



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Javier Esneider Méndez Alfonso

A categoria de módulos parciais de uma álgebra de grupo finito

Florianópolis
2024

Javier Esneider Méndez Alfonso

A categoria de módulos parciais de uma álgebra de grupo finito

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do título de doutor em matemática pura e aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Eliezer Batista

Florianópolis

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.
Dados inseridos pelo próprio autor.

Méndez Alfonso, Javier Esneider

A categoria de módulos parciais de uma álgebra de grupo finito / Javier Esneider Méndez Alfonso ; orientador, Eliezer Batista, 2024.

140 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Representações parciais. 3. Hopf algebróides. 4. Álgebras de Hopf fracas. 5. Categorias monoidais. I. Batista, Eliezer. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Javier Esneider Méndez Alfonso

A categoria de módulos parciais de uma álgebra de grupo finito

O presente trabalho em nível de doutorado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Héctor Pinedo
Universidad Industrial de Santander

Prof. Dr. Mikhailo Dokuchaev
Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Oscar Francisco Márquez Sosa
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Dirceu Bagio
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Felipe Lopes Castro
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de doutor em matemática pura e aplicada.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Dr. Eliezer Batista
Orientador

Florianópolis, 2024.

Dedico este trabajo a mis abuelitos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as pessoas que me fazem bem todo dia, e me desejam sucesso; seria difícil mencioná-las todas, mas tenho certeza que as suas preces e boas energias fizeram possível que eu chegasse até aqui, principalmente, pela disposição nos momentos de angústia e desespero.

Agradeço imensamente ao meu orientador, professor Eliezer, pela sua compreensão, paciência, conselhos, ensinamentos, e reitero, pela imensa paciência e humanidade neste período de doutoramento.

Agradeço aos membros da banca, por aceitarem o convite.

Um agradecimento muito especial e cheio de amor à Andressita, pela parceria e apoio incondicional.

Por último, devo agradecer à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

*“Tú, no te detengas ante ningún reto.
Y no pases a formar parte de ningún gremio.
Que nunca te puedan definir ni encasillar.”
(Andrés Caicedo)*

RESUMO

Neste trabalho apresentamos a estrutura monoidal da categoria de representações parciais de um grupo finito G , que corresponde à categoria de módulos sobre a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$, denotada como $\mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}$. Mostramos que esta categoria tem uma estrutura monoidal, pois a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ tem estrutura de Hopf algebroide. Além disso, utilizamos o isomorfismo entre a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ e a álgebra do grupóide $\Gamma(G)$, denotada por $\mathbb{k}\Gamma(G)$, para descrever para descrever de maneira explícita os objetos simples nesta categoria. Como resultados relevantes, mostramos o Teorema da Árvore de Natal, que diz que, dados um grupo finito G e um subgrupo $H \leq G$, existe um funtor aditivo, monoidal, fiel e injetivo nos objetos entre a categoria dos módulos sobre $\mathbb{k}H$ e a categoria dos módulos sobre $\mathbb{k}_{par}(G)$. Também mostramos o Teorema da Matryoshka, que diz que, dado um grupo abeliano finito G e um subgrupo $H \leq G$ existe um funtor aditivo, monoidal, fiel e injetivo nos objetos entre a categoria dos módulos sobre $\mathbb{k}_{par}(H)$ e a categoria dos módulos sobre $\mathbb{k}_{par}(G)$.

Palavras-chave: representações parciais; álgebras de Hopf fracas; Hopf algebróides; álgebra de Hopf parcial; álgebra de grupóide.

ABSTRACT

In this work we study the monoidal structure of the category of partial representations of a finite group G , that it is the same category of modules over the algebra $\mathbb{k}_{par}(G)$, denoted by $\mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}$. We show that this category has a monoidal structure, because the algebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ has a structure of Hopf algebroid. We use the isomorphism between the algebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ and the groupoid algebra of $\Gamma(G)$, denoted by $\mathbb{k}\Gamma(G)$, to describe explicitly the simple objects in this category. Our most relevant results are the “Christmas tree”, than, for every finite group G and each subgroup H of G , there exists an additive, monoidal, faithful and injective-on-objects functor between the category of modules over $\mathbb{k}H$ and the category of modules over $\mathbb{k}_{par}(G)$. And finally, the “Matryoshka’s Theorem”, than, for every finite abelian group G and each subgroup H of G , there exists an additive, monoidal, faithful and injective-on-objects functor between the category of modules over $\mathbb{k}_{par}(H)$ and the category of modules over $\mathbb{k}_{par}(G)$.

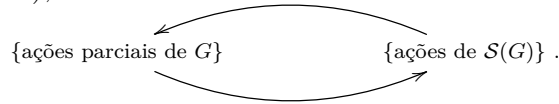
Keywords: partial representations; weak Hopf algebras; Hopf algebroids; partial Hopf algebra; groupoid algebra.

SUMÁRIO

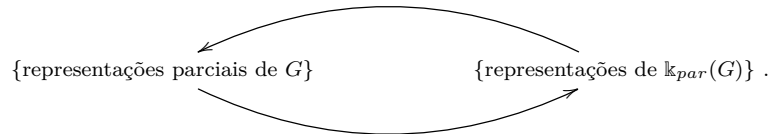
	INTRODUÇÃO	10
1	REPRESENTAÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E A ÁLGEBRA DE GRUPOIDE	16
1.1	REPRESENTAÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS	16
1.2	$\mathbb{K}_{par}(G)$ COMO ÁLGEBRA DE GRUPOIDE	24
1.2.1	Álgebra de Grupóide	24
1.2.2	Exemplos de $\mathbb{K}\Gamma(G)$	36
2	ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS E HOPF ALGEBRÓIDES	42
2.1	ÁLGEBRAS DE HOPF FRACAS	42
2.2	HOPF ALGEBRÓIDES	57
2.3	REPRESENTAÇÕES PARCIAIS DE ÁLGEBRAS DE HOPF	65
2.3.1	A “álgebra de Hopf” parcial	75
3	ESTRUTURA MONOIDAL	92
3.1	OBJETOS SIMPLES	94
4	TEOREMA DA ÁRVORE DE NATAL E DA MATRYOSHKA	100
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A – TEOREMA DOS GRUPOS ABELIANOS FINITOS	116
	APÊNDICE B – EXEMPLOS	117

INTRODUÇÃO

O estudo de ações parciais (de grupos) tem sido explorado desde a década dos anos 90 em vários contextos. Por exemplo, em [21] é construída uma relação biunívoca entre as ações parciais do grupo G e as ações de certo semigrupo inverso $\mathcal{S}(G)$ (construído a partir do próprio grupo G),



Sendo assim, o estudo de ações parciais teve avanços importantes no estudo de C^* -álgebras, mas é em [14], [15], e [17] que se concentrou mais no aspecto algébrico, pois são definidas as ações e representações parciais de grupos sobre álgebras e, em especial, é apresentada uma correspondência um-a-um entre as representações parciais de grupos e certa “álgebra de grupo parcial” chamada $\mathbb{k}_{par}(G)$ (construída a partir do próprio G),



Neste sentido, faz-se uma analogia à correspondência bem conhecida que existe entre o estudo das representações de um grupo G sobre \mathbb{k} -espaços vetoriais e a teoria de representações da álgebra $\mathbb{k}G$.

Todavia, em [15] (com uma pequena correção para grupos não abelianos realizada depois em [17]) é feita uma construção alternativa através de grupóides para estudar e entender melhor a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$. Assim, é construído um grupóide associado ao grupo G , denominado $\Gamma(G)$, e a álgebra gerada como \mathbb{k} -espaço vetorial pelos elementos desse grupóide, denominada $\mathbb{k}\Gamma(G)$, que resulta isomorfa a $\mathbb{k}_{par}(G)$ quando G é finito, ver Teorema 1.13,

$$\mathbb{k}_{par}(G) \cong \mathbb{k}\Gamma(G),$$

onde

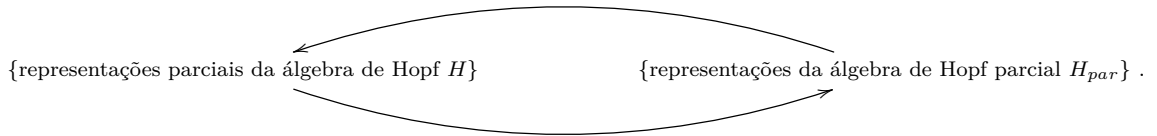
$$\mathbb{k}\Gamma(G) = \sum_{\substack{H \leq G \\ 1 \leq m \leq (G:H)}} c_m(H) M_m(\mathbb{k}H),$$

ver página 35. Neste sentido, é interessante estudar a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ através da álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$, com o intuito de entender como as representações parciais podem ser “decompostas” em componentes mais simples. Tal decomposição pode motivar outros estudos sobre a estrutura do grupo mesmo e a sua teoria de representação parcial.

Quando o grupo G não é finito, este isomorfismo não é válido. No entanto, em [18] é mostrado que é possível obter uma correspondência entre as representações parciais irredutíveis de grau finito do grupo G e as representações irredutíveis de certos ideais da álgebra de grupóide $\mathbb{k}\Gamma(G)$, que tem a ver com as componentes conexas de $\Gamma(G)$, ver Teoremas 3.2 e 3.4.

E se continuarmos nesse caminho, poderíamos enunciar muitos outros avanços que foram realizados no contexto de ações e representações parciais, que continuam sendo de grande interesse mesmo depois de mais de duas décadas, veja outras abordagens em [1], [2] e [12].

As representações parciais de uma álgebra de Hopf foram introduzidas em [4]. É explorada a sua relação com as ações parciais e são apresentados alguns exemplos, tudo no contexto de álgebras de Hopf. Em particular, para cada álgebra de Hopf, é associada a álgebra H_{par} que tem a propriedade universal de fatorar toda representação parcial da álgebra H por um morfismo de álgebras de H_{par} , ver Teorema 2.38,



Isto é de grande interesse, pois a categoria dos módulos parciais sobre uma álgebra de Hopf H resulta ser a mesma categoria de módulos sobre H_{par} , veja Proposição 2.40. Mas a estrutura de H_{par} visto como um Hopf algebróide permite melhorar a estrutura da categoria de H -módulos parciais, munindo a mesma de uma estrutura monoidal. Estas novas técnicas de estudos sobre Hopf algebróides são exploradas em [7], [8] e bem detalhadas em [24], o que nos permite estudar a estrutura monoidal de H_{par} como Hopf algebróide, sendo que, quando $H = \mathbb{k}G$ e G finito, temos que

$$H_{par} = (\mathbb{k}G)_{par} = \mathbb{k}_{par}(G) \cong \mathbb{k}\Gamma(G).$$

Este último isomorfismo de Hopf algebróides é resultado de estudar a estrutura de álgebra Hopf fraca de $\mathbb{k}\Gamma(G)$, o que a mune de uma estrutura de Hopf algebróide, [9], [10], [26] e [28].

Nos próximos parágrafos, descrevemos, de forma geral, a estrutura da tese e seus objetivos, destacando as contribuições e resultados principais.

No primeiro capítulo apresentamos os conceitos básicos de representações parciais no contexto de grupos, bem como algumas definições e notações que são usuais dentro do estudos das mesmas. Notações estas que serão usadas no percurso desse trabalho. Alguns exemplos particulares são descritos, que evidenciam a importância de representações parciais, pois toda ação parcial induz uma representação parcial. Além disso, no capítulo é apresentado o isomorfismo que existe entre a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ e a álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$, quando G finito, lembrando que em [15] e [17], a estrutura de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é descrita em detalhe, decompondo-a de tal forma que fica mais “simples” de estudá-la. Temos então que a teoria de representações parciais de um grupo G é a mesma teoria de representações das álgebras $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$. Terminamos este capítulo fornecendo alguns exemplos que visam dar uma ideia do nosso resultado principal.

No segundo capítulo, inicialmente introduzimos a definição de álgebra de Hopf fraca e mostramos que a álgebra do grupóide $\Gamma(G)$, associado ao grupo G , é também uma

álgebra de Hopf fraca. É importante destacar que a subálgebra \mathcal{A}_Γ desempenha um papel importante no decorrer dos seguintes passos. Em particular, apresentamos o isomorfismo Teorema 2.18 que nos revela técnicas para trabalhar com o produto tensorial quando balanceado sobre a álgebra base \mathcal{A}_Γ .

Depois disto, ainda no capítulo segundo, introduzimos a definição de Hopf algebróide, destacamos que toda álgebra de Hopf fraca é um Hopf algebróide e, portanto, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ tem uma estrutura de Hopf algebróide. Em seguida, introduzimos a definição de representação parcial no contexto de álgebras de Hopf, [4] e estudamos dois exemplos importantes: uma representação parcial gerada a partir de uma ação parcial; e uma outra representação parcial relacionada ao produto smash parcial e, similar ao feito em representações de grupos, nos dedicamos a descrever a “álgebra de Hopf” parcial H_{par} (construída a partir de uma álgebra de Hopf H), e a propriedade universal que faz com que o seguinte diagrama comute para qualquer representação parcial de álgebra de Hopf $\pi : H \rightarrow B$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\pi} & B \\ & \searrow [\] & \nearrow \tilde{\pi} \\ & & H_{par} \end{array}$$

Definimos módulos parciais sobre uma álgebra de Hopf H e destacamos que esta categoria é isomorfa à categoria dos módulos sobre H_{par} , ${}_H\mathcal{M}^{par} \cong {}_{H_{par}}\mathcal{M}$. Mostramos que a álgebra parcial de Hopf é um Hopf algebróide e em particular, quando $H = \mathbb{k}G$, $(\mathbb{k}G)_{par} = \mathbb{k}_{par}(G)$, logo, encerramos este capítulo descrevendo a estrutura da álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ como Hopf algebróide.

No terceiro capítulo nos dedicamos a provar que o isomorfismo apresentado no Teorema 1.13 preserva as estruturas de Hopf algebróides das álgebras $\mathbb{k}_{par}(G)$ e $\mathbb{k}\Gamma(G)$, o que nos garante a seguinte equivalência de categorias monoidais:

$$\left(\mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{A}_{par}}, \mathcal{A}_{par} \right) \cong \left(\mathbb{k}\Gamma(G)\mathcal{M}, \boxtimes, \mathcal{A}_\Gamma \right)$$

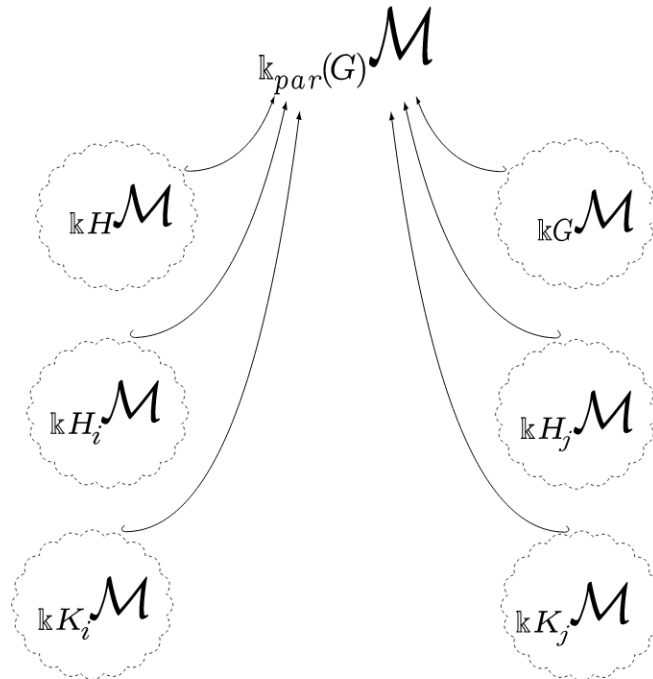
Em seguida, descrevemos os módulos simples da categoria dos módulos parciais. Destacamos dois teoremas importantes: o Teorema 3.2, que diz basicamente que *toda representação parcial irredutível de grau finito de um grupo finito G está em correspondência com uma única componente conexa Σ de $\Gamma(G)$ e uma única representação irredutível de $\mathbb{k}\Sigma$* ; e o Teorema 3.4, que diz que *se $\pi : G \rightarrow \text{End}(\mathbb{V})$ é uma representação parcial de G irredutível e de grau finito, então $\mathbb{k}\Sigma \cong \mathbb{k}\Sigma\mathbb{W} \otimes_{\mathbb{k}H} U$, onde $H \leq G$ é o grupo estabilizador de um vértice de Σ , e Σ é a componente conexa de $\Gamma(G)$ associada a π , U é um $\mathbb{k}H$ -módulo irredutível e \mathbb{W} é um $\mathbb{k}\Sigma$ - $\mathbb{k}H$ -bimódulo (que corresponde a certa representação parcial monomial sobre H de G)*. É importante também destacar que, neste ponto, apresentamos detalhadamente uma construção alternativa para caracterizar os módulos simples sobre a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ e finalizamos este capítulo com alguns exemplos com o

intuito de visualizar melhor esta caracterização alternativa das representações parciais irredutíveis de um grupo finito G .

No quarto e último capítulo, apresentamos os dois teoremas principais desta tese: “Árvore de Natal” e “Matryoshka”. A essência ou “filosofia” por trás dos nomes surge de que, essencialmente, o primeiro teorema, O Teorema 4.1, válido para grupos finitos, estabelece que as representações dos subgrupos de G estão na categoria de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos, isto através de um funtor que é aditivo, monoidal, injetivo nos objetos e fiel. Com isto, se H é um subgrupo de G , as representações de H (no sentido clássico), podem ser vistas dentro da categoria dos $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos, como vértices com tantas flechas quantos elementos do subgrupo H , quando visto o grupoide associado a $\Gamma(G)$,

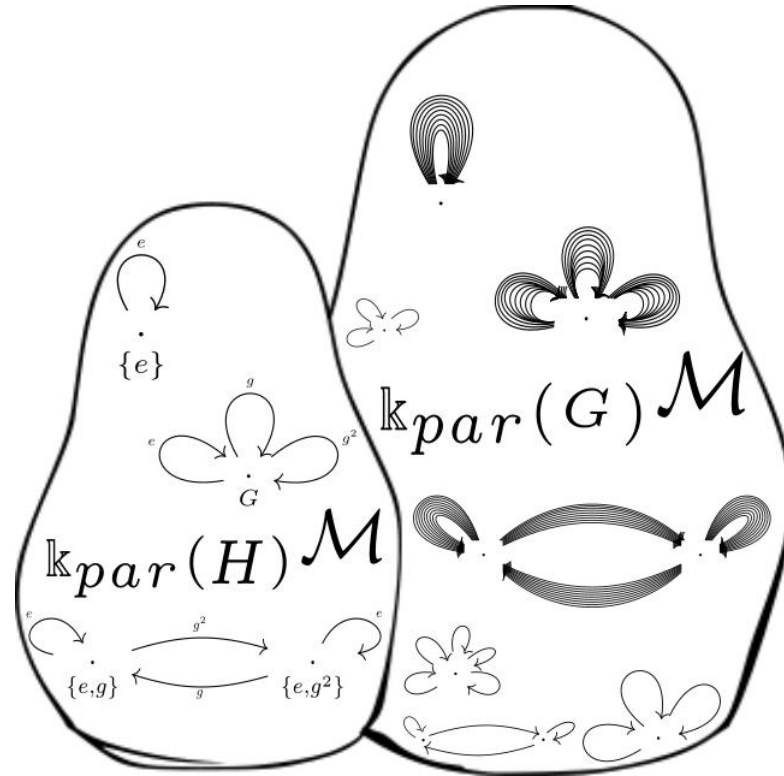
$$\{\text{Representações de } H\} \xrightarrow{\subseteq} \{\text{Representações parciais } G\}$$

A relação anterior é demonstrada e definida mediante um funtor monoidal da categoria dos $\mathbb{k}H$ -módulos na categoria dos $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos parciais. Se fizermos isto para cada subgrupo de forma independente teremos algo do tipo,



em que, H, H_i, H_j, K_i, K_j estão representando subgrupos de G (imagem anterior é meramente ilustrativa).

Por outro lado, o Teorema 4.4 chamado de *Teorema da Matryoshka*, carrega as representações parciais de cada subgrupo H de um grupo G abeliano e finito, e é chamado desse jeito porque de fato visualizamos esta relação de “carregar”, como algo do tipo



A imagem acima é de novo apenas ilustrativa, mas ela é significativa e representa em parte como o grupóide no Exemplo 1.15 é visualizado dentro do grupóide no Exemplo 1.17. Nesta imagem em particular, temos à esquerda o grupóide associado ao grupo \mathbb{Z}_3 , que são essas três componentes conexas (grafos orientados) que se veem facilmente. Já na imagem à direita, temos algumas das componentes conexas do grupóide associado ao grupo \mathbb{Z}_{27} . Observe que, há três componentes conexas visivelmente notórias, e estas coincidentemente possuem a mesma “geometria” das três componentes conexas mencionadas anteriormente. Veremos que isto é um forte indicativo de que a categoria das representações parciais do grupo \mathbb{Z}_3 está de fato “bem mergulhada” (relação funtorial) na categoria das representações parciais do grupo \mathbb{Z}_{27} .

Mostramos que esta relação define um funtor que é injetivo nos objetos, fiel, aditivo e monoidal entre a categoria de representações de $\mathbb{k}_{par}(H)$ e a categoria de representações de $\mathbb{k}_{par}(G)$.

Primeiro, esta construção é feita para um grupo de ordem p^n , onde p é um número primo, e depois generalizamos para um grupo abeliano finito G , nos apoiando no Teorema de estrutura de grupos abelianos finitos, conhecido na literatura como Teorema dos divisores elementares, enunciado no Apêndice A.1. Segundo este Teorema, todo grupo abeliano finito pode ser escrito na forma

$$G = \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_n^{\alpha_n}},$$

onde p_i são números primos não necessariamente distintos.

Ao longo deste trabalho, \mathbb{k} denota um corpo algebricamente fechado de característica zero, e G um grupo finito com elemento neutro e . O anel de matrizes de tamanho

$m \times m$ com entradas em A será denotado por $M_m(A)$, onde m é um inteiro positivo.

Para simplificar a notação, adotamos a notação de Sweedler, omitindo o somatório sempre que conveniente. Iremos mencionar isto novamente no Capítulo 2.

Optamos por incluir a maioria das demonstrações para tornar o texto o mais autocontido possível.

