{1}}^{-1}$. Dessa forma, o próximo passo será demonstrar que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "\sigma_{\mathbf{1},X}"] \arrow[d, "\widehat{u}\otimes id_X"'] & X \otimes \mathbf{1} \arrow[d, "id_X \otimes \widehat{u}"] \\
(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') \otimes X \arrow[r, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"'] & X \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'),
\end{tikzcd}$$

em que $\sigma_{\mathbf{1},X} = r_X^{-1} l_X$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}(\widehat{u} \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}(((u \otimes u')l_{\mathbf{1}}^{-1}) \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}((u \otimes u') \otimes id_X)\\
&(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&\overset{(a)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})(u \otimes (u' \otimes id_X))\\
&a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})(id_{\mathcal{L}} \otimes (u' \otimes id_X))(u \otimes id_{\mathbf{1}\otimes X})\\
&a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X}(u' \otimes id_X)))(u \otimes id_{\mathbf{1}\otimes X})\\
&a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&\overset{(4.5)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes ((id_X \otimes u')\sigma_{\mathbf{1},X}))\\
&(u \otimes id_{\mathbf{1}\otimes X})a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes (id_X \otimes u'))(id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathbf{1},X})\\
&(u \otimes id_{\mathbf{1}\otimes X})a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes (id_X \otimes u'))(id_{\mathcal{L}} \otimes (r_X^{-1} l_X))(u \otimes id_{\mathbf{1}\otimes X})\\
&a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes (id_X \otimes u'))(id_{\mathcal{L}} \otimes r_X^{-1})(id_{\mathcal{L}} \otimes l_X)\\
&(u \otimes id_{\mathbf{1}\otimes X})a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&\overset{(b)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}} \otimes (id_X \otimes u'))(id_{\mathcal{L}} \otimes r_X^{-1})\\
&(u \otimes id_X)(id_{\mathbf{1}} \otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)\\
&\overset{(a)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X} \otimes u')a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathbf{1}}(id_{\mathcal{L}} \otimes r_X^{-1})(u \otimes id_X)\\
&(id_{\mathbf{1}} \otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l_{\mathbf{1}}^{-1} \otimes id_X)
\end{aligned}$$

$$\overset{(c)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes u')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathbf{1}})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathbf{1}}(id_{\mathcal{L}}\otimes r^{-1}_{X})(u\otimes id_X)$$
$$(id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)a_{\mathbf{1},\mathbf{1},X}(l^{-1}_{\mathbf{1}}\otimes id_X)$$
$$\overset{(d)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes u')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathbf{1}})r^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X}(u\otimes id_X)$$
$$(r_{\mathbf{1}}\otimes id_X)(l^{-1}_{\mathbf{1}}\otimes id_X)$$
$$= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes u')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathbf{1}})r^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X}(u\otimes id_X)$$
$$\overset{(f)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes u')r^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X}\sigma_{\mathcal{L},X}(u\otimes id_X)$$
$$\overset{(4.5)}{=} a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes u')r^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X}(id_X\otimes u)\sigma_{\mathbf{1},X}$$
$$\overset{(a)}{=} (id_X\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes u'))a_{X,\mathcal{L},\mathbf{1}}r^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X}(id_X\otimes u)\sigma_{\mathbf{1},X}$$
$$\overset{(e)}{=} (id_X\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes u'))(id_X\otimes r^{-1}_{\mathcal{L}})(id_X\otimes u)\sigma_{\mathbf{1},X}$$
$$= (id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes u')r^{-1}_{\mathcal{L}}u))\sigma_{\mathbf{1},X}.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}(u\otimes u')l^{-1}_{\mathbf{1}} &= (u\otimes u')r^{-1}_{\mathbf{1}}\\ &= (id_{\mathcal{L}}\otimes u')(u\otimes id_{\mathbf{1}})r^{-1}_{\mathbf{1}}\\ &= (id_{\mathcal{L}}\otimes u')r^{-1}_{\mathcal{L}}u.\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}&= (id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes u')r^{-1}_{\mathcal{L}}u))\sigma_{\mathbf{1},X}\\ &= (id_X\otimes((u\otimes u')l^{-1}_{\mathbf{1}}))\sigma_{\mathbf{1},X}\\ &= (id_X\otimes\widehat{u})\sigma_{\mathbf{1},X}.\end{aligned}$$

as igualdades (a) se tem pela naturalidade de a, (b) e (c) se tem, pois $(id_{\mathcal{L}}\otimes l_X)(u\otimes id_{\mathcal{L}\otimes X}) = (u\otimes id_X)(id_{\mathbf{1}}\otimes l_X)$ e $(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes u') = (id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes u')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathbf{1}})$, (d) e (e) pelo diagrama do triângulo e (f) pela naturalidade de r^{-1}.