1 REPRESENTAÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E A ÁLGEBRA DE GRUPOIDE

Neste capítulo, introduzimos alguns conceitos básicos sobre representações parciais de um grupo G , a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ e a sua estrutura como álgebra de grupóide, além de apresentar alguns exemplos. A maioria desses conceitos são bastante conhecidos na literatura, e podem ser consultados em [14], [15], [16], [17] e [18], entre outros.

1.1 REPRESENTAÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS

Definição 1.1. Seja G um grupo. Uma \mathbb{k} -representação parcial de G sobre a \mathbb{k} -álgebra A é uma aplicação $\pi : G \rightarrow A$ tal que:

- (i) $\pi(e) = 1_A$;
- (ii) $\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})$;
- (iii) $\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh)$,

para todo $g, h \in G$. Quando $A = \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{V})$, sendo \mathbb{V} um \mathbb{k} -espaço vetorial, dizemos que π é uma \mathbb{k} -representação parcial de G sobre o espaço vetorial \mathbb{V} . Nesse caso, devemos ter presente que 1_A denota a unidade de $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{V})$, que é a identidade do espaço vetorial \mathbb{V} , denotada por $\text{Id}_{\mathbb{V}}$. A partir de agora, escreveremos simplesmente 1_A , salvo quando for necessário contextualizar e especificar a unidade da álgebra.

Observe que toda \mathbb{k} -representação de G sobre \mathbb{V} , no sentido clássico, também conhecida como \mathbb{k} -representação global de G , é uma \mathbb{k} -representação parcial de G . A recíproca dessa afirmação não é sempre verdadeira. Daqui em diante, escrevemos apenas “representação de G ” e “representação parcial de G ”, omitindo a referência ao corpo \mathbb{k} . Além disso, sempre que não especificarmos que a representação é parcial, estaremos nos referindo a uma representação global no sentido clássico.

Segue diretamente da definição de representação parcial de G que

$$\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g) \quad \text{e} \quad \pi(g^{-1})\pi(g)\pi(g^{-1}) = \pi(g^{-1}), \quad (1.1)$$

para todo $g \in G$. O exemplo a seguir apresenta representações parciais de G que podem ser obtidas a partir de uma representação de G , ver [1] e [3].

Exemplo 1.2. Seja $\rho : G \rightarrow GL(\mathbb{V})$ uma representação de G . Considere uma aplicação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, tal que $T^2 = T$. Se T comuta com a aplicação

$$T_g = \rho(g) \circ T \circ \rho(g^{-1}),$$

para todo g em G , então a aplicação

$$\tilde{\rho} : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(T(\mathbb{V})),$$

definida por $\tilde{\rho}(g) = T \circ \rho(g)$ é uma representação parcial de G sobre $T(\mathbb{V})$.

De fato, seja $w \in T(\mathbb{V})$, logo $w = T(v)$ para algum $v \in \mathbb{V}$, então

$$\tilde{\rho}(e)(w) = T(\rho(e)(w)) = T(\rho(e)(T(v))) = T(T(v)) = T(v) = w,$$

pois ρ é uma representação de G e $T^2 = T$. Como w é arbitrário então $\tilde{\rho}(e) = \text{Id}_{T(\mathbb{V})}$, que é a unidade de $\text{End}_{\mathbb{k}}(T(\mathbb{V}))$.

Sejam $g, h \in G$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(g) \circ \tilde{\rho}(h) \circ \tilde{\rho}(h^{-1})(w) &= \tilde{\rho}(g) \circ \tilde{\rho}(h) \left(T(\rho(h^{-1})(w)) \right) \\ &= \tilde{\rho}(g) \left(T \left(\rho(h) \left(T(\rho(h^{-1})(w)) \right) \right) \right) \\ &= \tilde{\rho}(g) \left(T(T_h(w)) \right) \\ &= \tilde{\rho}(g) \left(T_h(T(w)) \right) \\ &= \tilde{\rho}(g) \left(T_h(T(T(v))) \right) \\ &= \tilde{\rho}(g) \left(T_h(T(v)) \right) \\ &= \tilde{\rho}(g) \left(T_h(w) \right) \\ &= T \left(\rho(g) \left(T_h(w) \right) \right) \\ &= T \left(\rho(g) \left(\rho(h) T \rho(h^{-1})(w) \right) \right) \\ &= T \left(\rho(gh) T \rho(h^{-1})(w) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(gh) \circ \tilde{\rho}(h^{-1})(w) &= \tilde{\rho}(gh) \left(T \rho(h^{-1})(w) \right) \\ &= T \left(\rho(gh) T \left(\rho(h^{-1})(w) \right) \right). \end{aligned}$$

Como w foi tomado arbitrariamente, segue que

$$\tilde{\rho}(g) \circ \tilde{\rho}(h) \circ \tilde{\rho}(h^{-1}) = \tilde{\rho}(gh) \circ \tilde{\rho}(h^{-1}).$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(g^{-1}) \circ \tilde{\rho}(g) \circ \tilde{\rho}(h) &= T \circ \rho(g^{-1}) \circ T \circ \rho(g) \circ T \circ \rho(h) \\ &= T \circ T_{g^{-1}} \circ T \circ \rho(h) \\ &= T_{g^{-1}} \circ T \circ T \circ \rho(h) \\ &= T_{g^{-1}} \circ T \circ \rho(h). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(g^{-1}) \circ \tilde{\rho}(gh) &= T \circ \rho(g^{-1}) \circ T \circ \rho(gh) \\ &= T \circ \rho(g^{-1}) \circ T \circ \rho(g) \rho(h) \\ &= T \circ T_{g^{-1}} \circ \rho(h) \\ &= T_{g^{-1}} \circ T \circ \rho(h). \end{aligned}$$

Dessa forma, temos

$$\tilde{\rho}(g^{-1}) \circ \tilde{\rho}(gh) = \tilde{\rho}(g^{-1}) \circ \tilde{\rho}(gh).$$

Portanto, $\tilde{\rho}$ é representação parcial de G sobre $T(\mathbb{V})$. Observe que, em geral, $\tilde{\rho}$ não é uma representação global.

A seguir, um exemplo mostrando que também é possível obter representações parciais a partir de ações parciais de grupos sobre álgebras, mais detalhes podem ser consultados em [4] e [14].

Exemplo 1.3. Seja G um grupo e A uma álgebra unital. Uma ação parcial α de G em A , que denotaremos por $G \curvearrowright_p A$, é um par $(\{A_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$ que consiste de uma coleção $\{A_g\}_{g \in G}$ de ideais de A e de uma coleção $\{\alpha_g : A_{g^{-1}} \rightarrow A_g\}_{g \in G}$ de isomorfismos de álgebras, que satisfaz as seguintes condições:

$$i) \quad A_e = A, \text{ e } \alpha_e = 1_A;$$

$$ii) \quad \alpha_g(A_{g^{-1}} \cap A_h) = A_g \cap A_{gh};$$

$$iii) \quad \alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_{gh}(a), \text{ para todo } a \text{ em } A_{h^{-1}} \cap A_{(gh)^{-1}}.$$

Seja $\{1_g\}_{g \in G}$ uma família de idempotentes centrais em A . Suponha $A_g = 1_g A$ para todo $g \in G$, logo cada A_g é uma álgebra unital com unidade 1_g . Assumimos que α_g é um isomorfismo de álgebras, isto é, $\alpha_g(1_{g^{-1}}) = 1_g$, para todo $g \in G$. Esse tipo de ação parcial é conhecida como *ação parcial unital*.

Observe que, para qualquer $g, h \in G$, o elemento $1_g 1_h$ é a unidade da álgebra $A_g \cap A_h$. Logo, pelo fato de $\alpha_{h^{-1}}$ ser isomorfismo de álgebras e de

$$\alpha_{h^{-1}}(A_h \cap A_{g^{-1}}) \stackrel{ii)}{=} A_{h^{-1}} \cap A_{(gh)^{-1}},$$

segue que

$$\alpha_{h^{-1}}(1_h 1_{g^{-1}}) = 1_{h^{-1}} 1_{(gh)^{-1}}. \quad (1.2)$$

Sob estas condições, a aplicação

$$\pi : G \longrightarrow \mathbf{End}_{\mathbb{k}}(A),$$

definida por $\pi(g)(a) = \alpha_g(a 1_{g^{-1}})$ para todo $a \in A$ é uma representação parcial de G .

De fato, seja $a \in A$, então

$$\pi(e)(a) = \alpha_e(a 1_e) = a 1_e = a,$$

e, para todo $g, h \in G$,

$$\begin{aligned} \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})(a) &= \alpha_g\left(\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a 1_h) 1_{h^{-1}}\right) 1_{g^{-1}}\right) \\ &= \alpha_g\left(\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a 1_h) \alpha_{h^{-1}}(1_h)\right) 1_{g^{-1}}\right) \\ &= \alpha_g\left(\alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a 1_h 1_h)\right) 1_{g^{-1}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha_g \left(\alpha_h \left(\alpha_{h^{-1}}(a1_h) \right) 1_{g^{-1}} \right) \\
&= \alpha_g \left(a1_h 1_{g^{-1}} \right).
\end{aligned}$$

Esta última igualdade é uma consequência de $a1_h \in A_h \cap A_e$ e $1_h \in A_h \cap A_e$.

Por outro lado,

$$\pi(gh)\pi(h^{-1})(a) = \alpha_{gh}(\alpha_{h^{-1}}(a1_h)1_{(gh)^{-1}}),$$

e pelo fato de que $\alpha_{h^{-1}}(a1_h)$ está em $A_{h^{-1}} = 1_{h^{-1}}A$ e $1_{h^{-1}}$ é idempotente central, obtemos

$$\begin{aligned}
&= \alpha_{gh}(\alpha_{h^{-1}}(a1_h)1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}) \\
&\stackrel{(1.2)}{=} \alpha_{gh}(\alpha_{h^{-1}}(a1_h)\alpha_{h^{-1}}(1_h 1_{g^{-1}})) \\
&= \alpha_{gh}(\alpha_{h^{-1}}(a1_h 1_h 1_{g^{-1}})) \\
&= \alpha_{gh}(\alpha_{h^{-1}}(a1_h 1_{g^{-1}})) \\
&\stackrel{iii)}{=} \alpha_g(a1_h 1_{g^{-1}}),
\end{aligned}$$

pois $a1_h 1_{g^{-1}} \in A_h \cap A_{g^{-1}} = A_h \cap A_{(gh)h^{-1}}^{-1}$. Portanto,

$$\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1}).$$

Analogamente,

$$\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh).$$

Portanto, $\pi : G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(A)$ assim definida é uma representação parcial de G em A .

Observação 1.4. Não é difícil verificar que, se $\varphi : G \rightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos e $\pi : G' \rightarrow A$ é uma representação parcial de G' , então $\pi \circ \varphi : G \rightarrow A$ é uma representação parcial de G . De fato, sejam e o elemento neutro de G e e' é o elemento neutro de G' . Então, temos que

$$\pi \circ \varphi(e) = \pi(\varphi(e)) = \pi(e') = 1_A.$$

Agora, veja que,

$$\begin{aligned}
\pi(\varphi(g^{-1}))(\pi(\varphi(g))(\pi(\varphi(h))) &= \pi(\varphi(g^{-1}))\pi(\varphi(g)\varphi(h)) \\
&= \pi(\varphi(g^{-1}))(\pi(\varphi(gh))).
\end{aligned}$$

Logo,

$$(\pi \circ \varphi)(g^{-1})(\pi \circ \varphi)(g)(\pi \circ \varphi)(h) = (\pi \circ \varphi)(g^{-1})(\pi \circ \varphi)(gh).$$

Analogamente, provamos que

$$(\pi \circ \varphi)(g)(\pi \circ \varphi)(h)(\pi \circ \varphi)(h^{-1}) = (\pi \circ \varphi)(gh)(\pi \circ \varphi)(h^{-1}).$$

Portanto, temos que $\pi \circ \varphi$ é uma representação parcial de G .

A seguir, definimos a álgebra parcial de grupo, ou álgebra das representações parciais do grupo G . Como G é um grupo finito, as representações dessa álgebra estão em correspondência biunívoca com as representações parciais do grupo G , ver [14], [15] e [18].

Definição 1.5. Seja G um grupo. A \mathbb{k} -álgebra parcial de grupo $\mathbb{k}_{par}(G)$, é definida como sendo a álgebra universal gerada pelo conjunto $\{[g] : g \in G\}$, que satisfaz as seguintes relações:

- $[e] = \mathbf{1}$, a unidade de $\mathbb{k}_{par}(G)$;
- $[g][h][h^{-1}] = [gh][h^{-1}]$;
- $[g^{-1}][g][h] = [g^{-1}][gh]$;

para cada $g, h \in G$.

A aplicação $[\] : G \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(G)$, definida por $[\](g) := [g]$, com as propriedades acima descritas é uma representação parcial de G . Todavia, se $\pi : G \longrightarrow A$ é uma outra representação parcial de G , então pela propriedade universal da álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ existe um único morfismo de \mathbb{k} -álgebras unitais $\varphi : \mathbb{k}_{par}(G) \longrightarrow A$ tal que $\varphi \circ [\] = \pi$, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & A \\ & \searrow [\] & \nearrow \varphi \\ & \mathbb{k}_{par}(G) & \end{array}$$

Reciprocamente, se $\varphi : \mathbb{k}_{par}(G) \longrightarrow \mathcal{A}$ é um morfismo de \mathbb{k} -álgebras unitais, então $\varphi \circ [\]$ é uma representação parcial de G .

Assim, temos a correspondência biunívoca entre representações parciais de G e as representações de $\mathbb{k}_{par}(G)$, ver [15].

Definimos $\epsilon_g = [g][g^{-1}]$ para cada $g \in G$. O espaço vetorial gerado por esses símbolos ϵ_g 's define a subálgebra de $\mathbb{k}_{par}(G)$, denotada por $\mathcal{A}_{par}(G)$. Por enquanto, estudamos algumas propriedades já conhecidas desses símbolos, e mais adiante provaremos propriedades importantes dessa subálgebra, em particular, veremos a propriedade universal da $\mathcal{A}_{par}(G)$. A seguir apresentamos alguns resultados e propriedades bem conhecidas na literatura, ver [12], entre outros.

Lema 1.6. *As seguintes propriedades valem para cada $g, h \in G$:*

- a) $\epsilon_e = \mathbf{1}$;
- b) $\epsilon_g \epsilon_g = \epsilon_g$;
- c) $\epsilon_g \epsilon_h = \epsilon_h \epsilon_g$;
- d) $[g][h] = \epsilon_g [gh]$;
- e) $[g]\epsilon_h = \epsilon_{gh}[g]$, logo $\epsilon_g[h] = [h]\epsilon_{h^{-1}g}$.

Demonstração. Para cada $g, h \in G$, temos

a) e b) seguem diretamente da definição;

c)

$$\begin{aligned}
\epsilon_g \epsilon_h &= [g][g^{-1}][h][h^{-1}] \\
&= [g][g^{-1}h][h^{-1}] \\
&= [(hh^{-1})g][g^{-1}h][h^{-1}] \\
&= [h(g^{-1}h)^{-1}][g^{-1}h][h^{-1}] \\
&= [h][(g^{-1}h)^{-1}][g^{-1}h][h^{-1}] \\
&= [h][(g^{-1}h)^{-1}][(g^{-1}h)h^{-1}] \\
&= [h][h^{-1}g][g^{-1}] \\
&= [h^{-1}][h][g][g^{-1}] \\
&= \epsilon_h \epsilon_g.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\epsilon_g[gh] &= [g][g^{-1}][gh] \\
&= [g][g^{-1}gh] \\
&= [g][h].
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{gh}[g] &= [gh][(gh)^{-1}][g] \\
&= [gh][(gh)^{-1}g] \\
&= [gh][h^{-1}] \\
&= [g][h][h^{-1}] \\
&= [g]\epsilon_h.
\end{aligned}$$

□

Com isso, podemos definir as “projeções” sobre cada subconjunto X de G , como segue:

$$P_X = \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (1 - \epsilon_h).$$

Essas projeções P_X 's ficam bem definidas, pois G é finito, e satisfazem as propriedades no seguinte lema, ver [4], [12], [18], entre outros.

Lema 1.7. *Para quaisquer $X, Y \subseteq G$ vale,*

(a) *Se $e \notin X$ então $P_X = 0$;*

(b) *Se $t \notin X$ então $P_X[t] = 0$, e se $t^{-1} \notin X$ então $[t]P_X = 0$;*

(c) $P_X P_Y = \begin{cases} P_X, & \text{se } X = Y, \\ 0, & \text{se } X \neq Y; \end{cases}$

$$(d) [t]P_X = P_{tX}[t].$$

Demonstração. (a) Se $e \notin X$, então $\mathbf{1} - \epsilon_e = \mathbf{1} - \mathbf{1} = 0$ é uma das parcelas de $\prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h)$.

Logo,

$$P_X = \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h) = 0.$$

(b) Se $t \notin X$, então

$$(\mathbf{1} - \epsilon_t)[t] = (\mathbf{1} - ([t][t^{-1}]))[t] = [t] - [t][t^{-1}][t] \stackrel{(1.1)}{=} [t] - [t] = 0$$

é uma das parcelas de $\prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h)[t]$. Logo,

$$P_X[t] = \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h)[t] = 0.$$

E se $t^{-1} \notin X$, então

$$\begin{aligned} [t]P_X &= [t] \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h) \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_{tg} [t] \prod_{\substack{h \notin X \\ h \neq t^{-1}}} (\mathbf{1} - \epsilon_h)(\mathbf{1} - \epsilon_{t^{-1}}) && \text{(Lema 1.6, item (d))} \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_{tg} \prod_{\substack{h \notin X \\ h \neq t^{-1}}} (\mathbf{1} - \epsilon_{th}) [t] (\mathbf{1} - [t^{-1}][t]) && \text{(Lema 1.6, item (d))} \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_{tg} \prod_{\substack{h \notin X \\ h \neq t^{-1}}} (\mathbf{1} - \epsilon_{th}) ([t] - [t][t^{-1}][t]) \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_{tg} \prod_{\substack{h \notin X \\ h \neq t^{-1}}} (\mathbf{1} - \epsilon_{th}) ([t] - [t]) = 0. \end{aligned}$$

(c) Se $X = Y$, como $\epsilon_g \epsilon_g = \epsilon_g$ e $\epsilon_g \epsilon_h = \epsilon_h \epsilon_g$, então $P_X P_X = P_X$.

Por outro lado, se $X \neq Y$, suponha que existe por exemplo $t \in X$ e $t \notin Y$, então

$$\begin{aligned} P_X P_Y &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h) \prod_{r \in Y} \epsilon_r \prod_{s \notin Y} (\mathbf{1} - \epsilon_s) \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \epsilon_t \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h) \prod_{r \in Y} \epsilon_r \prod_{\substack{s \notin Y \\ s \neq t}} (\mathbf{1} - \epsilon_s) (\mathbf{1} - \epsilon_t) \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h) \epsilon_t \prod_{r \in Y} \epsilon_r \prod_{\substack{s \notin Y \\ s \neq t}} (\mathbf{1} - \epsilon_s) (\mathbf{1} - \epsilon_t) \\ &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (\mathbf{1} - \epsilon_h) \prod_{r \in Y} \epsilon_r \epsilon_t \prod_{\substack{s \notin Y \\ s \neq t}} (\mathbf{1} - \epsilon_s) (\mathbf{1} - \epsilon_t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (1 - \epsilon_h) \prod_{r \in Y} \epsilon_r \prod_{\substack{s \notin Y \\ s \neq t}} (1 - \epsilon_s) \epsilon_t (1 - \epsilon_t) \\
 &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (1 - \epsilon_h) \prod_{r \in Y} \epsilon_r \prod_{\substack{s \notin Y \\ s \neq t}} (1 - \epsilon_s) (\epsilon_t - \epsilon_t \epsilon_t) \\
 &= \prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{h \notin X} (1 - \epsilon_h) \prod_{r \in Y} \epsilon_r \prod_{\substack{s \notin Y \\ s \neq t}} (1 - \epsilon_s) (\epsilon_t - \epsilon_t) = 0.
 \end{aligned}$$

Analogamente, se supormos que existe $s \in Y$ e $s \notin X$, então $P_X P_Y = 0$.

(d) Segue diretamente de $[t]\epsilon_g = \epsilon_{tg}[t]$, (Lema 1.6). \square

A notação $\mathcal{P}_{g_1, g_2, \dots, g_n}$ denota a coleção $\{X \subseteq G : g_1, g_2, \dots, g_n \in X\}$. Em particular, \mathcal{P}_e é a coleção de subconjuntos de G que contém o elemento neutro do grupo. Mais adiante precisaremos especificar o grupo, nesse caso escrevemos $\mathcal{P}_e(G)$.

Observação 1.8. Segue da propriedade (c) do Lema 1.7 que a coleção $\{P_X : X \in \mathcal{P}_e\}$ é uma família de idempotentes ortogonais em $\mathbb{k}_{par}(G)$.

No seguinte lema descrevemos a unidade da álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$ em função dessas projeções, ver [15], [18], entre outros.

Lema 1.9. *As seguintes igualdades valem:*

$$\mathbf{1} = \sum_{X \subseteq G} P_X = \sum_{X \in \mathcal{P}_e} P_X,$$

em que $\mathbf{1}$ é a unidade de $\mathbb{k}_{par}(G)$.

Demonstração. De fato, veja que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} &= \prod_{g \in G} (1) \\
 &= \prod_{g \in G} ((1 - \epsilon_g) + \epsilon_g) \\
 &= \sum_{X \subseteq G} \left(\prod_{g \in X} \epsilon_g \prod_{g \notin X} (1 - \epsilon_g) \right) \\
 &= \sum_{X \subseteq G} P_X.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, segue do Lema 1.7 item (a) que, $P_X = 0$ para todo X que não contém e , logo

$$\mathbf{1} = \sum_{X \subseteq G} P_X = \sum_{X \in \mathcal{P}_e} P_X. \quad \square$$

Observação 1.10. As propriedades descritas anteriormente sobre os ϵ_g 's e os P_X 's se estendem para qualquer \mathbb{k} -representação parcial $\pi : G \rightarrow \mathcal{A}$, definindo

$$\epsilon_g^\pi = \pi(g)\pi(g^{-1}) \quad \text{e} \quad P_X^\pi = \prod_{g \in X} \epsilon_g^\pi \prod_{h \notin X} (1 - \epsilon_h^\pi).$$

1.2 $\mathbb{K}_{par}(G)$ COMO ÁLGEBRA DE GRUPOIDE

Nesta seção introduzimos a álgebra de grupóide $\mathbb{k}\Gamma(G)$, cuja estrutura foi estudada em [15] para descrever a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$. Esta álgebra, quando G finito, resulta isomorfa à álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$. Mesmo para grupos não finitos, existe uma correspondência biunívoca entre as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathbb{k}_{par}(G)$ e as representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathbb{k}\Gamma(G)$, ver [4], [12], [15], [17], [18], [21].

1.2.1 Álgebra de Grupóide

Um **grupóide** é uma categoria pequena Γ em que todo morfismo é um isomorfismo. Logo, para cada morfismo $\gamma : X \rightarrow Y$ em Γ , com X, Y objetos de Γ , existe um morfismo $\gamma^{-1} : Y \rightarrow X$ em Γ tal que $\gamma^{-1} \circ \gamma = \text{Id}_X$ e $\gamma \circ \gamma^{-1} = \text{Id}_Y$.

Seja Γ um grupóide. O conjunto dos objetos de Γ é usualmente denotado por $\Gamma^{(0)}$ e é chamado de conjunto de vértices do grupóide Γ . O conjunto dos morfismos de Γ é usualmente denotado por $\Gamma^{(1)}$. Observe que, se $X \in \Gamma^{(0)}$, então existe o morfismo identidade $\text{Id}_X : X \rightarrow X$. Logo, podemos definir uma aplicação

$$\Gamma^{(0)} \ni X \mapsto \text{Id}_X \in \Gamma^{(1)}.$$

Iremos nos referir às *unidades* do grupóide Γ como sendo a aplicação que leva cada objeto no seu morfismo identidade. Sendo assim, é possível identificar os elementos do conjunto $\Gamma^{(0)}$ como elementos de Γ na forma de morfismos identidade.

Seja Γ um grupóide. São definidas as funções *source* e *target*, que associam a cada morfismo o “objeto de partida” e o “objeto de chegada”, respectivamente. Isto é,

$$\begin{array}{ccc} s : \Gamma^{(1)} & \longrightarrow & \Gamma^{(0)}, & t : \Gamma^{(1)} & \longrightarrow & \Gamma^{(0)} \\ \gamma & \longmapsto & X & \gamma & \longmapsto & Y \end{array} ,$$

onde $\gamma : X \rightarrow Y$. O produto de dois elementos em $\Gamma^{(1)}$ é definido pela lei de composição de morfismos, ou seja, só é possível quando componíveis. Quando o produto é definido, ele é associativo.

Sejam Γ um grupóide qualquer e A um vértice de Γ . O grupo de isotropia G_A de A é definido por

$$G_A := \{\gamma \in \Gamma^{(1)} : s(\gamma) = t(\gamma) = A\}.$$

A partir de um grupóide, é possível definir uma álgebra da seguinte forma. Seja Γ um grupóide qualquer. A **álgebra do grupóide** Γ , denotada por $\mathbb{k}\Gamma$, é definida como o

espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{k} gerado pela base Γ , isto é, $\mathbb{k}\Gamma = \text{span}\Gamma$, em que o produto é dado pela regra

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1 \gamma_2, & \text{se } s(\gamma_1) = t(\gamma_2), \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.3)$$

para todo $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, e estendida linearmente sobre $\mathbb{k}\Gamma$.

Apresentamos a seguir o grupóide que nos interessa estudar, cuja álgebra está relacionada à álgebra $\mathbb{k}_{\text{par}}(G)$. Lembramos que, ao longo deste trabalho G denota um grupo finito com elemento neutro e .

Considere $\Gamma(G)$ como sendo o grupóide cujos morfismos são os pares (g, A) tais que $g \in G$ e A é um subconjunto de G contendo e e g^{-1} , isto é, $A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}$.

Os objetos de $\Gamma(G)$ são a coleção de subconjuntos de G que contém o elemento neutro e , ou seja, $\Gamma(G)^{(0)} = \mathcal{P}_e$. Quando dissermos que A é um vértice de $\Gamma(G)$, entenda-se $A \in \mathcal{P}_e$.

As funções *source*, *target* e o *inverso* de (g, A) são dadas por

$$s(g, A) = A, \quad t(g, A) = gA, \quad \text{e} \quad (g, A)^{-1} = (g^{-1}, gA),$$

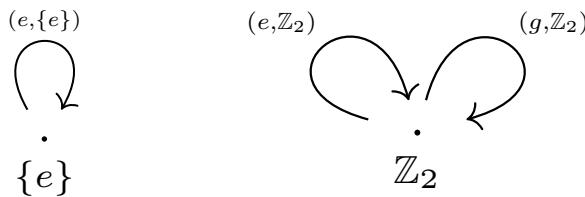
respectivamente. Uma *unidade* de $\Gamma(G)$ é a aplicação que leva $A \in \mathcal{P}_e$ em (e, A) .

O produto em $\Gamma(G)$ é definido como segue. Para cada $(g, A), (h, B)$ em $\Gamma(G)$,

$$(g, A) \cdot (h, B) = (gh, B),$$

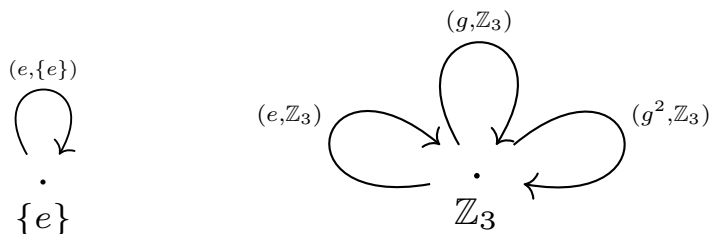
se $A = hB$, ou seja, se $s(g, A) = t(h, B)$.

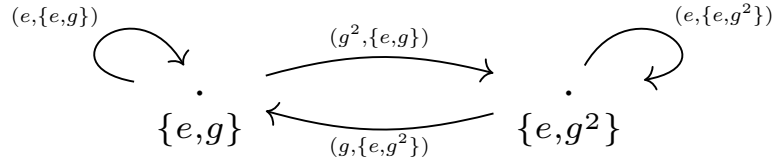
Por exemplo, o grupóide associado ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_2 = \langle g : g^2 = e \rangle$, é o conjunto $\Gamma(\mathbb{Z}_2) = \{(e, \{e\}), (e, \{e, g\}), (g, \{e, g\})\}$, e pode ser representado por



Mais adiante, iremos simplificar a notação usada para realizar o grupóide associado $\Gamma(G)$.

Similarmente, o grupóide associado ao grupo cíclico $\mathbb{Z}_3 = \langle g : g^3 = e \rangle$, denotado por $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$, pode ser representado da seguinte forma:





Definimos a álgebra do grupóide $\Gamma(G)$ como feito na Seção 1.2.1 e, em diante, quando escrevermos a *álgebra de grupóide*, fica subentendido que estamos nos referindo à álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$ em menção. Destacamos que o produto em (1.3) é dado pela regra

$$(g, A) \cdot (h, B) = \begin{cases} (gh, B), & \text{se } A = hB, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (1.4)$$

para todo $(g, A) \in \Gamma(G)$, $(h, B) \in \Gamma(G)$, estendida linearmente sobre $\mathbb{k}\Gamma(G)$.

Para facilitar a escrita, usamos o *valor booleano* para escrever o produto em (1.4), ou seja,

$$(g, A) \cdot (h, B) = \llbracket A = hB \rrbracket (gh, B).$$

Em geral, $\llbracket \text{Afirmação} \rrbracket = 1$ se “Afirmação” é verdadeira e $\llbracket \text{Afirmação} \rrbracket = 0$ se “Afirmação” é falsa. Este valor booleano será usado em varias ocasiões no decorrer do presente trabalho.

Como G é finito, $\Gamma(G)$ é finito e, portanto, a álgebra $\mathbb{K}\Gamma(G)$ é unital com unidade

$$1_{\mathbb{K}\Gamma(G)} = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A).$$

Uma conta rápida mostra que a cardinalidade de $\Gamma(G)$, isto é, o número de pares (g, A) é $2^{|G|-2}(|G| + 1)$, que é exatamente a dimensão de $\mathbb{k}\Gamma(G)$.

O grupo de isotropia de um grupóide qualquer é formado pelos morfismos γ tais que $s(\gamma) = t(\gamma)$, isto é, aqueles cujo objeto de partida e de chegada coincidem. Logo, se A é um vértice do grupóide $\Gamma(G)$, podemos escrever

$$G_A = \{(h, A) : h^{-1} \in A, hA = A\},$$

isto é,

$$G_A = \{h \in G : hA = A\},$$

que é o grupo estabilizador de A . Algumas vezes, iremos omitir a palavra “grupo” e escrevemos apenas *isotropia* ou *estabilizador* de A .

Por exemplo, se G é um grupo de ordem prima, então $G_A = \{e\}$ para todo $A \in \mathcal{P}_e$, com $A \neq G$. Se $A = G$, o seu grupo de isotropia é o grupo G .

Em geral, seja Γ um grupóide qualquer. Um *subgrupóide* Σ de Γ é uma subcategoria de Γ tal que, para qualquer morfismo em Σ , o seu inverso permanece em Σ . Dizemos que um subgrupóide Σ de Γ é *maximal* se não existe nenhum outro subgrupóide $\Sigma' \neq \Sigma$ tal

que $\Sigma \subset \Sigma'$ e $\Sigma \neq \Sigma'$. Dizemos que um subgrupóide Σ é *conexo* se, para qualquer par de objetos x e y em Σ , existe um morfismo entre x e y que está em Σ .

Uma *componente conexa* é definida como sendo um subgrupóide maximal conexo. Por exemplo, $\Gamma(\mathbb{Z}_2)$ tem duas componentes conexas, uma com isotropia trivial $\{e\}$ e a outra com grupo de isotropia \mathbb{Z}_2 ; enquanto $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$ tem três componentes conexas, duas com isotropia $\{e\}$ e uma com isotropia \mathbb{Z}_3 .

Observe que, qualquer grupóide finito é a união disjunta das suas componentes conexas.

Lema 1.11. *Seja G um grupo finito. A aplicação*

$$\lambda : G \longrightarrow \mathbb{k}\Gamma(G)$$

definida por $\lambda(g) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} (g, A)$, para todo $g \in G$, é uma representação parcial de G .

Demonstração. Precisamos provar que as três condições na Definição 1.1 de representação parcial de grupos são válidas. Primeiro, observe que

$$\lambda(e) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A) = \mathbf{1}.$$

Ou seja, a primeira condição é satisfeita.

Para provar a segunda condição, isto é, o item (ii) da Definição 1.1, sejam g, h em G . Então, temos

$$\begin{aligned} \lambda(g)\lambda(h)\lambda(h^{-1}) &= \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} (g, A) \sum_{B \in \mathcal{P}_{e,h^{-1}}} (h, B) \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h}} (h^{-1}, C) \\ &= \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}} \\ B \in \mathcal{P}_{e,h^{-1}}} (gh, B) \llbracket A = hB \rrbracket \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h}} (h^{-1}, C), \end{aligned}$$

($g^{-1} \in A = hB$ se, e só se, $h^{-1}g^{-1} \in h^{-1}A = B$)

$$\begin{aligned} &= \sum_{B \in \mathcal{P}_{e,h^{-1},h^{-1}g^{-1}}} (gh, B) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,h}} (h^{-1}, C) \\ &= \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}_{e,h^{-1},h^{-1}g^{-1}} \\ C \in \mathcal{P}_{e,h}}} (g, C) \llbracket B = h^{-1}C \rrbracket \end{aligned}$$

($h^{-1} \in B = h^{-1}C$ se, e só se, $e \in C$ e, $h^{-1}g^{-1} \in B = h^{-1}C$ se e só se, $g^{-1} \in C$),

$$= \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h,g^{-1}}} (g, C).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lambda(gh)\lambda(h^{-1}) &= \sum_{B \in \mathcal{P}_{e,(gh)^{-1}}} (gh, B) \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h}} (h^{-1}, C) \\ &= \sum_{\substack{B \in \mathcal{P}_{e,h^{-1}g^{-1}} \\ C \in \mathcal{P}_{e,h}}} (g, C) \llbracket B = h^{-1}C \rrbracket,\end{aligned}$$

e como $h^{-1}g^{-1} \in B = h^{-1}C$ se e só se, $g^{-1} \in C$,

$$\begin{aligned}&= \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h,g^{-1}}} (g, C) \\ &= \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h,g^{-1}}} (g, C),\end{aligned}$$

e como $h^{-1}g^{-1} \in B = h^{-1}C$ se e só se, $g^{-1} \in C$,

$$= \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h,g^{-1}}} (g, C).$$

Ou seja,

$$\lambda(g)\lambda(h)\lambda(h^{-1}) = \sum_{C \in \mathcal{P}_{e,h,g^{-1}}} (g, C) = \lambda(gh)\lambda(h^{-1}).$$

Do mesmo modo provamos que $\lambda(g^{-1})\lambda(g)\lambda(h) = \lambda(g^{-1})\lambda(gh)$.

Portanto, λ é uma representação parcial de G . □

A representação parcial no lema anterior nos fornece ferramentas suficientes para provar que existe uma correspondência biunívoca entre as representações parciais de G e as representações da álgebra unital $\mathbb{k}\Gamma(G)$. Todavia, veremos que as álgebras $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$ são isomorfas. Estes e outros resultados podem ser consultados em [15] e [17].

Teorema 1.12. *Existe uma correspondência biunívoca entre as representações parciais de G e as representações de $\mathbb{k}\Gamma(G)$.*

Demonstração. Suponha primeiro que $\bar{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) \rightarrow \mathcal{A}$ é um morfismo de álgebras unital. Como $\lambda : G \rightarrow \mathbb{k}\Gamma(G)$ é uma representação parcial (ver Lema 1.11), então $\pi := \bar{\pi} \circ \lambda : G \rightarrow \mathcal{A}$ é uma representação parcial de G em \mathcal{A} , pois

$$\pi(e) = \bar{\pi}(\lambda(e)) = \bar{\pi}\left(\sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A)\right) = \bar{\pi}(1_{\mathbb{k}_{par}(G)}) = 1_{\mathcal{A}},$$

e,

$$\begin{aligned}\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) &= \bar{\pi}(\lambda(g^{-1}))\bar{\pi}(\lambda(g))\bar{\pi}(\lambda(h)) \\ &= \bar{\pi}(\lambda(g^{-1})\lambda(g)\lambda(h)) \\ &= \bar{\pi}(\lambda(g^{-1})\lambda(gh)) \\ &= \bar{\pi}(\lambda(g^{-1}))\bar{\pi}(\lambda(gh)) \\ &= \pi(g^{-1})\pi(gh).\end{aligned}$$

Logo,

$$\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh).$$

Do mesmo modo verificamos que

$$\pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1}).$$

Reciprocamente, se $\pi : G \rightarrow \mathcal{A}$ é uma representação parcial de G em \mathcal{A} . Queremos mostrar que existe um único morfismo de álgebras $\bar{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) \rightarrow \mathcal{A}$, que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{A} \\ & \searrow \lambda & \nearrow \bar{\pi} \\ & \mathbb{k}\Gamma(G) & \end{array}$$

Defina $\bar{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) \rightarrow \mathcal{A}$ por

$$\bar{\pi}((g, A)) = \pi(g)P_A^\pi,$$

para todo (g, A) em Γ e estenda por linearidade. Lembre-se que

$$P_A^\pi = \prod_{g \in A} \epsilon_g^\pi \prod_{h \notin A} (1 - \epsilon_h^\pi),$$

onde $\epsilon_g^\pi = \pi(g)\pi(g^{-1})$, ver Observação 1.10. Dessa mesma observação podemos afirmar que os Lemas 1.6, 1.7 e 1.9 são válidos para qualquer representação parcial π . Assim, o Lema 1.9 garante a seguinte igualdade,

$$1_{\mathcal{A}} = \sum_{A \subseteq G} P_A^\pi = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} P_A^\pi,$$

e segue da linearidade de $\bar{\pi}$ e de π ser representação parcial que,

$$\bar{\pi}\left(\sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A)\right) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} \bar{\pi}((e, A)) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} \pi(e)P_A^\pi = 1_{\mathcal{A}}.$$

Provemos que é multiplicativo, isto é, para todo $(g, A), (h, B) \in \mathbb{k}\Gamma(G)$,

$$\bar{\pi}((g, A))\bar{\pi}((h, B)) = \bar{\pi}((g, A)(h, B)).$$

De fato,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}((g, A))\bar{\pi}((h, B)) &= \pi(g)P_A^\pi\pi(h)P_B^\pi \\ &= \pi(g)\pi(h)P_{h^{-1}A}^\pi P_B^\pi \\ &= \pi(g)\pi(h) \prod_{x \in h^{-1}A} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin h^{-1}A} (1 - \epsilon_y^\pi) P_B^\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi(g)\pi(h)\epsilon_{h^{-1}}^\pi \prod_{\substack{x \in h^{-1}A \\ x \neq h^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin h^{-1}A} (1 - \epsilon_y^\pi) P_B^\pi \\
&= \pi(gh)\epsilon_{h^{-1}}^\pi \prod_{\substack{x \in h^{-1}A \\ x \neq h^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin h^{-1}A} (1 - \epsilon_y^\pi) P_B^\pi \\
&= \pi(gh) \prod_{x \in h^{-1}A} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin h^{-1}A} (1 - \epsilon_y^\pi) P_B^\pi \\
&= \pi(gh) P_{h^{-1}A}^\pi P_B^\pi.
\end{aligned}$$

*) Se $h^{-1}A = B$, então $P_{h^{-1}A}^\pi P_B^\pi = P_B^\pi$ donde

$$\bar{\pi}((g, A))\bar{\pi}((h, B)) = \pi(gh)P_B^\pi.$$

Além disso, $h^{-1}A = B$ implica $A = hB$ donde $(g, A) \cdot (h, B) = (gh, B)$ e portanto $\bar{\pi}((g, A) \cdot (h, B)) = \pi(gh)P_B^\pi$, ou seja,

$$\bar{\pi}(g, A)\bar{\pi}(h, B) = \bar{\pi}((g, A) \cdot (h, B)).$$

*) Se $h^{-1}A \neq B$, existe um elemento s em $h^{-1}A$ que não está em B ou um elemento s em B que não está em $h^{-1}A$. Em ambos os casos, o produto $P_{h^{-1}A}^\pi P_B^\pi$ contém o fator $\epsilon_s^\pi(1 - \epsilon_s^\pi) = 0$ e portanto o produto $\bar{\pi}(g, A)\bar{\pi}(h, B)$ será nulo.

Além disso, $h^{-1}A \neq B$, implica $(g, A) \cdot (h, B) = 0$. Logo

$$\bar{\pi}((g, A) \cdot (h, B)) = 0,$$

e portanto

$$\bar{\pi}(g, A)\bar{\pi}(h, B) = \bar{\pi}((g, A) \cdot (h, B)).$$

Assim, $\bar{\pi}$ é um morfismo de álgebras. Para sermos mais exatos, mostramos que $\bar{\pi}$ é multiplicativo sobre $\Gamma(G)$, e o resultado desejado segue pela extensão linear a $\mathbb{k}\Gamma(G)$. Observe ainda que,

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}(\lambda(g)) &= \bar{\pi}\left(\sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} (g, A)\right) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} \bar{\pi}((g, A)) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} \pi(g) \prod_{x \in A} \epsilon_x^\pi P_A^\pi \\
&= \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} \pi(g) \prod_{x \in A} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_y^\pi) \\
&= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} \prod_{x \in A} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_y^\pi) \\
&= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} \epsilon_{g^{-1}}^\pi \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_y^\pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi(g)\epsilon_{g^{-1}}^\pi \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \\
 &= \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \\
 &= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \\
 &= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} (1 - \epsilon_{g^{-1}}^\pi + \epsilon_{g^{-1}}^\pi) \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \\
 &= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \left((1 - \epsilon_{g^{-1}}^\pi) \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \right) + \left(\epsilon_{g^{-1}}^\pi \prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \right) \\
 &= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \left(\prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{\substack{y \notin A \\ y \neq g^{-1}}} (1 - \epsilon_x^\pi) \right) + \left(\prod_{x \in A} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \right) \\
 &= \pi(g) \left(\sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \left(\prod_{\substack{x \in A \\ x \neq g^{-1}}} \epsilon_x^\pi \prod_{\substack{y \notin A \\ y \neq g^{-1}}} (1 - \epsilon_x^\pi) \right) + \sum_{A \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}} \left(\prod_{x \in A} \epsilon_x^\pi \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_x^\pi) \right) \right) \\
 &= \pi(g) \sum_{A \in \mathcal{P}_e} P_A = \pi(g),
 \end{aligned}$$

ou seja, para todo $g \in G$,

$$\bar{\pi}(\lambda(g)) = \pi(g).$$

Donde segue que

$$\bar{\pi} \circ \lambda = \pi,$$

isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{A} \\
 \searrow \lambda & & \nearrow \bar{\pi} \\
 & \mathbb{k}\Gamma(G) &
 \end{array}$$

Nas últimas igualdades usamos que é possível reescrever \mathcal{P}_e como a união das coleções $P_{\{e,g^{-1}\}}$ e $\{X \setminus \{g^{-1}\} \subseteq G : X \in \mathcal{P}_{e,g^{-1}}\}$.

Para provar a unicidade de $\bar{\pi}$, vamos provar que a imagem de λ é toda $\mathbb{k}\Gamma(G)$, isto é, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é gerada pelos λ 's, lembrando que $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é gerada pelos elementos do grupoide $\Gamma(G)$, que são pares (g, A) com $g \in G$ e $e, g^{-1} \in A$.