Vamos demonstrar que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}((\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'))\otimes X \arrow[r, "\widehat{\widehat{\sigma}}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),X}"] \arrow[d, "\widehat{m}\otimes id_X"'] & X\otimes((\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')) \arrow[d, "id_X\otimes\widehat{m}"] \\ (\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X \arrow[r, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}"'] & X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\end{tikzcd}$$

em que

$$\begin{aligned}&\widehat{\widehat{\sigma}}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),X}\\ &= a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.\end{aligned}$$

Para começar, observemos que

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}(\widehat{m}\otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}((m\otimes m')\otimes id_X)\\
&(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).
\end{aligned}
$$

Pela naturalidaade do morfismo $a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}$

$$
\begin{aligned}
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(m\otimes(m'\otimes id_X))a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}\\
&(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X)\\
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})(m\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(m'\otimes id_X))\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(m\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(m'\otimes id_X))a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X)
\end{aligned}
$$

e como $\mathcal{L}'$ é uma álgebra base, (veja diagrama (4.4)), temos

$$
\begin{aligned}
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(m\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_X\otimes m'))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).
\end{aligned}
$$

Pela naturalidade do morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}$

$$
\begin{aligned}
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((m\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_X\otimes m'))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).
\end{aligned}
$$

Pela naturalidaade do morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}$

$$
\begin{aligned}
&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((m\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X}\otimes m')a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)\\
&((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$((m\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X}\otimes m')=(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes m')((m\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$

e dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned}&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes m')((m\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)\\
&((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).\end{aligned}$$

Notemos novamente que

$$(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X}\otimes m')=(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes m')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$

e assim,

$$\begin{aligned}&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes m')(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((m\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).\end{aligned}$$

Pelo diagrama (4.4) para a álgebra base $\mathcal{L}$, temos

$$\begin{aligned}&= a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_{X\otimes\mathcal{L}}\otimes m')((id_X\otimes m)\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).\end{aligned}$$

Pela naturalidaade do morfismo $a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)\\
&(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_X)(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X).\end{aligned}$$

Utilizando o diagrama do pentágono aplicado ao morfismo $(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_X)$

$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'} \otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_X)$$
$$((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_X)a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}$

$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'} \otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_X)(((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_X)$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}),\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}$$
$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'} \otimes id_X)((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_X)a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),\mathcal{L}',X}$$
$$((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}$$
$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'} \otimes id_X)a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}',X}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})$$
$$((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})$$
$$a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Utilizando o diagrama do pentágono aplicado ao morfismo

$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}',X}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'} \otimes id_X)$$

Obtemos que

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'\otimes X}\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Em seguida, pela naturalidade de $a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'\otimes X}$

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}'}(id_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
&(id_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&= (a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Além disso, temos que

$$
\begin{aligned}
&((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes X})\\
&= ((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(id_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(id_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}$

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Utilizando o diagrama do pentágono aplicado ao morfismo $(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}'}$

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Pela naturalidade de $a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}'}$ e de $a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}'}$

$$
\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),X,\mathcal{L}'}\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\\
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}),X,\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}
$$

Pelo diagrama do pentágono para $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}),X,\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{X\otimes\mathcal{L}'})a_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}),X,\mathcal{L}'}$ e pelo diagrama do pentágono para o morfismo $(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}'})$ e de $(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_X))\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_X)\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pelo diagrama (4.3) para a álebra base $\mathcal{L}'$ aplicado o morfismo

$$(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_X))\otimes id_{\mathcal{L}'})$$

obtemos

$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_X) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Aplicando o diagrama do pentágono ao morfismo $((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_X) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Utilizando o diagrama do pentágono para ao morfismo

$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$$

$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Pelo diagrama do pentágono para

$$(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$

temos

$$= (id_X(m \otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X}) \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$a_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'})id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Pela naturalidade de $(a_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes X,\mathcal{L}',\mathcal{L}'})$

$$= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes X),\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}$$
$$= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes X),\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Pela naturalidade de $a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes X),\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$

$$= (id_X(m\otimes m'))a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}a_{X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}),\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Aplicando o diagrama do pentágono ao morfismo $a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}a_{X\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}),\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$

$$= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Pela naturalidade de $(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X})\otimes id_{\mathcal{L}'}))\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Sabemos que

$$(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} = \sigma_{\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}}(id_{\mathcal{L}'}\otimes\sigma_{\mathcal{L},X})$$

e assim,

$$= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes (id_{\mathcal{L}'} \otimes \sigma_{\mathcal{L},X})) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Pela naturalidade de $(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X} \otimes id_{\mathcal{L}'})$ e de $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}'}$

$$= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Aplicando o diagrama do pentágono ao morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}$

$$= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Dado que

$$\sigma_{\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}} = a^{-1}_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}(id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}(\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}}$$

então

$$= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes (id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$
$$(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})$$
$$(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.$$