Denote por B a álgebra gerada pelo conjunto $Im(\lambda)$. Seja $(g, A) \in \mathbb{k}\Gamma(G)$. Nosso objetivo é mostrar que (g, A) está em B . Fixemos algumas notações primeiro. Escreva

$$A = \{b_1^{-1}, b_2^{-1}, b_3^{-1}, \dots, b_{k-1}^{-1}, g^{-1}\},$$

e escolha g_i como segue

$$\begin{aligned}
 g_1 &= b_1, \\
 g_2 g_1 &= b_2, \\
 g_3 g_2 g_1 &= b_3, \\
 &\vdots \\
 g_{k-1} g_{k-2} \cdots g_2 g_1 &= b_{k-1}, \\
 g_k g_{k-1} g_{k-2} \cdots g_2 g_1 &= g.
 \end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
 g_1 = b_1 &\Rightarrow g_1^{-1} = b_1^{-1} \\
 g_2 = b_2 g_1^{-1} &\Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} = b_2^{-1} \\
 g_3 = b_3 g_1^{-1} g_2^{-1} &\Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1} = b_3^{-1} \\
 &\vdots \\
 g_{k-1} = b_{k-1} g_1^{-1} g_2^{-1} \cdots g_{k-2}^{-1} &\Rightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1} \cdots g_{k-1}^{-1} = b_{k-1}^{-1}
 \end{aligned}$$

e,

$$g^{-1} = g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1} \cdots g_{k-1}^{-1} g_k^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \lambda(g_k) \lambda(g_{k-1}) \lambda(g_{k-2}) \cdots \lambda(g_2) \lambda(g_1) &= \sum_{A_k \in \mathcal{P}_{e, g_k^{-1}}} (g_k, A_k) \sum_{A_{k-1} \in \mathcal{P}_{e, g_{k-1}^{-1}}} (g_{k-1}, A_{k-1}) \cdots \\
 &\cdots \sum_{A_2 \in \mathcal{P}_{e, g_2^{-1}}} (g_2, A_2) \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_{e, g_1^{-1}}} (g_1, A_1) \\
 &= \sum_{A_k \in \mathcal{P}_{e, g_k^{-1}}} (g_k, A_k) \cdots \\
 &\cdots \sum_{A_3 \in \mathcal{P}_{e, g_3^{-1}}} (g_3, A_3) \sum_{A_2 \in \mathcal{P}_{e, g_1^{-1} g_2^{-1}}} (g_2 g_1, A_1) \llbracket A_2 = g_1 A_1 \rrbracket \\
 (\text{pois, } A_2 \in \mathcal{P}_{e, g_2^{-1}} \Leftrightarrow g_2^{-1} \in A_2 = g_1 A_1 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} \in A_1) & \\
 &= \sum_{A_k \in \mathcal{P}_{e, g_k^{-1}}} (g_k, A_k) \cdots \\
 &\cdots \sum_{A_2 \in \mathcal{P}_{e, g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1}}} (g_3 g_2 g_1, A_1) \llbracket A_2 = g_1 A_1 \rrbracket \llbracket A_3 = g_2 A_2 \rrbracket \\
 (\text{pois, } A_3 \in \mathcal{P}_{e, g_3^{-1}} \Leftrightarrow g_3^{-1} \in A_3 = g_2 A_2 = g_2 g_1 A_1 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2^{-1} g_3^{-1} \in A_1) & \\
 &\vdots \\
 &= \sum_{A_1 \in \mathcal{P}_{e, g_1^{-1} g_2^{-1} \cdots g_k^{-1}}} (g_k g_{k-1} \cdots g_2 g_1, A_1) \llbracket A_2 = g_1 A_1 \rrbracket \cdots \\
 &\cdots \llbracket A_k = g_{k-1} A_{k-1} \rrbracket.
 \end{aligned}$$

Segue da construção anterior que $\{g_1^{-1}, g_1^{-1}g_2^{-1}, \dots, g_1^{-1}g_2^{-1} \dots g_k^{-1}\} = \{b_1^{-1}, b_2^{-1}, \dots, b_{k-1}^{-1}, g^{-1}\} = A$ está contido em A_1 , ou seja,

$$= \sum_{\substack{A_1 \in \mathcal{P}_e \\ A_1 \supseteq A}} (g, A_1).$$

Portanto,

$$\lambda(g_k)\lambda(g_{k-1})\lambda(g_{k-2}) \dots \lambda(g_2)\lambda(g_1) = \sum_{A_1 \supseteq A} (g, A_1).$$

Como B é a subálgebra gerada por $Im(\lambda)$, então $\sum_{A_1 \supseteq A} (g, A_1) \in B$. Isto acontece para qualquer $(g, A) \in \mathbb{k}\Gamma(G)$. Falta mostrar que $(g, A) \in B$. Considere x_1, x_2, \dots, x_N tais que,

$$G \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_N\},$$

então

$$\begin{aligned} A \cup \{x_1\} &\in \mathcal{P}_{e, g^{-1}} \\ A \cup \{x_1, x_2\} &\in \mathcal{P}_{e, g^{-1}} \\ &\vdots \\ G = A \cup \{x_1, x_2, \dots, x_N\} &\in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}. \end{aligned}$$

Como $\sum_{A_1 \supseteq A} (g, A_1) \in B$, para qualquer (g, A) , então

$$\sum_{A_1 \supseteq A} (g, A_1) - \sum_{\substack{A_1 \supseteq A \cup \{x_1\} \\ A_1 \supseteq A}} (g, A_1) = \sum_{\substack{A_1 \supseteq A \\ x_1 \notin A_1}} (g, A_1) \in B.$$

Isto implica que,

$$\sum_{\substack{A_1 \supseteq A \\ x_1 \notin A_1}} (g, A_1) \in B - \sum_{\substack{A_1 \supseteq A \cup \{x_1, x_2\} \\ x_1 \notin A_1}} (g, A_1) = \sum_{\substack{A_1 \supseteq A \\ x_1, x_2 \notin A_1}} (g, A_1) \in B.$$

Seguindo esse raciocínio, obtemos

$$(g, A) = \sum_{\substack{A_1 \supseteq A \\ x_1, x_2, \dots, x_N \notin A_1}} (g, A_1) \in B,$$

para qualquer elemento (g, A) de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e portanto $\mathbb{k}\Gamma(G) \subseteq B = \langle Im(\lambda) \rangle$, ou seja, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é gerada pelo conjunto B , como queríamos mostrar.

De fato, provando que $Im(\lambda)$ gera $\mathbb{k}\Gamma(G)$, temos que qualquer elemento de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é da forma $\lambda(g)$, para algum $g \in G$ e, se $\pi : G \rightarrow A$ é uma representação parcial e $\hat{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) \rightarrow A$ é um outro morfismo de álgebras tal que $\hat{\pi}(\lambda(g)) = \pi(g)$ para todo $g \in G$, então

$$\hat{\pi}(\lambda(g)) = \pi(g) = \bar{\pi}(\lambda(g)),$$

para todo $g \in G$, ou seja, $\hat{\pi}$ e $\bar{\pi}$ coincidem em todo elemento de $Im(\lambda)$, logo, $\hat{\pi} = \bar{\pi}$, e portanto, $\bar{\pi}$ é único. \square

Com o teorema anterior, prova-se que a álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$ possui a propriedade universal de que toda representação parcial π de G é fatorada por uma (única) representação $\bar{\pi}$ da álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$. Com esta correspondência temos que a teoria de representações parciais de G e a teoria de representações de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ são a mesma. Veremos agora que $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$ são isomorfas como álgebras e, no capítulo seguinte, provaremos que este isomorfismo é um isomorfismo de Hopf-álgebróides. Esses resultados (e outros) podem ser consultados em [14] e [15].

Teorema 1.13. *Seja G um grupo finito. A álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é isomorfa à álgebra parcial de grupo $\mathbb{k}_{par}(G)$.*

Demonstração. Primeiro, observe que, como $\lambda : G \rightarrow \mathbb{k}\Gamma(G)$ é uma representação parcial de G , segue da definição de $\mathbb{k}_{par}(G)$ que existe um único morfismo de álgebras

$$\bar{\lambda} : \mathbb{k}_{par}(G) \rightarrow \mathbb{k}\Gamma(G),$$

tal que

$$\bar{\lambda}([g]) = \lambda(g) = \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} (g, A), \quad (1.5)$$

para todo $g \in G$, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{k}\Gamma(G) \\ & \searrow [\] & \nearrow \bar{\lambda} \\ & \mathbb{k}_{par}(G) & \end{array}$$

Por outro lado, como $[\] : G \rightarrow \mathbb{k}_{par}(G)$ é uma representação parcial, a correspondência vista anteriormente (Teorema 1.12), nos fornece um único morfismo de álgebras

$$\bar{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) \rightarrow \mathbb{k}_{par}(G),$$

tal que,

$$\bar{\pi}(\lambda(g)) = [g] \quad (1.6)$$

para todo $g \in G$, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{[\]} & \mathbb{k}_{par}(G) \\ & \searrow \lambda & \nearrow \bar{\pi} \\ & \mathbb{k}\Gamma(G) & \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}(\bar{\lambda}([g])) &\stackrel{(1.5)}{=} \bar{\pi}(\lambda(g)) \\ &\stackrel{(1.6)}{=} [g]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\bar{\pi} \circ \bar{\lambda} = \text{Id}_{\mathbb{k}_{par}(G)}.$$

Observe que, para mostrarmos que $\bar{\lambda}(\bar{\pi}(g, A)) = (g, A)$, para todo (g, A) em $\mathbb{k}\Gamma(G)$, é suficiente provar para os elementos na imagem de λ , pois $\text{Im}(\lambda)$ gera a álgebra toda. Segue então que, para qualquer $g \in G$,

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\bar{\pi}(\lambda(g))) &\stackrel{(1.6)}{=} \bar{\lambda}([g]) \\ &\stackrel{(1.5)}{=} \lambda(g). \end{aligned}$$

Donde,

$$\bar{\lambda} \circ \bar{\pi} = \text{Id}_{\mathbb{k}\Gamma(G)}.$$

Em resumo, os morfismos de álgebras unitais

$$\begin{array}{ccc} \bar{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) & \longrightarrow & \mathbb{k}_{par}(G), \\ (g, A) & \longmapsto & [g]P_A \end{array} \quad \bar{\lambda} : \mathbb{k}_{par}(G) \longrightarrow \mathbb{k}\Gamma(G) \quad \begin{array}{ccc} [g] & \longmapsto & \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} (g, A), \end{array}$$

são um inverso do outro, e os únicos (a menos de isomorfismo) que fazem os seguintes diagramas comutar

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{[\]} & \mathbb{k}_{par}(G) \\ & \searrow \lambda & \nearrow \bar{\pi} \\ & \mathbb{k}\Gamma(G) & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{k}\Gamma(G) \\ & \searrow [\] & \nearrow \bar{\lambda} \\ & \mathbb{k}_{par}(G) & \end{array}.$$

Portanto,

$$\mathbb{k}\Gamma(G) \cong \mathbb{k}_{par}(G). \quad \square$$

Observe que, pelo resultado anterior, é imediata a seguinte igualdade

$$\mathbf{1} = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} P_A.$$

Em [15], é estudada a estrutura da álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e é provado que

$$\mathbb{k}\Gamma(G) = \bigoplus_{\substack{H \leq G \\ 1 \leq m \leq [G:H]}} c_m(H) M_m(\mathbb{k}H), \quad (1.7)$$

onde $c_m(H)M_m(\mathbb{k}H)$ que dizer $c_m(H)$ cópias de $M_m(\mathbb{k}H)$.

O número $c_m(H)$ é dado pela seguinte fórmula recursiva

$$c_m(H) = \frac{1}{m} [G : N_G(H)] \left(\binom{[G:H]-1}{m-1} - \sum_{\substack{H < B \leq G \\ [B:H] | m}} \frac{m}{[B:H]} \frac{c_{\frac{m}{[B:H]}}(B)}{[G : N_G(B)]} \right).$$

Observação 1.14. O artigo em menção [15] tem um erro no cálculo do número $c_m(H)$, pois os termos $[G : N_G(H)]$ e $[G : N_G(B)]$ não foram considerados. Já em 2004, Dokuchaev e Polcino corrigiram tal erro em [17].

No entanto, se o grupo G é abeliano, temos $[G : N_G(H)] = 1$ e $[G : N_G(B)] = 1$, logo

$$c_m(H) = \frac{1}{m} \left(\binom{[G : H] - 1}{m - 1} - m \sum_{\substack{H < B \leq G \\ [B:H] | m}} \frac{c_{\frac{m}{[B:H]}}(B)}{[B : H]} \right). \quad (1.8)$$

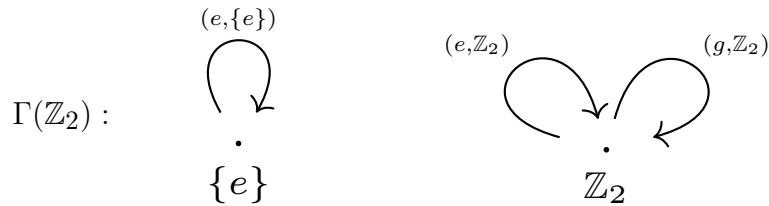
Como mencionado anteriormente, não é difícil mostrar que a cardinalidade de $\Gamma(G)$ é exatamente $2^{|G|-2}(|G| + 1)$, que é exatamente a dimensão de $\mathbb{k}_{par}(G)$.

Por outro lado, se G não for finito, $\mathbb{k}_{par}(G) \not\cong \mathbb{k}\Gamma(G)$. No entanto, é possível mostrar que cada representação parcial de G de grau finito irredutível (indecomponível), pode ser considerada como uma representação irredutível (indecomponível) de $\mathbb{k}\Sigma$, onde Σ é uma componente conexa de $\Gamma(G)$, ver [18]. Este resultado será discutido na Seção 3.1.

1.2.2 Exemplos de $\mathbb{k}\Gamma(G)$

Veremos a seguir exemplos para ilustrar algumas das definições apresentadas neste capítulo e, como dito anteriormente, iremos explicar a notação usada para desenhar o grupóide associado $\Gamma(G)$ de forma mais simplificada.

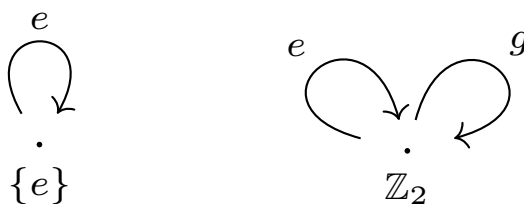
Exemplo 1.15. Vimos anteriormente os grupóides associados aos grupos \mathbb{Z}_2 e \mathbb{Z}_3 , no caso $\Gamma(\mathbb{Z}_2)$ e $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$, ver página 25. Resumindo, o grupóide associado a \mathbb{Z}_2 , é:



E a álgebra $\mathbb{k}\Gamma(\mathbb{Z}_2)$ pode ser decomposta na soma direta

$$\mathbb{k} \oplus \mathbb{k}\mathbb{Z}_2.$$

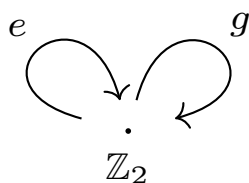
O grupóide anterior pode ser “re-desenhado” de forma mais simples como segue



onde, estas duas últimas componentes conexas nos sugerem que, o elemento e que identifica a flecha em

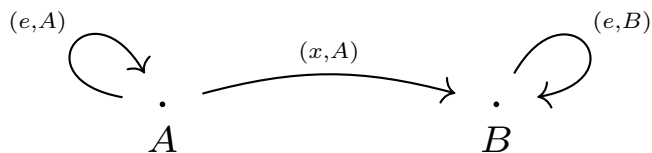


refere-se ao elemento $(e, \{e\})$ que tem source (origem) $\{e\}$ e target (destino) $\{e\}$. Este elemento e é diferente do que aparece em

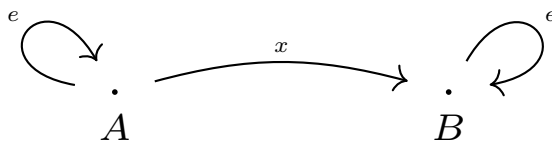


pois neste caso refere-se ao elemento $(e, \{G\})$ que tem source G e target G .

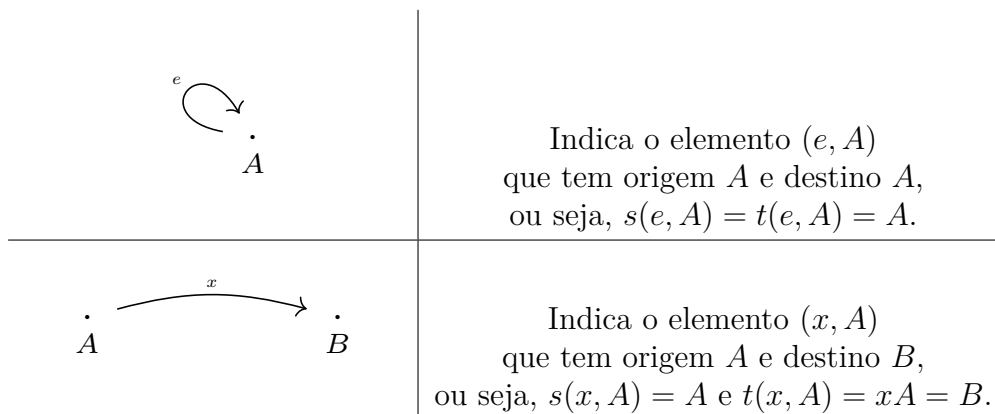
Antes de ver o próximo exemplo, repare que, a componente conexas



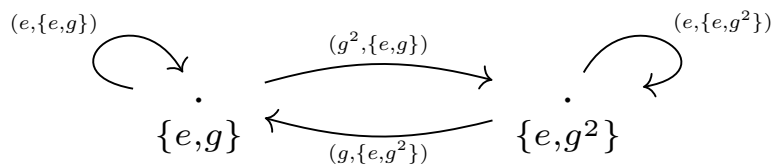
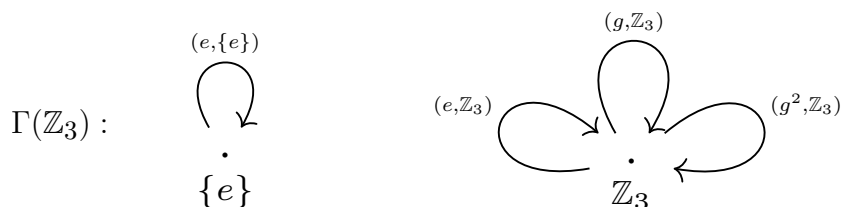
está sendo redesenhada por



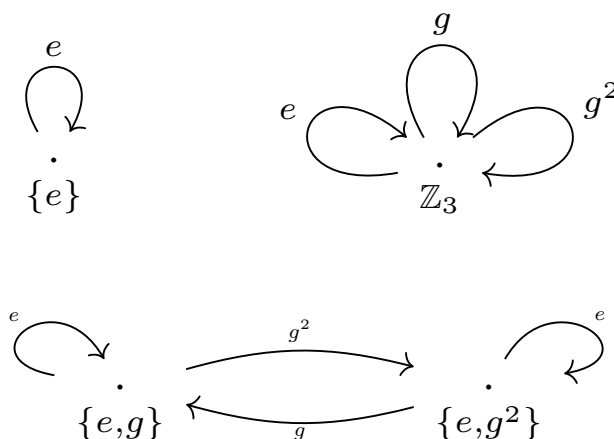
em que,



Vejamos o caso $G = \mathbb{Z}_3$. O seu grupóide associado é



que está sendo redesenhado por



Devemos ter cuidado aqui na leitura em si, pois g indicando origem G e destino G é o elemento (g, G) , já que $s(g, G) = t(g, G) = G$ enquanto g com origem $\{e, g^2\}$ e

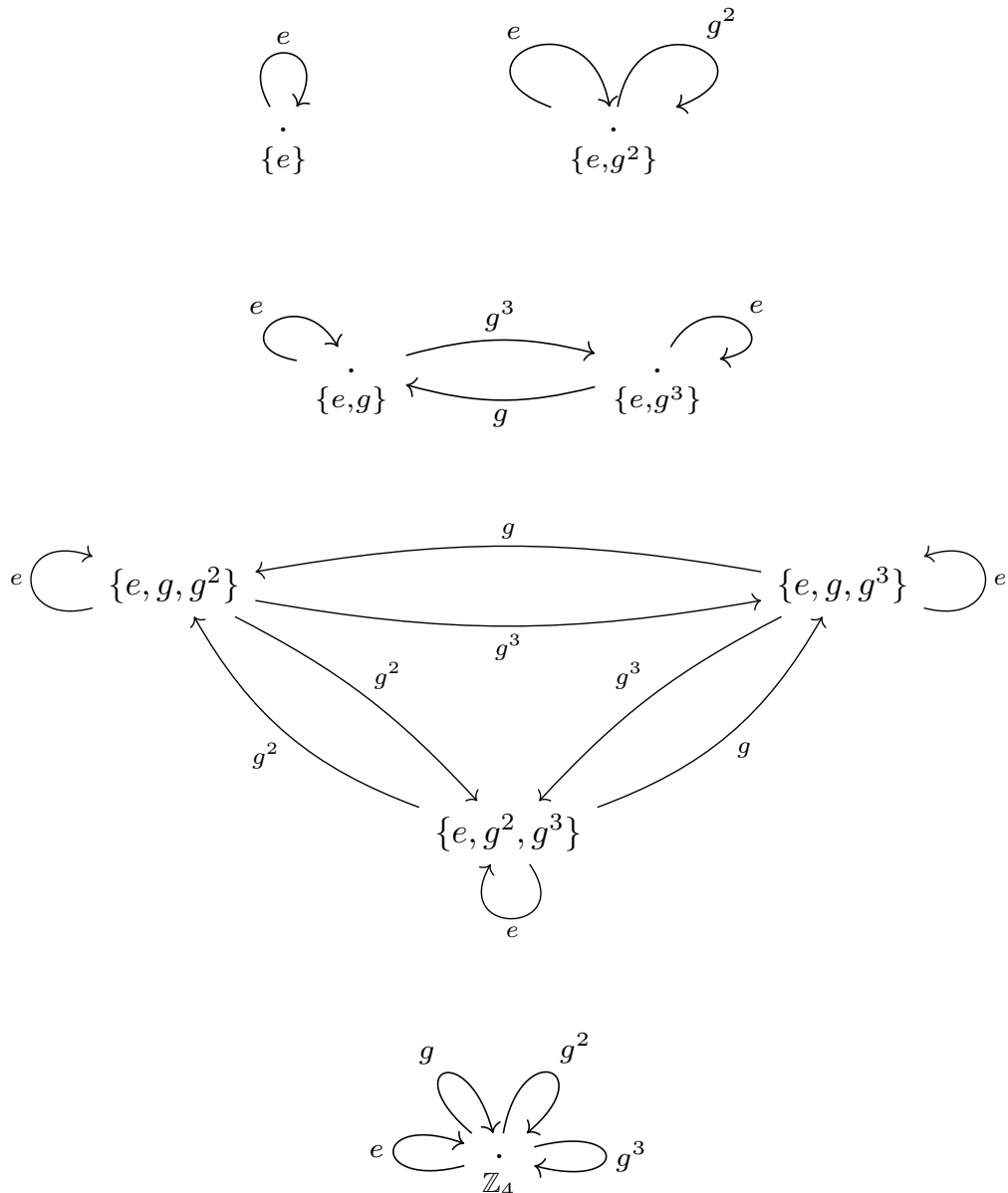
destino $\{e, g\}$ se refere ao elemento $(g, \{e, g^2\})$, pois $s(g, \{e, g^2\}) = \{e, g^2\}$ e $t(g, \{e, g^2\}) = g\{e, g^2\} = \{e, g\}$. Do mesmo modo, deve ficar subentendido que g e g^2 que iniciam e terminam em G indicam elementos distintos. Elementos como estes últimos terão um papel importante, pois serão “elementos com mesma isotropia”.

A álgebra $\mathbb{k}\Gamma(\mathbb{Z}_3)$ possui a seguinte decomposição em soma direta

$$\mathbb{k}\Gamma(\mathbb{Z}_3) = \mathbb{k} \oplus M_2(\mathbb{k}) \oplus \mathbb{k}\mathbb{Z}_3.$$

A partir de agora, representamos o grupóide associado ao grupo G , $\Gamma(G)$, utilizando a forma simplificada mencionada anteriormente.

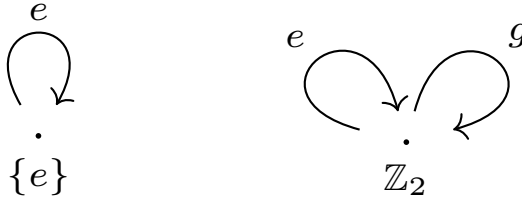
Exemplo 1.16. Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_4$. Aqui temos um grupo com subgrupos não triviais, e estes, por sua vez terão uma incidência relevante na álgebra e no grupóide. O grupóide associado a \mathbb{Z}_4 tem as seguintes 5 componentes conexas.



A álgebra $\mathbb{k}\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ possui a seguinte decomposição em soma direta

$$\mathbb{k} \oplus M_2(\mathbb{k}) \oplus M_3(\mathbb{k}) \oplus \mathbb{k}\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{k}\mathbb{Z}_4.$$

Repare que, a componente conexa associada ao vértice $A = \{e, g^2\}$ tem grupo de isotropia $G_A = \{e, g^2\}$, que é isomorfo a \mathbb{Z}_2 , e, as duas componentes conexas de $\Gamma(\mathbb{Z}_2)$



“aparecem” no grupóide de $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$. A primeira componente de $\Gamma(\mathbb{Z}_2)$ está configurada na segunda componente de $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ e a segunda componente de $\Gamma(\mathbb{Z}_2)$ está configurada na quinta componente de $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$.

Veremos que esta relação não é uma situação excepcional, e que é uma forte indicação de que existe uma relação entre as representações parciais dos grupos e dos seus subgrupos, o que motivou a formular o *Teorema da Matryoshka* 4.4. Isto se torna mais evidente quando analisamos grupóides associados a grupos com um número maior de elementos, ou com subgrupos não triviais. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 1.17. Para o grupo $G = \mathbb{Z}_{27} = \langle g : g^{27} = e \rangle$, o grupóide associado $\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$ teria 2^{27-1} vértices e $(2^{27-2})(27 + 1)$ flechas, sendo este último o número de elementos do grupóide, isto é, a dimensão da álgebra $\mathbb{k}\Gamma(\mathbb{Z}_{27})$. Assim, seria exaustivo descrever o grupóide todo. Contudo, veja que os vértices

$$A = \{e, g^3, g^6, g^9, g^{12}, g^{15}, g^{18}, g^{21}, g^{24}\} \cong \mathbb{Z}_9,$$

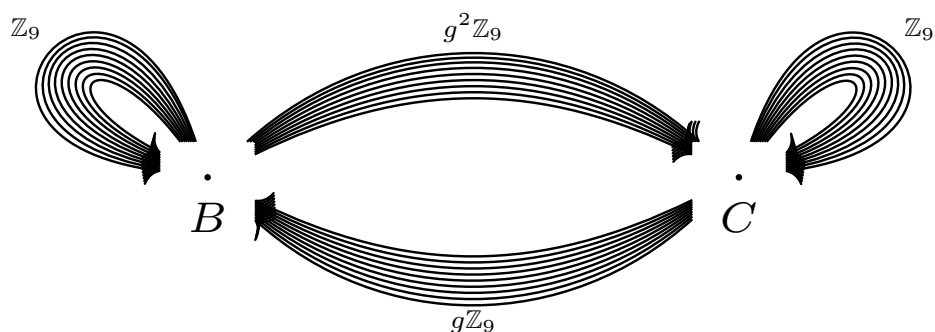
$$B = \{e, g, g^3, g^4, g^6, g^7, g^9, g^{10}, g^{12}, g^{13}, g^{15}, g^{16}, g^{18}, g^{19}, g^{21}, g^{22}, g^{24}, g^{25}\} \cong \mathbb{Z}_9 \cup g\mathbb{Z}_9 \text{ e,}$$

$$C = \{e, g^2, g^3, g^5, g^6, g^8, g^9, g^{11}, g^{12}, g^{14}, g^{15}, g^{17}, g^{18}, g^{20}, g^{21}, g^{23}, g^{24}, g^{26}\} \cong \mathbb{Z}_9 \cup g^2\mathbb{Z}_9$$

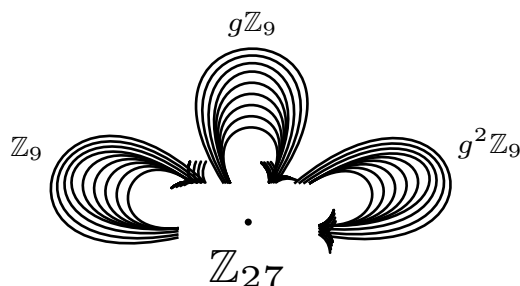
têm grupo de isotropia $\{g^{3t} : 0 \leq t < 9\} \cong \mathbb{Z}_9$. Observe que, o vértice A acima tem a seguinte componente conexa associada



enquanto os vértices B e C estão na mesma componente conexa do grupóide, a saber,



Se acrescentarmos a componente conexa associada ao grupo todo,



Com isto, podemos perceber que, a geometria do subgrupóide formado pelos vértices A , B , C e \mathbb{Z}_{27} é a mesma do grupóide associado a \mathbb{Z}_3 , $\Gamma(\mathbb{Z}_3)$, exceto por algumas flechas a mais, a saber, temos exatamente $[\mathbb{Z}_{27} : \mathbb{Z}_3]$ flechas por causa do grupo de isotropia de A , B e C . Cabe destacar aqui que, quando escrevemos \mathbb{Z}_9 , estamos nos referindo ao subgrupo de \mathbb{Z}_{27} , $\{g^{3t} : 0 \leq t < 9\} = A$.

2 ÁLGBRAS DE HOPF FRACAS E HOPF ALGEBRÓIDES

Neste capítulo introduzimos novas definições, isto com o propósito de mostrar que o isomorfismo no Teorema 1.13 preserva não só a estrutura de álgebra, como também é um isomorfismo de Hopf-algebróides. No decorrer do trabalho e para simplificar a escrita, usamos a notação de Sweedler e omitimos o somatório, isto é, se (H, Δ, ϵ) é uma \mathbb{k} -coálgebra, escrevemos $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, para todo $x \in H$.

Mais detalhes podem ser consultados em [4], [7], [9], [24], [26], [28], entre outros.

2.1 ÁLGBRAS DE HOPF FRACAS

A teoria de álgebras de Hopf fracas generaliza, em certo sentido, a teoria de álgebras de Hopf. Nesta seção introduzimos algumas novas definições e mostramos que a álgebra do grupóide $\mathbb{k}\Gamma(G)$ estudada na Seção 1.2.1 é uma álgebra de Hopf fraca que, em particular, não é uma álgebra de Hopf no sentido clássico.

Definição 2.1. Uma **biálgebra fraca** é uma quintupla $(H, \mu, u, \Delta, \epsilon)$ tal que:

- (1) (H, μ, u) é uma álgebra.
- (2) (H, Δ, ϵ) é uma coálgebra.
- (3) $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$, para todo x, y em H .
- (4) $\epsilon(xyz) = \epsilon(xy_{(1)})\epsilon(y_{(2)}z) = \epsilon(xy_{(2)})\epsilon(y_{(1)}z)$, para todo x, y, z em H .
- (5) $(\Delta(1) \otimes 1)(1 \otimes \Delta(1)) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(3)} = (1 \otimes \Delta(1))(\Delta(1) \otimes 1)$ que, usando a notação de Sweedler e omitindo o somatório, fica

$$1_{(1)} \otimes 1_{(2)} 1_{(1')} \otimes 1_{(2')} = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \otimes 1_{(3)} = 1_{(1)} \otimes 1_{(1')} 1_{(2)} \otimes 1_{(2')}.$$

Observe que uma biálgebra definida no sentido clássico satisfaz a definição anterior, isto é, toda biálgebra é uma biálgebra fraca. Contudo, a recíproca não é verdadeira, pois aqui Δ e ϵ não precisam ser homomorfismos de álgebras, condição necessária para ser uma biálgebra. De fato, apesar de Δ ser um morfismo multiplicativo, $\Delta(1)$ não é necessariamente $1 \otimes 1$, o que equivale a afirmar que, como veremos no seguinte lema, ϵ não é multiplicativo.

Lema 2.2. *Seja H uma biálgebra fraca com unidade 1. Então,*

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1 \Leftrightarrow \epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y).$$

Demonstração. Se $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, então é direto que

$$\epsilon(xy) = \epsilon(x1y) = \epsilon(x1_{(1)})\epsilon(1_{(2)}y) = \epsilon(x)\epsilon(y)$$

Reciprocamente, se $\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$, então

$$\Delta(1) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} = 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)(1)})1_{(2)(2)}$$

$$\begin{aligned}
&= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)})1_{(3)} \\
&= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)}1_{(1')})1_{(2')} && \text{(item (4) da Definição 2.1)} \\
&= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)})\epsilon(1_{(1')})1_{(2')} && \text{(por hipótese)} \\
&= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}) \otimes \epsilon(1_{(1')})1_{(2')} \\
&= 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

□

Temos assim que uma biálgebra fraca é biálgebra no sentido clássico se, e somente se, $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, isto é, se e somente se, $\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y)$.

Todavia, segue de Δ ser um morfismo multiplicativo a igualdade

$$x_{(1)}1_{(1)} \otimes x_{(2)}1_{(2)} = x_{(1)} \otimes x_{(2)} = 1_{(1)}x_{(1)} \otimes 1_{(2)}x_{(2)}.$$

De fato, observemos que

$$\begin{aligned}
x_{(1)}1_{(1)} \otimes x_{(2)}1_{(2)} &= \Delta(x)\Delta(1) = \Delta(x1) = \Delta(x) \\
&= \Delta(1x) = \Delta(1)\Delta(x) = 1_{(1)}x_{(1)} \otimes 1_{(2)}x_{(2)}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3. Se H é uma biálgebra fraca, o seu dual H^* também é uma biálgebra fraca. De fato, podemos definir as aplicações $\delta : H^* \rightarrow H^* \otimes H^*$ e $E : H^* \rightarrow \mathbb{k}$ como sendo $\delta(f) = f_1 \otimes f_2$ para todo $f \in H^*$ tal que $f(ab) = f_1(a)f_2(b)$ e $E(f) = f(1_H)$. Com estas aplicações obtemos uma estrutura de biálgebra fraca para H^* .

Exemplo 2.4. Se H é uma álgebra de dimensão finita, então H e H^* são biálgebras fracas. De fato, se $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ é uma base de H , com $e_i e_j = 0$ se $i \neq j$ e, $e_i e_i = e_i$, podemos definir $\Delta : H \rightarrow H \otimes H$ e $\epsilon : H \rightarrow \mathbb{k}$ como sendo $\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$ e $\epsilon(e_i) = 1$, que dão a estrutura de biálgebra fraca para H . Em particular, pelo exercício anterior, isso implica que H^* também é uma biálgebra fraca.

Exemplo 2.5. Se Γ é um grupóide finito, então a álgebra de grupóide $\mathbb{k}\Gamma$, definida na Seção 1.2.1, é uma biálgebra fraca. De fato, as aplicações $\Delta : \mathbb{k}\Gamma \rightarrow \mathbb{k}\Gamma \otimes \mathbb{k}\Gamma$ e $\epsilon : \mathbb{k}\Gamma \rightarrow \mathbb{k}$ dadas por $\Delta(\gamma) = \gamma \otimes \gamma$ e $\epsilon(\gamma) = 1_{\mathbb{k}}$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e estendida por linearidade, assim como o produto (1.3) e a unidade definidos na Seção 1.2.1, satisfazem a definição de biálgebra fraca.

O nosso interesse é explorar com mais detalhes este último exemplo afim de mostrar que $\mathbb{k}\Gamma$ é uma álgebra de Hopf fraca. Mas ainda, detalharemos a estrutura de álgebra de Hopf fraca para a álgebra do grupóide associado a um grupo finito G , $\mathbb{k}\Gamma(G)$, apresentado na Seção 1.2.1. Antes disso, veremos algumas propriedades e resultados que envolvem biálgebras fracas, e introduzimos o conceito de álgebra de Hopf fraca. Mais detalhes podem ser consultados em [8] e [26].

Definição 2.6. Seja H uma biálgebra fracá. Definimos as duas seguintes aplicações \mathbb{k} -lineares,

$$\begin{aligned} \epsilon_s : H &\longrightarrow H & \epsilon_t : H &\longrightarrow H \\ x &\longmapsto 1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)}), & x &\longmapsto \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}, \end{aligned}$$

chamadas de source e target, respectivamente.

As aplicações ϵ_s e ϵ_t definem dois subespaços de H , a saber, $H_s := \text{Im}(\epsilon_s)$ e $H_t := \text{Im}(\epsilon_t)$.

Proposição 2.7. *Sejam H uma biálgebra fracá e x, y em H . Então:*

1. ϵ_s, ϵ_t são idempotentes em $\text{End}(H)$ com a composição;
2. $\epsilon(xy) = \epsilon(\epsilon_s(x)y) = \epsilon(x\epsilon_t(y))$;
3. $\epsilon_s(xy) = \epsilon_s(\epsilon_s(x)y)$ e, $\epsilon_t(xy) = \epsilon_t(x\epsilon_t(y))$;
4. $\Delta(x\epsilon_s(y)) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}\epsilon_s(y)$ e, $\Delta(\epsilon_s(x)y) = y_{(1)} \otimes \epsilon_s(x)y_{(2)}$;
5. $\Delta(x\epsilon_t(y)) = x_{(1)}\epsilon_t(y) \otimes x_{(2)}$ e, $\Delta(\epsilon_t(x)y) = \epsilon_t(x)y_{(1)} \otimes y_{(2)}$.

Demonstração. Serão feitas apenas as propriedades que se referem à aplicação ϵ_s , pois para ϵ_t são análogas.

1.

$$\begin{aligned} \epsilon_s(\epsilon_s(x)) &= \epsilon_s(1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)})) \\ &= \epsilon_s(1_{(1)})\epsilon(x1_{(2)}) \\ &= 1_{(1')} \epsilon(1_{(1)}1_{(2')})\epsilon(x1_{(2)}) \\ &= 1_{(1')} \epsilon(x1_{(2)})\epsilon(1_{(1)}1_{(2')}) \\ &= 1_{(1')} \epsilon(x1_{(2)}) \qquad \qquad \qquad (\text{Definição 2.1}) \\ &= \epsilon_s(x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \epsilon(\epsilon_s(x)y) &= \epsilon(1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)})y) \\ &= \epsilon(x1_{(2)})\epsilon(1_{(1)}y) \\ &= \epsilon(xy). \end{aligned}$$

Segue que, $\epsilon(x) = \epsilon(\epsilon_s(x)) = \epsilon(\epsilon_t(x))$.

3.

$$\begin{aligned} \epsilon_s(\epsilon_s(x)y) &= \epsilon_s(1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)})y) \\ &= \epsilon(x1_{(2)})\epsilon_s(1_{(1)}y) \\ &= \epsilon(x1_{(2)})1_{(1')} \epsilon(1_{(1)}y1_{(2')}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1_{(1')} \epsilon(x 1_{(2)}) \epsilon(1_{(1)} y 1_{(2')}) \\
 &= 1_{(1')} \epsilon(x y_{(2')}) \\
 &= \epsilon_s(x y).
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \Delta(x \epsilon_s(y)) &= \Delta(x) \Delta(\epsilon_s(y)) \\
 &= (x_{(1)} \otimes x_{(2)}) \Delta(1_{(1)} \epsilon(y 1_{(2)})) \\
 &= (x_{(1)} \otimes x_{(2)}) \Delta(1_{(1)}) \epsilon(y 1_{(2)}) \\
 &= (x_{(1)} \otimes x_{(2)}) (1_{(1)} \otimes 1_{(2)}) \epsilon(y 1_{(3)}) \\
 &= (x_{(1)} \otimes x_{(2)}) (1_{(1)} \otimes 1_{(2)} 1_{(1')} \epsilon(y 1_{(2')})) \quad (\text{Definição 2.1}) \\
 &= (x_{(1)} \otimes x_{(2)}) (1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \epsilon_s(y)) \\
 &= x_{(1)} 1_{(1)} \otimes x_{(2)} 1_{(2)} \epsilon_s(y) \\
 &= x_{(1)} \otimes x_{(2)} \epsilon_s(y).
 \end{aligned}$$

Análogamente $\Delta(\epsilon_s(x) y) = y_{(1)} \otimes \epsilon_s(x) y_{(2)}$.

5. Similar ao item anterior. □

Seguem dos itens 4. e 5. as seguintes igualdades que serão usadas com frequência nos cálculos de algumas igualdades. Para todo x em H_s , e y em H_t ,

$$\Delta(x) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} x = 1_{(1)} \otimes x 1_{(2)}, \quad (2.1)$$

$$\Delta(y) = 1_{(1)} y \otimes 1_{(2)} = y 1_{(1)} \otimes 1_{(2)}. \quad (2.2)$$

Teorema 2.8. *Os subespaços H_s e H_t são subálgebras de H que contém a unidade 1_H de H . Além disso, os elementos de H_s comutam com os elementos de H_t .*

Demonstração. Veja primeiro que $\epsilon_s(1_H) = 1_{(1)} \epsilon(1_H 1_{(2)}) = 1_{(1)} \epsilon(1_{(2)}) = 1_H$, logo $1_H \in H_s$.

Sejam $\epsilon_s(x), \epsilon_s(y) \in H_s$. Então

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s(x) \epsilon_s(y) &\cong (\epsilon_s(x) \epsilon_s(y))_{(1)} \epsilon((\epsilon_s(x) \epsilon_s(y))_{(2)}) \\
 &= (\epsilon_s(x))_{(1)} \epsilon((\epsilon_s(x))_{(2)} \epsilon_s(y)) \quad (\text{Proposição 2.7, item 4.}) \\
 &\stackrel{(2.1)}{=} 1_{(1)} \epsilon(1_{(2)} \epsilon_s(x) \epsilon_s(y)) \\
 &= \epsilon_s(\epsilon_s(x) \epsilon_s(y)) = \epsilon_s(x \epsilon_s(y)) \in H_s.
 \end{aligned}$$

Então H_s e H_t são subálgebras de H que contém 1_H .

Para provar que os elementos de H_s comutam com os elementos de H_t , considere $\mathbf{x} = \epsilon_s(x)$ em H_s e $\mathbf{y} = \epsilon_t(y)$ em H_t . Então,

$$\mathbf{xy} = \epsilon_s(x) \epsilon_t(y)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)})\epsilon(1_{(1')}y)1_{(2')} \\
 &= \epsilon(1_{(1')}y)1_{(1)}1_{(2')}\epsilon(x1_{(2)}) \\
 &= \epsilon(1_{(1')}y)1_{(2')}1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)}) \\
 &= \epsilon_t(y)\epsilon_s(x) \\
 &= \mathbf{yx}.
 \end{aligned}$$

□

Na demonstração do Teorema anterior é usada a comutatividade da counidade,

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{k} \otimes H & \xleftarrow{\epsilon \otimes I} & H \otimes H & \xrightarrow{I \otimes \epsilon} & H \otimes \mathbb{k} \\
 & \searrow \cong \varphi & \uparrow \Delta & \swarrow \cong \psi & \\
 & & H & &
 \end{array}$$

Observação 2.9. Valem as seguintes propriedades:

- $\Delta(1) \in H_s \otimes H_t$
- $\epsilon_s(x\epsilon_s(y)) = \epsilon_s(x)\epsilon_s(y)$, ou seja, ϵ_s é morfismo de H_s -módulos à direita;
- $\epsilon_t(\epsilon_t(x)y) = \epsilon_t(x)\epsilon_t(y)$, ou seja, ϵ_t é morfismo de H_t -módulos à esquerda.

Demonstração. a)

$$\begin{aligned}
 \Delta(1) &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\
 &= 1_{(1)(1)}\epsilon(1_{(1)(2)}) \otimes 1_{(2)} \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}) \otimes 1_{(3)} \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(1')}1_{(2)}) \otimes 1_{(2')} \\
 &= \epsilon_s(1_{(1')}) \otimes 1_{(2')} \in H_s \otimes H.
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \Delta(1) &= 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)(1)})1_{(2)(2)} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(1')}1_{(2)})1_{(2')} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon_t(1_{(2)}) \in H \otimes H_t.
 \end{aligned}$$

Então $\Delta(1) \in (H_s \otimes H) \cap (H \otimes H_t) = H_s \otimes H_t$.

Os itens b) e c) já foram provados no Teorema 2.8, ao escrevermos que o produto em H_s e H_t é fechado, pois foram usadas as igualdades

$$\epsilon_s(x\epsilon_s(y)) = \epsilon_s(x)\epsilon_s(y) \quad \text{e} \quad \epsilon_t(\epsilon_t(x)y) = \epsilon_t(x)\epsilon_t(y).$$

□

Proposição 2.10. *Seja H uma biálgebra fraca e x em H . Então*

- (i) $\epsilon_s(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} = 1_{(1)} \otimes x_{(2)}$;
 (ii) $x_{(1)} \otimes \epsilon_t(x_{(2)}) = 1_{(1)} \otimes x_{(2)}$;
 (iii) $\epsilon_s(x)y = y_{(1)}\epsilon(xy_{(2)})$;
 (iv) $x\epsilon_t(y) = \epsilon(x_{(1)}y)x_{(2)}$.