Aplicando o diagrama do pentágono aos morfismos

$$((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})$$

e

$$((id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',X,\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes (id_X \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $(a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$ e $(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}\otimes X} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Como

$$(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes X} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) = (id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})(\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}})$$

então

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Observamos que, de acordo com o diagrama do pentágono para o morfismo $(a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m \otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(\\
&a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes (\sigma_{\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}})) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{X,(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$ e $(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))a_{X,\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),\mathcal{L}'}\\
&(id_X\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}))\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}}))\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{X,\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'}))a_{X,\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}),\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}}))\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.\end{aligned}$$

Aplicando o diagrama do pentágono aos morfismos

$$a_{X,\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}),\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})$$

e

$$(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes a_{X,\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})$$

segue que

$$\begin{aligned}&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'}\\
&a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}}))\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $(a_{\mathcal{L}\otimes X,\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})$ e de $(a^{-1}_{\mathcal{L},X\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X \otimes (a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X \otimes ((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'}a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&(a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}) \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pelo diagrama do pentágono para o morfismo $a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}(a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X \otimes (a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X \otimes ((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{X\otimes\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}a_{(X\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}(((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}) \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade de $a_{X,\mathcal{L},(\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}'}$ e aplicando repetidas vezes a naturalidade de $a_{(X\otimes\mathcal{L})\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X \otimes (a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X \otimes ((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}))\\
&a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')}a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}) \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes X),\mathcal{L},\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pelo diagrama do pentágono para o morfismo $(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_X \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X \otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X \otimes (a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X \otimes ((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes (a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')}a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}((\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}) \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'} \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}) \otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes X),\mathcal{L},\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}} \otimes id_{\mathcal{L}'})((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X} \otimes id_{\mathcal{L}}) \otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (\sigma_{\mathcal{L},X} \otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes (id_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'} \otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Aplicando novamente o diagrama do pentágono para

$$(id_X \otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')}a_{X\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes X),\mathcal{L},\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes X,\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\\
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes X),\mathcal{L},\mathcal{L}'}((a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Aplicando a naturalidade de $a_{\mathcal{L}\otimes(\mathcal{L}'\otimes X),\mathcal{L},\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\\
&= (id_X(m\otimes m'))(id_X\otimes a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_X\otimes(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))\\
&(id_X\otimes((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_X\otimes a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X})\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{X,\mathcal{L},\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},X}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},X,\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',X}))\\
&(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',X})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}.
\end{aligned}$$

Pela definição de $\widehat{m}$ e $\widehat{\sigma}_{\mathcal{L},\otimes\mathcal{L}',X}$ temos

$$\begin{aligned}
&= (id_X\otimes\widehat{m})a_{X,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',x,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}\otimes\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X})\\
&a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',X}\\
&= (id_X\otimes\widehat{m})\widehat{\widehat{\sigma}}_{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'),X}.
\end{aligned}$$

Por último, vamos mostrar que o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}') \arrow[rr, "\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}"] \arrow[dr, "\widehat{m}"'] & & (\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}')\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}') \arrow[dl, "\widehat{m}"] \\
& \mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são álgebras base, então temos que $m = m\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}$ e $m' = m'\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$, em que m e m' são os morfismos de multiplicação de $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
&\widehat{m} = (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&= ((m\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})\otimes(m'\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&= (m\otimes m')(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&= (m\otimes m')(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade do morfismo $a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}
&= (m\otimes m')(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}
\end{aligned}$$

e aplicando a comutatividade do diagrama do pentágono ao morfismo $a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$, temos

$$\begin{aligned}
&= (m\otimes m')(id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}.
\end{aligned}$$

Pela naturalidade do morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}
&= (m\otimes m')a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}
\end{aligned}$$

e aplicando a comutatividade do diagrama do pentágono ao morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L}'}$

$$\begin{aligned}
&= (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))\\
&(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}.
\end{aligned}$$

Por hipótese, temos que $\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}$, desta forma

$$
\begin{aligned}
&= (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&= (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}}\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}))\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&= (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}.
\end{aligned}
$$