Demonstração. (i)

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s(x_{(1)}) \otimes x_{(2)} &= 1_{(1)}\epsilon(x_{(1)}1_{(2)}) \otimes x_{(2)} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(x_{(1)}1_{(2)})x_{(2)} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(x_{(1)}1_{(1')}1_{(2)})x_{(2)}1_{(2')} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon(x_{(1)}1_{(2)(1)})x_{(2)}1_{(2)(2)} \\
 &= 1_{(1)} \otimes \epsilon((x1_{(2)})_{(1)})(x1_{(2)})_{(2)} \\
 &= 1_{(1)} \otimes x1_{(2)}.
 \end{aligned}$$

(ii) Análogo a (i)

(iii)

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s(x)y &= 1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)})y \\
 &= 1_{(1)}y\epsilon(x1_{(2)}) \\
 &\cong \psi(I \otimes \epsilon)(1_{(1)}y \otimes x1_{(2)}) \\
 &= \psi(I \otimes \epsilon)((1 \otimes x)(1_{(1)}y \otimes 1_{(2)})) \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \psi(I \otimes \epsilon)((1 \otimes x)(y_{(1)} \otimes \epsilon_t(y_{(2)}))) \\
 &= \psi(I \otimes \epsilon)(y_{(1)} \otimes x\epsilon_t(y_{(2)})) \\
 &= y_{(1)}\epsilon(x\epsilon_t(y_{(2)})) \\
 &= y_{(1)}\epsilon(xy_{(2)}).
 \end{aligned}$$

(iv) Análogo a (iii). □

Podemos definir também as seguintes aplicações \mathbb{k} -lineares,

$$\begin{array}{ccc}
 \epsilon'_s : H & \longrightarrow & H & & \epsilon'_t : H & \longrightarrow & H \\
 x & \longmapsto & 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}x), & & x & \longmapsto & \epsilon(x1_{(1)})1_{(2)}.
 \end{array}$$

Elas também são idempotentes com respeito à composição em $End(H)$ e, $\epsilon'_s(1_H) = \epsilon'_t(1_H) = 1_H$. Todavia, $H_s = Im(\epsilon'_s)$ e $H_t = Im(\epsilon'_t)$. Vamos ver algumas propriedades que as relacionam com ϵ_s e ϵ_t .

Proposição 2.11. *Sejam H biálgebra fraca e $x, y \in H$. Então valem as seguintes igualdades,*

- 1') $\epsilon'_s(\epsilon_s(x)) = \epsilon_s(x) \ e, \ \epsilon_s(\epsilon'_s(x)) = \epsilon'_s(x);$
- 2') $\epsilon'_t(\epsilon_t(x)) = \epsilon_t(x) \ e, \ \epsilon_t(\epsilon'_t(x)) = \epsilon'_t(x);$
- 3') $\epsilon'_s(\epsilon_t(x)) = \epsilon'_s(x) \ e, \ \epsilon_s(\epsilon'_t(x)) = \epsilon_s(x);$
- 4') $\epsilon'_t(\epsilon_s(x)) = \epsilon'_t(x) \ e, \ \epsilon_t(\epsilon'_s(x)) = \epsilon_t(x);$
- 5') $\epsilon'_s(xy) = \epsilon'_s(x\epsilon'_s(y)) \ e, \ \epsilon'_t(xy) = \epsilon'_t(\epsilon'_t(x)y);$
- 6') $\epsilon(xy) = \epsilon(\epsilon'_t(x)y) = \epsilon(x\epsilon'_s(y)).$

Demonstração. Seguem da definição. □

Observe que para todo $\mathbf{x} \in H_s$, $\epsilon'_s(\epsilon_t(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ e para todo $\mathbf{y} \in H_t$, $\epsilon_t(\epsilon'_s(\mathbf{y})) = \mathbf{y}$. Ou seja, ϵ_t e ϵ'_s são inversas uma da outra (domínios adequados). Similarmente, ϵ_s e ϵ'_t são inversas uma da outra (nos domínios adequados).

$$H_s \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon_t} \\ \xleftarrow{\epsilon'_s} \end{array} H_t ; \quad H_s \begin{array}{c} \xrightarrow{\epsilon'_t} \\ \xleftarrow{\epsilon_s} \end{array} H_t .$$

Veja também que para todo x, y in H , temos

$$\epsilon_t(\epsilon_s(x)\epsilon_s(y)) = \epsilon_t(\epsilon_s(x)\epsilon_t(\epsilon_s(y))) = \epsilon_t(\epsilon_t(\epsilon_s(y))\epsilon_s(x)) = \epsilon_t(\epsilon_s(y))\epsilon_t(\epsilon_s(x)).$$

Do mesmo modo, $\epsilon_s(\epsilon_t(x)\epsilon_t(y)) = \epsilon_s(\epsilon_t(y)\epsilon_s(\epsilon_t(x)))$ para todo $x, y \in H$, donde afirmamos que ϵ_t e ϵ_s são anti-multiplicativas quando restritas a H_s e H_t , respectivamente. Similarmente ϵ'_t e ϵ'_s são anti-multiplicativas quando restritas a H_s e H_t , respectivamente.

A seguir, as álgebras de Hopf fracas que na literatura também são conhecidas como *grupóides quânticos*.

Definição 2.12. Seja $(H, \mu, u, \Delta, \epsilon)$ uma biálgebra fraca. Dizemos que H é uma **álgebra de Hopf fraca** se existir uma função \mathbb{k} -linear $S : H \rightarrow H$, chamada *antípoda*, tal que

- i) $\epsilon_s(x) = S(x_{(1)})x_{(2)};$
- ii) $\epsilon_t(x) = x_{(1)}S(x_{(2)});$
- iii) $S(x) = S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)}).$

Observe que toda álgebra de Hopf é uma álgebra de Hopf fraca. Pode-se verificar que a antípoda, quando existe, é única.

Exemplo 2.13. Seja H uma álgebra de Hopf fraca com antípoda S . Então, H^* também é uma álgebra de Hopf fraca. Já mencionamos que H^* é uma biálgebra fraca. A antípoda é dada pela aplicação $S^* : H^* \rightarrow H^*$, definida por $S^*(f)(x) = f(S(x))$, para todo x em H , e todo f em H^* . Vale destacar aqui as igualdades na definição de Hopf fraca neste contexto.

$$\epsilon_s^*(f) = S^*(f_{(1)}) * f_{(2)}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_t^*(f) &= f_{(1)} * S^*(f_{(2)}) \\ S^*(f) &= S^*(f_{(1)}) * f_{(2)} * S^*(f_{(3)}).\end{aligned}$$

Não é o nosso objetivo detalhar este exemplo, para tal consulte [9] e [26], assim como algumas propriedades e igualdades de H^* como Hopf fraca.

No seguinte exemplo veremos em detalhe a estrutura de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ como álgebra de Hopf fraca.

Exemplo 2.14. (Álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$) Seja G um grupo finito. A álgebra do grupóide $\Gamma(G)$, $\mathbb{k}\Gamma(G)$, é, como afirmado no Exemplo 2.5, uma biálgebra fraca. De fato, o produto foi definido em (1.4). A unidade, sendo G finito, é

$$\mathbf{1} = 1_{\mathbb{k}\Gamma(G)} = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A).$$

O coproduto e a counidade são definidos como segue:

$$\Delta(g, A) = (g, A) \otimes (g, A); \quad \epsilon(g, A) = 1_{\mathbb{k}},$$

para todo $(g, A) \in \Gamma(G)$ e estendido por linearidade. Assim,

$$\Delta(\mathbf{1}) = \Delta\left(\sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A)\right) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} \Delta((e, A)) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} ((e, A) \otimes (e, A)), \quad (2.3)$$

que, em termos das projeções P_A 's, fica

$$\Delta(\mathbf{1}) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (P_A \otimes P_A). \quad (2.4)$$

Vejamos que de fato a aplicação Δ é um homomorfismo de álgebras. Sejam (g, A) e (h, B) em $\Gamma(G)$, então

$$\begin{aligned}\Delta(g, A)\Delta(h, B) &= ((g, A) \otimes (g, A))((h, B) \otimes (h, B)) \\ &= ((gh, B) \otimes (gh, B))\llbracket A = hB \rrbracket \\ &= \Delta((gh, B)\llbracket A = hB \rrbracket) \\ &= \Delta((g, A)(h, B)).\end{aligned}$$

Por outro lado, a aplicação ϵ não é um homomorfismo de álgebras, pois se (g, A) e (h, B) são elementos de $\Gamma(G)$ tais que $A \neq hB$, então $\epsilon((g, A)(h, B)) = 0$, enquanto $\epsilon(g, A)\epsilon(h, B) = (1)(1) = 1$. Logo, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ não é uma biálgebra.

Para provar que $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é biálgebra fraca, falta verificarmos as condições referentes à counidade ϵ e à unidade na Definição 2.1.

Provemos a condição referente à counidade ϵ na Definição 2.1. Sejam (g, A) , (h, B) e (t, C) em H , então

$$\epsilon((g, A)(h, B)(t, C)) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = hB \text{ e } B = tC, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\epsilon((g, A)(h, B)) = \begin{cases} 1, & \text{se } A = hB, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e,

$$\epsilon((h, B)(t, C)) = \begin{cases} 1, & \text{se } B = tC, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Ou seja, $\epsilon((g, A)(h, B)(t, C)) = \epsilon((g, A)(h, B))\epsilon((h, B)(t, C))$.

Para provar a condição referente à unidade na Definição 2.1, veja que,

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)\Delta(\mathbf{1}) &= (\Delta \otimes I)\Delta\left(\sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A)\right) = (\Delta \otimes I)\left(\sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A) \otimes (e, A)\right) \\ &= \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A) \otimes (e, A) \otimes (e, A) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} \otimes \Delta(\mathbf{1}))(\Delta(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1}) &= \left(\mathbf{1} \otimes \sum_{A' \in \mathcal{P}_e} (e, A') \otimes (e, A')\right) \left(\sum_{B \in \mathcal{P}_e} (e, B) \otimes (e, B) \otimes \mathbf{1}\right) \\ &= \left(\sum_{A, A' \in \mathcal{P}_e} (e, A) \otimes (e, A') \otimes (e, A')\right) \left(\sum_{A, B \in \mathcal{P}_e} (e, B) \otimes (e, B) \otimes (e, A)\right) \\ &= \sum_{A, A', B \in \mathcal{P}_e} (e, A) \otimes (e, A) \otimes (e, A) \llbracket A = B = A' \rrbracket \\ &= \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A) \otimes (e, A) \otimes (e, A). \end{aligned}$$

Logo, $\Delta^2(\mathbf{1}) = (\Delta \otimes I)\Delta(\mathbf{1}) = (\mathbf{1} \otimes \Delta(\mathbf{1}))(\Delta(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})$. Analogamente,

$$\Delta^2(\mathbf{1}) = (I \otimes \Delta)\Delta(\mathbf{1}) = (\Delta(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Delta(\mathbf{1})),$$

e assim,

$$((\mathbf{1} \otimes \Delta(\mathbf{1}))(\Delta(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})) = \Delta^2(\mathbf{1}) = (\Delta(\mathbf{1}) \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes \Delta(\mathbf{1})).$$

Portanto, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é uma biálgebra fraca (que não é biálgebra, no sentido clássico). Para provarmos que $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é uma álgebra de Hopf fraca, devemos verificar que a aplicação $S : \mathbb{k}\Gamma(G) \rightarrow \mathbb{k}\Gamma(G)$ definida por

$$S(g, A) = (g, A)^{-1} = (g^{-1}, gA),$$

para todo $(g, A) \in \Gamma(G)$ e estendida por linearidade satisfaz a Definição 2.12. De fato,

$$\begin{aligned} \epsilon_s(g, A) &= (e, A) = (g^{-1}, gA)(g, A) = S(g, A)(g, A), \\ \epsilon_t(g, A) &= (e, gA) = (g, A)(g^{-1}, gA) = (g, A)S(g, A), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 S(g, A)(g, A)S(g, A) &= (g^{-1}, gA)(g, A)(g^{-1}, gA) \\
 &= (e, A)(g^{-1}, gA) \\
 &= (g^{-1}, gA) \\
 &= S(g, A).
 \end{aligned}$$

Assim, provamos que $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é uma álgebra de Hopf fraca.

Observação 2.15. Para todo (g, A) em $\Gamma(G)$

$$\epsilon_s(g, A) = (e, A) \text{ e } \epsilon_t(g, A) = (e, gA).$$

Segue-se que

$$H_s = H_t = \text{span}\{(e, A) : A \in \mathcal{P}_e\} =: \mathcal{A}_\Gamma. \quad (2.5)$$

Temos então que \mathcal{A}_Γ é uma subálgebra comutativa, com antimorfismos ϵ'_s, ϵ_t , um inverso do outro quando restritos a \mathcal{A}_Γ , ver [18].

Vejamos algumas propriedades que relacionam as aplicações ϵ_s, ϵ_t e S , ver [4], [8], [9], [24], entre outros.

Proposição 2.16. *Seja H uma álgebra de Hopf fraca com antípoda S . Temos as seguintes igualdades.*

- a) $\epsilon_s = \epsilon'_s S = S \epsilon'_t$;
- b) $\epsilon_t = \epsilon'_t S = S \epsilon'_s$;
- c) $\epsilon_t S = \epsilon_t \epsilon_s = S \epsilon_s$;
- d) $\epsilon_s S = \epsilon_s \epsilon_t = S \epsilon_t$.

Demonstração. a) A igualdade $\epsilon_s = \epsilon'_s S$ segue

$$\begin{aligned}
 \epsilon_s(x) &= 1_{(1)}\epsilon(x1_{(2)}) \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(\epsilon_s(x)1_{(2)}) && \text{(pois } \epsilon(\mathbf{xy}) = \epsilon(\epsilon_s(\mathbf{x})\mathbf{y})) \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}\epsilon_s(x)) && \text{(pois } 1_{(2)} \in H_t \text{ e } \epsilon_s(x) \in H_s) \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}S(x_{(1)})x_{(2)}) \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}S(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)})) && \text{(pois } \epsilon(\mathbf{xy}) = \epsilon(\mathbf{x}\epsilon_t(\mathbf{y}))) \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})) \\
 &= 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}S(x)) \\
 &= \epsilon'_s(S(x)).
 \end{aligned}$$

b) A igualdade $\epsilon_t = \epsilon'_t$ segue

$$\begin{aligned}
\epsilon_t(x) &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \\
&= \epsilon(1_{(1)}\epsilon_t(x))1_{(2)} && (\text{pois } \epsilon(\mathbf{xy}) = \epsilon(\mathbf{x}\epsilon_t(\mathbf{y}))) \\
&= \epsilon(\epsilon_t(x)1_{(1)})1_{(2)} && (\text{pois } 1_{(1)} \in H_s \text{ e } \epsilon_t(x) \in H_t) \\
&= \epsilon(x_{(1)}S(x_{(2)})1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)})1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon(S(x)1_{(1)})1_{(2)} \\
&= \epsilon'_t(S(x)).
\end{aligned}$$

c) A igualdade $\epsilon_t S = \epsilon_t \epsilon_s$ segue

$$\begin{aligned}
\epsilon_t(S(x)) &= \epsilon(1_{(1)}S(x))1_{(2)} \\
&= \epsilon(1_{(1)}S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)}))1_{(2)} \\
&= \epsilon(1_{(1)}S(x_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)}))1_{(2)} \\
&= \epsilon(1_{(1)}S(x_{(1)})x_{(2)})1_{(2)} && (\text{pois } \epsilon(\mathbf{xy}) = \epsilon(\mathbf{x}\epsilon_t(\mathbf{y}))) \\
&= \epsilon(1_{(1)}\epsilon_s(x))1_{(2)} \\
&= \epsilon_t(\epsilon_s(x)).
\end{aligned}$$

d) A igualdade $\epsilon_s S = \epsilon_s \epsilon_t$ segue

$$\begin{aligned}
\epsilon_s(S(x)) &= 1_{(1)}(S(x)1_{(2)}) \\
&= 1_{(1)}(S(x_{(1)})x_{(2)}S(x_{(3)})1_{(2)}) \\
&= 1_{(1)}(\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)})1_{(2)}) \\
&= 1_{(1)}(x_{(1)}S(x_{(2)})1_{(2)}) && (\text{pois } \epsilon(\mathbf{xy}) = \epsilon(\epsilon_s(\mathbf{x})\mathbf{y})) \\
&= 1_{(1)}(\epsilon_t(x)1_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(\epsilon_t(x)).
\end{aligned}$$

As outras igualdades seguem do fato de H^* ser Hopf fraca quando H é Hopf fraca, ver Exemplo 2.13. \square

Do seguinte Teorema, a antípoda é anti-homomorfismo de álgebras e de coálgebras, e é unital.

Teorema 2.17. *H álgebra de Hopf fraca com antípoda S. Valem as seguintes propriedades:*

1. $S(xy) = S(y)S(x)$;
2. $S(x)_{(1)} \otimes S(x)_{(2)} = S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)})$;

$$3. S(1) = 1;$$

$$4. \epsilon(S(x)) = \epsilon(x).$$

Demonstração. 1.

$$\begin{aligned}
S(xy) &= S((xy)_{(1)})\epsilon_t((xy)_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)}y_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})\epsilon_t(x_{(2)})\epsilon_t(y_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})(x_{(2)}\epsilon_t(y_{(2)}))_{(1)}S((x_{(2)}\epsilon_t(y_{(2)}))_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)(1)}\epsilon_t(y_{(2)})_{(1)}S(x_{(2)(2)}\epsilon_t(y_{(2)})_{(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)(1)}\epsilon_t(y_{(2)})S(x_{(2)(2)}) \\
&= S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)(1)}y_{(2)(1)}S(y_{(2)(2)})S(x_{(2)(2)}) \\
&= S(x_{(1)(1)}y_{(1)(1)})x_{(1)(2)}y_{(1)(2)}S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= S((x_{(1)}y_{(1)})_{(1)})(x_{(1)}y_{(1)})_{(2)}S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(x_{(1)}y_{(1)})S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= \epsilon_s(\epsilon_s(x_{(1)})y_{(1)})S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\
&= S(y)\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)}) \qquad (S(h)g = \epsilon_s(gh_{(1)})S(h_{(2)})) \\
&= S(y)S(x).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
S(x)_{(1)} \otimes S(x)_{(2)} &= \Delta(S(x)) \\
&= \Delta(\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)})) \\
&= \Delta(\epsilon_s(x_{(1)}))\Delta(S(x_{(2)})) \\
&= (1_{(1)} \otimes \epsilon_s(x_{(1)})1_{(2)})\Delta(S(x_{(2)})) \\
&= 1_{(1)}S(x_{(2)})_{(1)} \otimes \epsilon_s(x_{(1)})1_{(2)}S(x_{(2)})_{(2)} \\
&= 1_{(1)}S(x_{(2)})_{(1)} \otimes S(x_{(1)(1)})x_{(1)(2)}1_{(2)}S(x_{(2)})_{(2)} \\
&= 1_{(1)}S(x_{(3)})_{(1)} \otimes S(x_{(1)})x_{(2)}1_{(2)}S(x_{(3)})_{(2)} \\
&= \epsilon_s(x_{(2)(1)})S(x_{(3)})_{(1)} \otimes S(x_{(1)})x_{(2)(2)}S(x_{(3)})_{(2)} \\
&= \epsilon_s(x_{(2)})S(x_{(4)})_{(1)} \otimes S(x_{(1)})x_{(3)}S(x_{(4)})_{(2)} \\
&= S(x_{(2)(1)})x_{(2)(2)}S(x_{(4)})_{(1)} \otimes S(x_{(1)})x_{(3)}S(x_{(4)})_{(2)} \\
&= S(x_{(2)})x_{(3)(1)}S(x_{(4)})_{(1)} \otimes S(x_{(1)})x_{(3)(2)}S(x_{(4)})_{(2)} \\
&= S(x_{(2)})(x_{(3)}S(x_{(4)}))_{(1)} \otimes S(x_{(1)})(x_{(3)}S(x_{(4)}))_{(2)} \\
&= S(x_{(2)})(\epsilon_t(x_{(3)}))_{(1)} \otimes S(x_{(1)})(\epsilon_t(x_{(3)}))_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S(x_{(2)})\epsilon_t(x_{(3)})1_{(1)} \otimes S(x_{(1)})1_{(2)} \\
 &= S(x_{(2)})x_{(3)}S(x_{(4)})1_{(1)} \otimes S(x_{(1)})1_{(2)} \\
 &= S(x_{(2)})1_{(1)} \otimes S(x_{(1)})1_{(2)} \\
 &= S(x_{(2)})\epsilon_s(1_{(1)}) \otimes S(x_{(1)})1_{(2)} \\
 &= S(x_{(2)})S(\epsilon'_t(1_{(1)})) \otimes S(x_{(1)})1_{(2)} && \text{(Prop. 2.16)} \\
 &= S(x_{(2)})S(\epsilon(1_{(1)}1_{(1')}1_{(2')})) \otimes S(x_{(1)})1_{(2)} \\
 &= S(x_{(2)})S(1_{(2')}) \otimes S(x_{(1)})\epsilon(1_{(1)}1_{(1')}1_{(2)}) \\
 &= S(x_{(2)})S(1_{(2')}) \otimes S(x_{(1)})\epsilon_t(1_{(1')}) \\
 &= S(x_{(2)})S(1_{(2')}) \otimes S(x_{(1)})\epsilon_t(\epsilon_s(1_{(1')})) \\
 &= S(x_{(2)})S(1_{(2')}) \otimes S(x_{(1)})S(\epsilon_s(1_{(1')})) && \text{(Prop. 2.16)} \\
 &= S(x_{(2)})S(1_{(2')}) \otimes S(x_{(1)})S(1_{(1')}) \\
 &= S(1_{(2')}x_{(2)}) \otimes S(1_{(1')}x_{(1)}) \\
 &= S(x_{(2)}) \otimes S(x_{(1)}).
 \end{aligned}$$

$$3. S(1) = S(1_{(1)})1_{(2)}S(1_{(3)}) = S(1_{(1)})1_{(2)}1_{(1')}S(1_{(2')}) = \epsilon_s(1)\epsilon_t(1) = 1.$$

$$4. \epsilon(S(x)) = \epsilon(\epsilon_s(x_{(1)})S(x_{(2)})) = \epsilon(x_{(1)}S(x_{(2)})) = \epsilon(\epsilon_t(x)) = \epsilon(x). \quad \square$$

Os dois resultados anteriores nos garantem algumas igualdades e relações que serão úteis na demonstração do teorema a seguir, o qual nos fornece uma ferramenta para determinar quando as biálgebras fracas são Hopf fracas, ver [7] e [28]. Devemos ter presente o Exemplo 2.13 que, em particular, afirma que o dual H^* de uma biálgebra (álgebra de Hopf) fraca H , é uma biálgebra (álgebra de Hopf) fraca também.

Teorema 2.18 (Schauenburg). *Seja H uma biálgebra fraca. Então, H é uma álgebra de Hopf fraca se, e somente se, a aplicação*

$$\begin{aligned}
 can : H \otimes_{H_s} H &\longrightarrow H \otimes H \\
 x \otimes y &\longmapsto x_{(1)} \otimes x_{(2)}y,
 \end{aligned}$$

induz o isomorfismo $H \otimes_{H_s} H \cong \Delta(1)(H \otimes H) = H \boxtimes H$.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja H uma álgebra de Hopf fraca com antípoda $S : H \rightarrow H$. Considere a aplicação

$$\tilde{\rho} : H \otimes H \longrightarrow H \otimes_{H_s} H,$$

definida como sendo $\tilde{\rho}(x \otimes y) = x_{(1)} \otimes S(x_{(2)})y$, para todo $x \otimes y$ em $H \otimes H$. Então,

$$\begin{aligned}
 (\tilde{\rho} \circ can)(x \otimes y) &= \tilde{\rho}(x_{(1)} \otimes x_{(2)}y) \\
 &= x_{(1)(1)} \otimes S(x_{(1)(2)})x_{(2)}y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_{(1)} \otimes S(x_{(2)(1)})x_{(2)(2)}y \\
&= x_{(1)} \otimes \epsilon_s(x_{(2)})y \\
&= x_{(1)}\epsilon_s(x_{(2)}) \otimes y && \text{(pois } \otimes \text{ aqui é balanceado sobre } H_s) \\
&= x \otimes y,
\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\rho} \circ \text{can} = \text{Id}_{H \otimes H}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\text{can} \circ \tilde{\rho})(x \otimes y) &= \text{can}(x_{(1)} \otimes S(x_{(2)})y) \\
&= x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)}S(x_{(2)})y \\
&= x_{(1)} \otimes x_{(2)(2)}S(x_{(2)(2)})y \\
&= x_{(1)} \otimes \epsilon_t(x_{(2)})y \\
&= 1_{(1)}x_{(1)} \otimes \epsilon_t(1_{(2)}x_{(2)})y \\
&= 1_{(1)}x_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(1')}1_{(2)}x_{(2)})1_{(2')}y \\
&= 1_{(1)}x_{(1)} \otimes \epsilon(1_{(2)}x_{(2)})1_{(3)}y \\
&= 1_{(1)}x_{(1)}\epsilon(1_{(2)}x_{(2)}) \otimes 1_{(3)}y \\
&= 1_{(1)(1)}x_{(1)}\epsilon(1_{(1)(2)}x_{(2)}) \otimes 1_{(2)}y \\
&= (1_{(1)}x)_{(1)}\epsilon((1_{(1)}x)_{(2)}) \otimes 1_{(2)}y \\
&= 1_{(1)}x \otimes 1_{(2)}y,
\end{aligned}$$

isto é, $\text{can} \circ \rho = \text{Id}_{H \otimes_{H_s} H}$, em que $\rho := \tilde{\rho}|_{\Delta(1)(H \otimes H)}$.

(\Leftarrow) Suponha agora que $\rho : H \otimes_{H_s} H \rightarrow \Delta(1)(H \otimes H)$ é um isomorfismo com inversa $\rho^{-1} : \Delta(1)(H \otimes H) \rightarrow H \otimes_{H_s} H$. Defina a aplicação

$$\pi : H \otimes_{H_s} H \rightarrow H$$

por $\pi(g \otimes h) = \epsilon_s(g)h$, e a aplicação

$$S : H \rightarrow H$$

por $S(h) = \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}))$. Como H é uma biálgebra fraca, falta apenas mostrarmos que é Hopf fraca. Mostraremos então que S definida acima é a antípoda de H , isto é, satisfaz as igualdades na Definição 2.12. Primeiro, veja que

$$\begin{aligned}
S(h_{(1)})h_{(2)} &= \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}h_{(1)} \otimes 1_{(2)}))h_{(2)} \\
&= \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}h_{(1)} \otimes 1_{(2)})(1 \otimes h_{(2)})) \quad (\text{pois } h_{(2)} = \epsilon_s(1)h_{(2)} = \pi(1 \otimes h_{(2)})) \\
&= \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}h_{(1)} \otimes 1_{(2)}h_{(2)})) \\
&= \pi(h_{(1)} \otimes h_{(2)}) \\
&= \pi(h \otimes 1)
\end{aligned}$$

$$= \epsilon_s(h)1 = \epsilon_s(h),$$

como queríamos mostrar. Para provar que $h_{(1)}S(h_{(2)}) = \epsilon_t(h)$, afirmamos que ρ^{-1} é a restrição da aplicação

$$\delta : H \otimes H \longrightarrow H \otimes_{H_s} H$$

definida por $\delta(g \otimes h) = g_{(1)} \otimes S(g_{(2)})h$. De fato,

$$\begin{aligned} (\delta \circ \text{can})(g \otimes h) &= \delta(g_{(1)} \otimes g_{(2)}h) \\ &= g_{(1)} \otimes S(g_{(2)})g_{(3)}h \\ &= g_{(1)} \otimes \epsilon_s(g_{(2)})h \\ &= g_{(1)}\epsilon_s(g_{(2)}) \otimes h \\ &= g \otimes h. \end{aligned}$$

Observemos agora que, para todo $y \in H_s$, temos

$$\begin{aligned} S(yh) &= \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}yh \otimes 1_{(2)})) \\ &= \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}\epsilon_t(y))) \\ &= \pi(\rho^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}))\epsilon_t(y) \\ &= S(h)\epsilon_t(y), \end{aligned}$$

e como $\Delta(1) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \in H_s \otimes H_t$, podemos fazer a seguinte conta:

$$\begin{aligned} 1_{(1)}h \otimes 1_{(2)} &= \rho\rho^{-1}(1_{(1)}h \otimes 1_{(2)}) \\ &= \rho(h_{(1)} \otimes S(1_{(1)}h_{(2)})1_{(2)}) \\ &= \rho(h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})1_{(1)}\epsilon_t(1_{(1)})1_{(2)}) \\ &= \rho(h_{(1)} \otimes S(h_{(2)})) \\ &= h_{(1)} \otimes h_{(2)}S(h_{(3)}), \end{aligned}$$

donde, aplicando $\mu \circ (\epsilon \otimes id_H)$ obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon_t(1_{(1)}h)1_{(2)} &= \epsilon(1_{(1)}h)1_{(2)} \\ &= \epsilon(h_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)}) \\ &= h_{(1)}S(h_{(2)}), \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. Falta provarmos que $S(h_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)})$. De fato,

$$\begin{aligned} S(h_{(1)})h_{(2)}S(h_{(3)}) &= S(h_{(1)})\epsilon_t(h_{(2)}) \\ &= S(h_{(1)})\epsilon_t\epsilon_t(h_{(2)}) \\ &= S(h_{(1)})\epsilon_t(S(\epsilon'_s(h_{(2)}))) \quad (\text{Proposição 2.16, item b)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= S(h_{(1)})\epsilon_t(\epsilon_s(\epsilon'_s(h_{(2)}))) && \text{(Proposição 2.16, item c)} \\
 &= S(h_{(1)})\epsilon_t(\epsilon'_s(h_{(2)})) && \text{(pois } \epsilon_s\epsilon'_s = \epsilon'_s) \\
 &= S(\epsilon'_s(h_{(2)})h_{(1)}) && \text{(pois } \epsilon'_s(h_{(2)}) \in H_s) \\
 &= S(h).
 \end{aligned}$$

□

2.2 HOPF ALGEBRÓIDES

Nesta seção veremos a definição formal de Hopf algebróides, [7], [8], e em particular veremos que toda álgebra de Hopf fracá é um Hopf algebróide. Com isto, obtendo que a álgebra do grupóide $\Gamma(G)$, $\mathbb{k}\Gamma(G)$, também é um Hopf algebróide. Ver [24] e [28].

Lembramos que (C, Δ, ϵ) é dito ser um A -coanel, se é um objeto coálgebra (ou comonóide) na categoria monoidal $({}_A\mathcal{M}_A, \otimes_A, A)$, ver [11].

Definição 2.19. Dada uma \mathbb{k} -álgebra A , um **bialgebróide** à esquerda (à direita) sobre A é dado pela sextupla $(\mathcal{H}, A, s, t, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l)$ (respect. $(\mathcal{H}, A, \tilde{s}, \tilde{t}, \underline{\Delta}_r, \underline{\epsilon}_r)$) tal que:

- (1) \mathcal{H} é uma \mathbb{k} -álgebra.
- (2) A aplicação s (respectivamente, \tilde{s}) é um morfismo de álgebras de A em \mathcal{H} , e a aplicação t (respectivamente, \tilde{t}) é um anti-morfismo de álgebras de A em \mathcal{H} . O conjunto das suas imagens comutam, isto é, para todo $a, b \in A$ temos que

$$s(a)t(b) = t(b)s(a) \quad (\text{respectivamente, } \tilde{s}(a)\tilde{t}(b) = \tilde{t}(b)\tilde{s}(a)).$$

Pelas aplicações s, t (respectivamente, \tilde{s}, \tilde{t}), a álgebra \mathcal{H} herda uma estrutura de A bimódulo dada pela regra:

$$a \triangleright h \triangleleft b = s(a)t(b)h \quad (\text{respect. } a \triangleright h \triangleleft b = h\tilde{s}(b)\tilde{t}(a)).$$

As aplicações s e t usualmente são chamadas de “source” e “target”, respectivamente.

- (3) A tripla $(\mathcal{H}, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l)$ (respect. $(\mathcal{H}, \underline{\Delta}_r, \underline{\epsilon}_r)$) é um A -coanel relativo à estrutura de A bimódulo definida pela s e t (respect. \tilde{s} e \tilde{t}).
- (4) A counidade $\underline{\Delta}_l$ (respect. $\underline{\Delta}_r$) tem imagem na subálgebra de Takeuchi

$$\mathcal{H} \times_A \mathcal{H} = \left\{ \sum_i h_i \otimes k_i \in \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} : \sum_i h_i t(a) \otimes k_i = \sum_i h_i \otimes k_i s(a) \quad \forall a \in A \right\}$$

(respectivamente,

$$\mathcal{H} \times_A \mathcal{H} = \left\{ \sum_i h_i \otimes k_i \in \mathcal{H} \otimes_A \mathcal{H} : \sum_i \tilde{s}(a) h_i \otimes k_i = \sum_i h_i \otimes \tilde{t}(a) k_i \quad \forall a \in A \right\},$$

e é um morfismo de álgebras.

(5) Para todo $h, k \in \mathcal{H}$, temos

$$\underline{\epsilon}_l(hk) = \underline{\epsilon}_l(hs(\underline{\epsilon}_l(k))) = \underline{\epsilon}_l(ht(\underline{\epsilon}_l(k)))$$

(respectivamente,

$$\underline{\epsilon}_r(hk) = \underline{\epsilon}_r(\tilde{s}(\underline{\epsilon}_r(h))k) = \underline{\epsilon}_r(\tilde{t}(\underline{\epsilon}_r(h))k).$$

Exemplo 2.20. As \mathbb{k} -biálgebras são \mathbb{k} -bialgebróides à esquerda.

Definição 2.21. Sejam $\mathcal{H}_l = (\mathcal{H}, A, s, t, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l)$ e $\mathcal{H}'_l = (\mathcal{H}', A', s', t', \underline{\Delta}'_l, \underline{\epsilon}'_l)$ dois A -bialgebróides à esquerda. Um homomorfismo de A -bialgebróides

$$\Phi : \mathcal{H}_l \longrightarrow \mathcal{H}'_l$$

é um par de homomorfismos

$$\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}', \quad \phi : A \longrightarrow A'$$

tais que,

$$s' \circ \phi = \Phi \circ s$$

$$t' \circ \phi = \Phi \circ t$$

$$\underline{\epsilon}'_l \circ \Phi = \phi \circ \underline{\epsilon}_l$$

$$\underline{\Delta}'_l \circ \Phi = (\Phi \otimes \Phi) \circ \underline{\Delta}_l.$$

As igualdades anteriores se referem à comutatividade dos seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & \mathcal{H} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ A' & \xrightarrow{s'} & \mathcal{H}' \end{array}$$

$$s' \circ \phi = \Phi \circ s,$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{t} & \mathcal{H} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ A' & \xrightarrow{t'} & \mathcal{H}' \end{array}$$

$$t' \circ \phi = \Phi \circ t,$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\underline{\epsilon}_l} & A \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{H}' & \xrightarrow{\underline{\epsilon}'_l} & A' \end{array}$$

$$\underline{\epsilon}'_l \circ \Phi = \phi \circ \underline{\epsilon}_l,$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\underline{\Delta}_l} & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \otimes \Phi \\ \mathcal{H}' & \xrightarrow{\underline{\Delta}'_l} & \mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}' \end{array}$$

$$\underline{\Delta}'_l \circ \Phi = (\Phi \otimes \Phi) \circ \underline{\Delta}_l.$$

Analogamente podemos definir morfismos de A -bialgebróides à direita. Dizemos que o par (Φ, ϕ) descrito anteriormente é um isomorfismo de bialgebróides à esquerda

se Φ e ϕ são bijetivas. Repare que, de forma geral, um homomorfismo $\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ de bialgebróides à direita (isomorfismo), isto é, um par $(\Phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}', \phi : A \rightarrow A')$, é um homomorfismo (isomorfismo) de bialgebróides à esquerda $\mathcal{H}^{op} \rightarrow \mathcal{H}'^{op}$.

A seguir apresentamos a definição de Hopf Algebróide. Cabe ressaltar que iremos estudar este assunto sem muitos detalhes pois o nosso interesse é apenas mostrar que H_{par} e $k\Gamma(G)$ são isomorfas como Hopf algebróides. Este assunto é amplo e quem se interessar pode consultar as referências já mencionadas anteriormente, em particular sugerimos os livros [7] e [9], e o trabalho de dissertação de mestrado [24].

Definição 2.22. Dadas duas álgebras anti-isomorfas A e \tilde{A} , isto é, $A \cong \tilde{A}^{op}$, um A -bialgebróide à esquerda $\mathcal{H}_l := (\mathcal{H}, A, s, t, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_r)$ e um A -bialgebróide à direita $\mathcal{H}_r := (\mathcal{H}, \tilde{A}, \tilde{s}, \tilde{t}, \underline{\Delta}_r, \underline{\epsilon}_r)$. Dizemos que a tripla $(\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{S})$ é um **Hopf algebróide** sobre \mathcal{H} se $\mathcal{S} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é um anti-homomorfismo de álgebras tal que,

- (i) $s \circ \underline{\epsilon}_l \circ \tilde{t} = \tilde{t}, t \circ \underline{\epsilon}_l \circ \tilde{s} = \tilde{s}, \tilde{s} \circ \underline{\epsilon}_r \circ t = t, \tilde{t} \circ \underline{\epsilon}_r \circ s = s;$
- (ii) $(\underline{\Delta}_l \otimes_{\tilde{A}} I) \circ \underline{\Delta}_r = (I \otimes_A \underline{\Delta}_r) \circ \underline{\Delta}_l, (I \otimes_{\tilde{A}} \underline{\Delta}_l) \circ \underline{\Delta}_r = (\underline{\Delta}_r \otimes_A I) \circ \underline{\Delta}_l;$
- (iii) $\mathcal{S}(t(a)h\tilde{t}(b')) = \tilde{s}(b')\mathcal{S}(h)s(a)$, para todo $a \in A, b' \in \tilde{A}$ e $h \in \mathcal{H};$
- (iv) $\mu_{\mathcal{H}} \circ (\mathcal{S} \otimes I) \circ \underline{\Delta}_l = \tilde{s} \circ \underline{\epsilon}_r$, e $\mu_{\mathcal{H}} \circ (I \otimes \mathcal{S}) \circ \underline{\Delta}_r = s \circ \underline{\epsilon}_l.$

Exemplo 2.23. Seja A é uma álgebra. Podemos munir a álgebra $A \otimes A^{op}$ com a estrutura de Hopf algebróide $(A \otimes A^{op}, A, s, t, \Delta, \epsilon, \mathcal{S})$ em que

- $s : A \rightarrow A \otimes A^{op}$ é definida por $s(b) = b \otimes 1;$
- $t : A \rightarrow A \otimes A^{op}$ é definida por $t(b) = 1 \otimes b;$
- $\Delta : A \otimes A^{op} \rightarrow (A \otimes A^{op}) \otimes_a (A \otimes A^{op})$ é definida por $\Delta(a \otimes b) = (a \otimes 1)(1 \otimes b);$
- $\epsilon : A \otimes A^{op} \otimes a$ é definida por $\epsilon(a \otimes b) = ab;$
- $\mathcal{S} : A \otimes A^{op} \rightarrow A \otimes A^{op}$ é definida por $\mathcal{S}(a \otimes b) = b \otimes a.$

Definição 2.24. Um homomorfismo de Hopf algebróides $\Phi : (\mathcal{H}_l, \mathcal{H}_r, \mathcal{S}) \rightarrow (\mathcal{H}'_l, \mathcal{H}'_r, \mathcal{S}')$ é um homomorfismo de bialgebróides à esquerda $(\Phi, \phi) : \mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{H}'_l.$

Se na definição anterior Φ e ϕ são bijetivas, dizemos que Φ é um isomorfismo de Hopf algebróides.

Estamos usando o fato de que, a antípoda \mathcal{S} é bijetiva. Neste caso, é suficiente verificar o isomorfismo de bialgebróides à esquerda, ver [6].

Proposição 2.25. *Toda álgebra de Hopf fracca é um Hopf algebróide.*

Demonstração. Considere $(H, \Delta, \epsilon, \mathcal{S})$ uma álgebra de Hopf fracca. Primeiro, vejamos que $(H, H_t, \iota, \epsilon'_s, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l)$ é um H_t -bialgebróide à esquerda, sendo

$$H_t = \text{Im}(\epsilon_t),$$

com $\epsilon_t(h) = \epsilon(1_{(1)}h)1_{(2)}$ para todo $h \in H$, ver Definição 2.6; a aplicação source

$$\iota : H_t \longrightarrow H,$$

é o morfismo inclusão, isto é, $\iota(h) = h$, para todo $h = \epsilon_t(h) \in H_t$; a aplicação target

$$\epsilon'_s : H_t \longrightarrow H,$$

em que $\epsilon'_s(h) = 1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}h)$ para todo $h = \epsilon_t(h) \in H_t$;

$$\underline{\Delta}_l := \pi \circ \Delta : H \longrightarrow H \otimes_{H_t} H,$$

em que $\pi : H \otimes H \longrightarrow H \otimes_{H_t} H$ é a projeção canônica e;

$$\underline{\epsilon}_l : H \longrightarrow H_t$$

em que $\underline{\epsilon}_l(h) := \epsilon_t(h) = \epsilon(1_{(1)}h)1_{(2)}$. Temos que,

1. H é uma \mathbb{k} -álgebra;
2.
 - ι é um morfismo de álgebras, pois é a inclusão.
 - $\epsilon'_s(hk)$ é um anti-morfismo de álgebras, ver página 48.
 - $\epsilon'_s(h)\iota(k) = \iota(k)\epsilon'_s(h)$, pois $Im(\epsilon'_s) = Im(\epsilon_s) = H_s$, e os elementos de H_s comutam com os elementos de H_t .
3. H é um H_t -coanel com a estrutura de H_t -bimódulo induzida pelos morfismos ι e ϵ'_s , isto é,

$$x \triangleright h \triangleleft y := x\epsilon'_s(y)h,$$

para todo $h \in H$, $x, y \in H_t$. Repare que, não é difícil mostrar esta estrutura dado que ϵ'_s é um antimorfismo quando restrito a H_t , ver página 48.

Para mostrarmos que $\underline{\Delta}_l$ é um morfismo de H_t -bimódulos, veja que, para todo $x \in H_t$ e todo $h \in H$ temos

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_l(x \triangleright h) &= \underline{\Delta}_l(xh) \\ &= \underline{\Delta}_l(x)\underline{\Delta}_l(h) \\ &= \underline{\Delta}_l(\epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)})(h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)}) && (x = \epsilon_t(x)) \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)\underline{\Delta}_l(1_{(2)})(h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)}) \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)(1_{(2)} \otimes_{H_t} 1_{(3)})(h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)}) \\ &= (\epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)} \otimes_{H_t} 1_{(3)})(h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)}) \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}h_{(1)} \otimes_{H_t} 1_{(3)}h_{(2)} \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}1_{(1')}h_{(1)} \otimes_{H_t} 1_{(2')}h_{(2)} \\ &= \epsilon(1_{(1)}x)1_{(2)}h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)} \\ &= \epsilon_t(x)h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_t(x) \underline{\Delta}(h) \\
&= \epsilon_t(x) \triangleright \underline{\Delta}(h) = x \triangleright \underline{\Delta}(h).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\underline{\Delta}_l(h \triangleleft x) &= \underline{\Delta}_l(\epsilon'_s(x)h) \\
&= \underline{\Delta}_l(1_{(1)}\epsilon(1_{(2)}x)h) \\
&= \underline{\Delta}_l(1_{(1)}h)\epsilon(1_{(2)}x) \\
&= (1_{(1)}h_{(1)} \otimes_{H_t} 1_{(2)}h_{(2)})\epsilon(1_{(3)}x) \\
&= (1_{(1)}h_{(1)} \otimes_{H_t} 1_{(1')}1_{(2)}h_{(2)})\epsilon(1_{(2')}x) \\
&= 1_{(1)}h_{(1)} \otimes_{H_t} 1_{(1')}\epsilon(1_{(2')}x)1_{(2)}h_{(2)} \\
&= h_{(1)} \otimes_{H_t} 1_{(1')}\epsilon(1_{(2')}x)h_{(2)} \\
&= h_{(1)} \otimes_{H_t} \epsilon'_s(x)h_{(2)} \\
&= h_{(1)} \otimes_{H_t} h_{(2)} \triangleleft \epsilon'_s(x) = \underline{\Delta}_l(h) \triangleleft x.
\end{aligned}$$

Para provar que $\underline{\epsilon}_l$ é H_t -bilinear, veja que na Observação 2.9 provamos que ϵ_t é morfismo de H_t -módulo à esquerda, logo, para todo $x \in H_t$ e todo $h \in H$ temos,

$$\begin{aligned}
\underline{\epsilon}_l(x \triangleright h) &= \epsilon_t(xh) \\
&= \epsilon_t(x)\epsilon_t(h) \\
&= x\epsilon_t(h) = x\underline{\epsilon}_l(h) \quad (x = \epsilon_t(x)).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\underline{\epsilon}_l(h \triangleleft x) &= \epsilon_t(\epsilon'_s(x)h) \\
&= \epsilon_t(\epsilon'_s(x)\epsilon_t(h)) \\
&= \epsilon_t(\epsilon_t(h)\epsilon'_s(x)) \\
&= \epsilon_t(h)\epsilon_t(\epsilon'_s(x)) \\
&= \epsilon_t(h)\epsilon_t(x) \\
&= \underline{\epsilon}_l(h)\epsilon_t(x) = \underline{\epsilon}_l(h)x.
\end{aligned}$$

A coassociatividade segue da própria definição de $\underline{\Delta}_l$ e $\underline{\epsilon}_l$.