Pela naturalidade do morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}$

$$
\begin{aligned}
&= (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}\\
&(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})\\
&a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}
\end{aligned}
$$

e aplicando o do diagrama do pentágono ao morfismo $a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}'\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}'}$

$$
\begin{aligned}
&= (m\otimes m')a_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'})(id_{\mathcal{L}}\otimes(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})\\
&(id_{\mathcal{L}}\otimes(id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}'}))(id_{\mathcal{L}}\otimes a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}'})a_{\mathcal{L},\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}'}(a_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}'})\otimes id_{\mathcal{L}'})\\
&(a^{-1}_{\mathcal{L},\mathcal{L},\mathcal{L}'}\otimes id_{\mathcal{L}'})((id_{\mathcal{L}}\otimes\sigma_{\mathcal{L}',\mathcal{L}})\otimes id_{\mathcal{L}'})(a_{\mathcal{L},\mathcal{L}',\mathcal{L}}\otimes id_{\mathcal{L}})a^{-1}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L},\mathcal{L}'}.
\end{aligned}
$$

de ($A.2$), ($A.3$) e ($A.4$), temos
$= \widehat{m}\widehat{\sigma}_{\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}',\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'}$.

■

REFERÊNCIAS

[1] AWODEY, S. **Category Theory**. Oxford. 2006.

[2] BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra:Basic Category Theory**. Cambridge University Press. 1994.

[3] DĂSCĂLESCU, S.; NĂSTĂSESCU, C.; RAIANU, S. **Hopf Algebras: An Introduction**. Marcel Dekker. 2001.

[4] DONIN, J.; MUDROV, A. **Dynamical Yang-Baxter equation and quantum vector bundles**, Commun. Math. Phys. 254 (2005), 719-760.

[5] DODL, L. **A estrutura monoidal da categoria**$_A\mathcal{C}_A$. Dissertação (Mestrado). UFSC. 2021.<https://ppgmtm.paginas.ufsc.br/files/2017/09/Lucas-Dodl-e-Souza.pdf>.

[6] DRINFEL'D, V.G. **Quantum Group**, in: Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Berkeley, CA, USA (1987) 798-820.

[7] ETINGOF, P.; GELAKI, S.; NIKSHYCH, D.; OSTRIK, V. **Tensor Categories**. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society. Vol. 205. 2015.

[8] ETINGOF, P.; GOLBERG, O; HENSEL, S.; LIU, T.; SCHWENDNER, A.; VAINTROB, D.; YUDOVINA, E. **Introduction to Representation Theory**. American Mathematical Society. 2010.

[9] GRAY, J. W. **Formal Category Theory**. Springer-Verlag. 1974.

[10] GREENOUGH, J. **Bimodule categories and monoidal 2-structure** (2010). Doctoral Dissertations. 532. University of New Hampshire, Durham.

[11] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. Springer-Verlag. 2000.

[12] JOYAL, A.; STREET, R. **Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories**. J. Pure Appl. Algebra. 71 (1991) 43-51.

[13] KOWALSKI, P. **Homological Algebra**. Notas de aula. 2015. Disponível em: <http://www.math.uni.wroc.pl/~pkowa/mojeprace/alghomobilgi.pdf>.

[14] LIU, Z.; ZHU, S. **Centers of braided tensor categories**. arXiv: 2108.09102v1 (2021).

[15] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. Springer. 1997.

[16] MAJID, S. **Quasitriangular Hopf algebras**. Comm. Algebra 11 (1991) 3061-3073.

[17] MOMBELLI, J. M. **Una Introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**. Notas de aula. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>. Acesso em 2 de maio de 2021.

[18] MOMBELLI, J. M. **Constructing Dynamical twists over a non-abelian base**, Appl Categor Struct 18, 407–429 (2010). https://doi.org/10.1007/s10485-008-9173-0

[19] MÜGER, M. **Galois extensions of braided tensor categories and the modular closure**, Adv. Math. 150 (2000), no. 2, 151.

[20] MÜGER, M. **On the structure of modular categories**, Proc. Lond. Math. Soc. 87 (2003), 291.

[21] OSTRIK, V. **Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants**. Transform. Groups. 2003.

[22] PINTER, S. **Sobre equivariantização de categorias módulo e seus objetos simples**. Tese (Doutorado). UFSC. 2017.

[23] RADFORD, D. **Hopf Algebras**. Series on Knots and Everything. World Scientific. Vol. 49. 2012.

[24] RADFORD, D. **Solutions to the quantum Yang-Baxter equation and the Drinfel'd double**. J. Algebra. 161 (1993) 20-32.

[25] RADFORD, D.; TOWBER, J. **Yetter-Drinfel'd categories associated to an arbitrary bialgebras**. J. Pure Appl. Algebra. 87 (1993) 259-279.

[26] SAAVEDRA RIVANO, Neantro. **Catégories tannakiennes.** Bulletin de la Société Mathématique de France, v. 100, p. 417-430, 1972.

[27] SCHAUENBURG, P. **The monoidal center construction and bimodules**. J. Pure Appl, 2001. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/82431435.pdf>.