4. (Produto Takeuchi) Precisamos provar que a imagem de $\underline{\Delta}_l$ se encontra na subálgebra de Takeuchi

$$H \times_{H_t} H = \left\{ \sum_i h_i \otimes k_i \in H \otimes_{H_t} H : \sum_i h_i \epsilon'_s(a) \otimes k_i = \sum_i h_i \otimes k_i \epsilon_t(a) \quad \forall a \in H_t \right\},$$

Para provarmos que a afirmação acima é verdadeira, vamos a usar o fato de que a álgebra H_t é uma álgebra Frobenius Separável. Para isto, lembremos que H_t será **Frobenius separável** se existirem

$$e = \sum x_i \otimes y_i \in H_t \otimes H_t,$$

e uma aplicação

$$E : H_t \longrightarrow \mathbb{k}$$

tais que,

$$\begin{aligned} \sum x_i y_i &= 1, \\ b &= \sum_i E(bx_i) y_i = \sum_i x_i E(y_i b), \end{aligned}$$

para todo $b \in H_t$.

De fato, se definirmos

$$e = \epsilon_t(1_{(1)}) \otimes 1_{(2)}, \quad E = \epsilon,$$

lembrando que, $\Delta(1) = 1_{(1)} \otimes 1_{(2)} \in H_s \otimes H_t$, obtemos

$$\sum \epsilon_t(1_{(1)}) 1_{(2)} = \epsilon_t(1_{(1)}) 1_{(2)} = 1,$$

e, se $x \in H_t$,

$$\sum \epsilon(x 1_{(1)}) 1_{(2)} = \sum \epsilon'_t(x) = \epsilon'_t(\epsilon_t(x)) = \epsilon_t(x) = x,$$

que é exatamente o que queríamos, pois me garante que a imagem de $\underline{\Delta}_l$ está contida na subálgebra de Takeuchi acima.

5. Por último, precisamos provar que, para todo $h, k \in \mathcal{H}$, temos

$$\underline{\epsilon}_l(hk) = \underline{\epsilon}_l(h\iota(\underline{\epsilon}_l(k))) = \underline{\epsilon}_l(h\epsilon'_s(\underline{\epsilon}_l(k))).$$

Mas isto decorre de ι ser a inclusão e usando as propriedades na Proposição 2.11, pois

$$\begin{aligned} \epsilon_t(hk) &= \epsilon_t(h\epsilon_t(k)) \\ &= \epsilon_t(h\iota(\epsilon_t(k))), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \epsilon_t(hk) &= \epsilon(1_{(1')} hk) 1_{(2')} \\ &= \epsilon(1_{(1')} h 1_{(1)}) \epsilon(1_{(2)} k) 1_{(2')} \\ &= \epsilon_t(h 1_{(1)}) \epsilon(1_{(2)} k) \\ &= \epsilon_t(h 1_{(1)} \epsilon(1_{(2)} k)) \\ &= \epsilon_t(h \epsilon'_s(k)) \\ &= \epsilon_t(h \epsilon'_s(\epsilon_t(k))). \end{aligned}$$

Analogamente, podemos ver que H é um H_s -bialgebróide à direita com a estrutura $(H, H_s, \iota', \epsilon'_t, \underline{\Delta}_r, \epsilon_s)$, sendo,

$$H_s = \text{Im}(\epsilon_s),$$

com $\epsilon_s(h) = 1_{(1)}\epsilon(h1_{(2)})$ para todo $h \in H$; a aplicação source

$$\iota' : H_s \longrightarrow H,$$

em que $\iota'(h) = h$ para todo $h = \epsilon_s(h) \in H_s$; a aplicação target

$$\epsilon'_t : H_s \longrightarrow H,$$

em que $\epsilon'_t(h) = \epsilon(h1_{(1)})1_{(2)}$ para todo $h = \epsilon_s(h) \in H_s$;

$$\underline{\Delta}_r := \pi' \circ \Delta : H \longrightarrow H \otimes_{H_s} H,$$

em que $\pi' : H \otimes H \longrightarrow H \otimes_{H_s} H$ é a projeção canônica e;

$$\underline{\epsilon}_r : H \longrightarrow H_s,$$

em que $\underline{\epsilon}_r := \epsilon_s(h) = 1_{(1)}\epsilon(h1_{(2)})$. A estrutura de H_s -bimódulo induzida pelos morfismos ι' e ϵ'_t é dada por

$$h \blacktriangleright a \blacktriangleleft k := ak\epsilon'_t(h).$$

Até agora temos o seguinte,

- (I) $(H, H_t, \iota, \epsilon'_s, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l)$ um H_t -bialgebróide à esquerda;
- (II) $(H, H_s, \iota', \epsilon'_t, \underline{\Delta}_r, \underline{\epsilon}_r)$ um H_s -bialgebróide à direita;

No que segue, mostraremos que as igualdades (i), (ii), (iii) e (iv) na Definição 2.22 são satisfeitas, lembrando que queremos provar que $(H, H_t, H_s, \iota, \iota', \epsilon'_s, \epsilon'_t, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l, \underline{\Delta}_r, \underline{\epsilon}_r, S)$ é um Hopf algebróide em que (H, Δ, ϵ, S) é uma álgebra de Hopf fracá.

- (i) Seguindo as propriedades vistas na Proposição 2.11, e tomando cuidado com os respectivos domínios, obtemos as seguintes quatro igualdades,

$$\begin{aligned} \iota \circ \epsilon_t \circ \epsilon_t &= \epsilon_t \\ \epsilon'_s(\epsilon_t(\iota'(\epsilon_s(h)))) &= \epsilon'_s(\epsilon_s(h)) = \epsilon_s(h) \\ \iota'(\epsilon_s(\epsilon'_t(\epsilon_s(h)))) &= \epsilon'_t(\epsilon_s(h)) \\ \epsilon'_t(\epsilon_s(\epsilon_t(h))) &= \epsilon'_t(\epsilon_t(h)) = \epsilon_t(h), \end{aligned}$$

para todo $h \in H$.

- (ii) É direto, levando em consideração que as seguintes igualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} (\underline{\Delta}_l \otimes_{H_s} I)(\underline{\Delta}_r(h)) &= (I \otimes_{H_t} \underline{\Delta}_r)(\underline{\Delta}_l(h)), \\ (I \otimes_{H_s} \underline{\Delta}_l)(\underline{\Delta}_r(h)) &= (\underline{\Delta}_r \otimes_{H_t} I)(\underline{\Delta}_l(h)). \end{aligned}$$

- (iii) Seguindo as propriedades vistas nas Proposições 2.11 e 2.16, obtemos que

$$S(\epsilon'_s(\epsilon_t(a))h\epsilon'_t(\epsilon_s(b'))) = S(\epsilon'_s(a)h\epsilon'_t(b'))$$

$$\begin{aligned}
 &= S(\epsilon'_t(b'))S(h)S(\epsilon'_s(a)) \\
 &= \epsilon_s(b')S(h)\epsilon_t(a) \\
 &= \iota'(\epsilon_s(b'))S(h)\iota(\epsilon_t(b')).
 \end{aligned}$$

para todo $\epsilon_t(a) \in H_t$ e todo $\epsilon_s(b') \in H_s$.

(iv) Estas igualdades são diretas também, usando as propriedades da antípoda de uma álgebra de Hopf frac, ver Definição 2.12, e considerando a propriedade universal de π e π' como projeções canônicas:

$$\mu_H((S \otimes I)(\underline{\Delta}_l(h))) = \mu_H(S(h_{(1)}) \otimes_{H_t} h_{(2)}) = S(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon_s(h) = \iota'(\epsilon_s(h))$$

e,

$$\mu_H((I \otimes S)(\underline{\Delta}_r(h))) = \mu_H(h_{(1)} \otimes_{H_s} S(h_{(2)})) = h_{(1)}S(h_{(2)}) = \epsilon_t(h) = \iota(\epsilon_t(h)).$$

Portanto, toda álgebra de Hopf frac é um Hopf algebróide. \square

Em particular, como $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é uma álgebra de Hopf frac, ver Exemplo 2.14, então é um Hopf algebróide com a seguinte estrutura:

$$(H, H_t, H_s, \iota, \iota', \epsilon'_s, \epsilon'_t, \underline{\Delta}_l, \epsilon_l, \underline{\Delta}_r, \epsilon_r, S) = (\mathbb{k}\Gamma(G), \mathcal{A}_\Gamma, \mathcal{A}_\Gamma, \iota, \iota', \epsilon'_s, \epsilon'_t, \Delta_{\mathcal{A}_\Gamma}, \epsilon_t, \Delta_{\mathcal{A}_\Gamma}, \epsilon_s, S),$$

ou seja, $(\mathbb{k}\Gamma(G), \mathcal{A}_\Gamma, \iota, \epsilon'_s, \epsilon'_t, \Delta_{\mathcal{A}_\Gamma}, \epsilon_t, \epsilon_s, S)$ com $\iota : \mathcal{A}_\Gamma \rightarrow \mathbb{k}\Gamma(G)$ a inclusão, e as outras aplicações já foram definidas. Repare em particular que,

$$\epsilon_s((g, A)) = \epsilon'_t((g, A)) = (e, A),$$

$$\epsilon_t((g, A)) = \epsilon'_s((g, A)) = (e, gA).$$

Segue que, $\epsilon_s, \epsilon_t, \epsilon'_s$ e ϵ'_t , quando restritas a \mathcal{A}_Γ coincidem e se comportam igual à inclusão.

Aqui vale observar o seguinte. O Teorema 2.18 nos diz que, por $\mathbb{k}\Gamma(G)$ ser uma álgebra frac, então $\mathbb{k}\Gamma(G) \otimes_{\mathcal{A}_\Gamma} \mathbb{k}\Gamma(G) \cong \Delta(1)(\mathbb{k}\Gamma(G) \otimes \mathbb{k}\Gamma(G))$. Ou seja, se denotarmos o produto tensorial balanceado sobre \mathcal{A}_Γ por \boxtimes , então

$$M \boxtimes N \cong \Delta(1)(M \otimes N) = \sum_{A \in \mathcal{P}_e} (e, A)(M \otimes N).$$

Repare que, esta última expressão à direita poderia ser escrita como $\sum_{A \in \mathcal{P}_e} P_A(M \otimes N)$ graças ao isomorfismo do Teorema 3.1, isto será útil quando definirmos os objetos simples de $\mathbb{k}_{par}(G)$ na Seção 3.1, e graças à idempotência de P_A .

Para o próximo exemplo de Hopf algebróides precisaremos de mais informações e algumas definições adicionais. Devido a isto, estudamos na seção a seguir as representações parciais de uma álgebra de Hopf e, no fim, definimos a álgebra H_{par} que é o Hopf algebróide que nos interessa.

2.3 REPRESENTAÇÕES PARCIAIS DE ÁLGEBRAS DE HOPF

Aos poucos, iremos conectando cada uma das definições até aqui apresentadas, que estão todas elas relacionadas às álgebras $\mathbb{k}_{par}(G)$ e $\mathbb{k}\Gamma(G)$. Vamos definir a álgebra H_{par} , que em particular é um Hopf algebróide, sendo que quando $H = \mathbb{k}G$, a álgebra $(\mathbb{k}G)_{par}$ é exatamente a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$. Assim, quando G finito

$$\mathbb{k}\Gamma(G) \cong \mathbb{k}_{par}(G) = (\mathbb{k}G)_{par}.$$

O primeiro isomorfismo já foi provado, pelo menos como álgebras. Além disso provamos que a $\mathbb{k}\Gamma(G)$ é um Hopf algebróide. Nosso objetivo nesta seção é mostrar que do lado direito deste isomorfismo, a $\mathbb{k}_{par}(G)$ também é um Hopf algebróide e que, este isomorfismo preserva tais estruturas.

Iremos considerar uma álgebra de Hopf H , e definir e estudar as suas representações parciais sobre álgebras unitais. Logo, iremos associar a H o Hopf Algebróide H_{par} , que tem a propriedade universal de que toda representação parcial de H pode ser fatorada por um morfismo de álgebras de H_{par} . Mais detalhes podem ser encontrados em [4]. Iniciamos definindo representações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras unitais.

Definição 2.26. Seja H uma álgebra de Hopf e B uma álgebra unital. Dizemos que a aplicação linear $\pi : H \rightarrow B$ é uma *representação parcial* de H em B se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\pi(1_H) = 1_B$;
- (ii) $\pi(x)\pi(y_{(1)})\pi(\mathcal{S}(y_{(2)})) = \pi(xy_{(1)})\pi(\mathcal{S}(y_{(2)}))$;
- (iii) $\pi(x_{(1)})\pi(\mathcal{S}(x_{(2)}))\pi(y) = \pi(x_{(1)})\pi(\mathcal{S}(x_{(2)})y)$.

Se a antípoda \mathcal{S} for invertível, podemos re-escrever a propriedade (iii) como

$$(iii)^* \quad \pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)}))\pi(x_{(1)})\pi(y) = \pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)}))\pi(x_{(1)}y).$$

Observação 2.27. Em [4], são descritas 5 propriedades que toda representação parcial de uma álgebra de Hopf deve satisfazer. No entanto, o pesquisador Paolo Saracco em conversas com os autores do artigo citado, sustentou que são suficientes as condições (i), (ii) e (iii) mencionadas anteriormente. Vejamos as outras duas condições,

- (iv) $\pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(y) = \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)}y)$. De fato,

$$\begin{aligned} \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(y) &= \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)}\epsilon(x_{(3)}))\pi(y) \\ &= \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(\epsilon(x_{(3)})y) \\ &= \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(\mathcal{S}(x_{(3)})x_{(4)}y) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(\mathcal{S}(x_{(3)}))\pi(x_{(4)}y) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \pi(\mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)})\pi(\mathcal{S}(x_{(3)}))\pi(x_{(4)}y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi(\epsilon(x_{(1)})1_H)\pi(\mathcal{S}(x_{(2)}))\pi(x_{(3)}y) \\
 &= \pi(1_H)\pi(\mathcal{S}(\epsilon(x_{(1)})x_{(2)}))\pi(x_{(3)}y) \\
 &\stackrel{(i)}{=} 1_B\pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)}y) = \pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)}y).
 \end{aligned}$$

(v) $\pi(x)\pi(\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)}) = \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)})$. De fato,

$$\begin{aligned}
 \pi(x)\pi(\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)}) &= \pi(x)\pi(\mathcal{S}(\epsilon(y_{(1)})y_{(2)}))\pi(y_{(3)}) \\
 &= \pi(x\epsilon(y_{(1)}))\pi(\mathcal{S}(y_{(2)}))\pi(y_{(3)}) \\
 &= \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)})y_{(2)})\pi(\mathcal{S}(y_{(3)}))\pi(y_{(4)}) \\
 &\stackrel{(ii)}{=} \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)})\pi(\mathcal{S}(y_{(3)}))\pi(y_{(4)}) \\
 &\stackrel{(iii)}{=} \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)})\pi(\mathcal{S}(y_{(3)})y_{(4)}) \\
 &= \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)})\pi(\epsilon(y_{(3)})1_H) \\
 &= \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)}\epsilon(y_{(3)}))\pi(1_H) \\
 &\stackrel{(i)}{=} \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)})1_B = \pi(x\mathcal{S}(y_{(1)}))\pi(y_{(2)}).
 \end{aligned}$$

Do mesmo modo, quando \mathcal{S} invertível, podemos re-escrever (v):

$$(v)^* \quad \pi(x)\pi(y_{(2)})\pi(\mathcal{S}^{-1}(y_{(1)})) = \pi(xy_{(2)})\pi(\mathcal{S}^{-1}(y_{(1)})).$$

Escrevemos (B, π) para denotar a representação parcial de H sobre B . Se (B, π) e (B', π') são duas representações parciais de H em B e B' , respectivamente, dizemos que um morfismo de álgebras $f : B \rightarrow B'$ é um morfismo de representações parciais se $\pi' = \pi \circ f$, isto é, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 H & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\
 B & \xrightarrow{f} & B'.
 \end{array}$$

Observação 2.28. Poderíamos definir representações parciais como sendo as aplicações lineares que satisfazem (i), (iv) e (v), e ter provado os axiomas (ii) e (iii).

Observe que representações de H em B no sentido “usual”, ou seja, morfismos de álgebras, são, em particular, representações parciais. A recíproca não é verdadeira. No entanto, se $\pi : H \rightarrow B$ é uma representação parcial e satisfaz a seguinte condição:

$$\pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)}) = \epsilon(x)1_B,$$

para todo x em H , então π é um morfismo de álgebras. De fato, sejam $x, y \in H$, então

$$\pi(x)\pi(y) = \pi(x)\pi(y_{(1)}\epsilon(y_{(2)}))$$

$$\begin{aligned}
&= \pi(x)\pi(y_{(1)})\epsilon(y_{(2)}) \\
&\stackrel{(*)}{=} \pi(x)\pi(y_{(1)})\pi(\mathcal{S}(y_{(2)}))\pi(y_{(3)}) \\
&\stackrel{(ii)}{=} \pi(xy_{(1)})\pi(\mathcal{S}(y_{(2)}))\pi(y_{(3)}) \\
&\stackrel{(*)}{=} \pi(xy_{(1)})\epsilon(y_{(2)}) \\
&= \pi(xy_{(1)}\epsilon(y_{(2)})) = \pi(xy).
\end{aligned}$$

Analogamente, se a igualdade

$$\pi(x_{(1)})\pi(\mathcal{S}(x_{(2)})) = \epsilon(x)1_B$$

é satisfeita, é possível provar que representações parciais são, de fato, representações no sentido usual, isto é, vale também a recíproca.

Proposição 2.29. *Sejam H uma álgebra de Hopf, B uma álgebra unital e $\pi : H \rightarrow B$ uma representação parcial de H em B . Sejam $x, y \in H$, então valem as igualdades*

$$\pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(\mathcal{S}(x_{(3)})) = \pi(\mathcal{S}(x)) \quad (2.6)$$

$$\pi(x_{(1)})\pi(\mathcal{S}(x_{(2)}))\pi(x_{(3)}) = \pi(x). \quad (2.7)$$

Se a antípoda \mathcal{S} de H é invertível, temos também as seguintes igualdades

$$\pi(x_{(3)})\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)}))\pi(x_{(1)}) = \pi(x) \quad (2.8)$$

$$\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(3)}))\pi(x_{(2)})\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(1)})) = \pi(\mathcal{S}^{-1}(x)). \quad (2.9)$$

Demonstração. Seja $x \in H$, então

$$\begin{aligned}
\pi(\mathcal{S}(x_{(1)}))\pi(x_{(2)})\pi(\mathcal{S}(x_{(3)})) &\stackrel{(ii)}{=} \pi(\mathcal{S}(x_{(1)})x_{(2)})\pi(\mathcal{S}(x_{(3)})) \\
&= \pi(\epsilon(x_{(1)})1_H)\pi(\mathcal{S}(x_{(2)})) \\
&= \pi(1_H)\pi(\mathcal{S}(\epsilon(x_{(1)})x_{(2)})) = \pi(\mathcal{S}(x)).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\pi(x_{(1)})\pi(\mathcal{S}(x_{(2)}))\pi(x_{(3)}) &\stackrel{(iii)}{=} \pi(x_{(1)})\pi(\mathcal{S}(x_{(2)})\pi(x_{(3)})) \\
&= \pi(x_{(1)})\pi(\epsilon(x_{(2)})1_H) \\
&= \pi(x_{(1)}\epsilon(x_{(2)}))\pi(1_H) = \pi(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, se a antípoda \mathcal{S} for invertível, então

$$\begin{aligned}
\pi(x_{(3)})\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)}))\pi(x_{(1)}) &= \pi(\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(x_{(3)})))\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)}))\pi(\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(x_{(1)}))) \\
&= \pi(\mathcal{S}((\mathcal{S}^{-1}(x))_{(1)}))\pi((\mathcal{S}^{-1}(x))_{(2)})\pi(\mathcal{S}((\mathcal{S}^{-1}(x))_{(3)}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \pi(\mathcal{S}((x')_{(1)}))\pi((x')_{(2)})\pi(\mathcal{S}((x')_{(3)})) \\
 &\stackrel{(2.6)}{=} \pi(\mathcal{S}(x')) = \pi(\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(x))) = \mathcal{S}(x),
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 \pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(3)}))\pi(x_{(2)})\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(1)})) &= \pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(3)}))\pi(\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})))\pi(\mathcal{S}^{-1}(x_{(1)})) \\
 &= \pi((\mathcal{S}^{-1}(x))_{(1)})\pi(\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(x))_{(2)})\pi((\mathcal{S}^{-1}(x))_{(3)}) \\
 &= \pi((x')_{(1)})\pi(\mathcal{S}((x')_{(2)}))\pi((x')_{(3)}) \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} \pi(x') = \pi(\mathcal{S}^{-1}(x)). \quad \square
 \end{aligned}$$

No artigo [4], é definida a ação parcial de H uma algebra de Hopf sobre uma algebra unital A . Estas ações nos oferecem dois exemplos de representações parciais de álgebras de Hopf.

Definição 2.30. Seja H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra unital. Uma ação parcial à esquerda simétrica de H sobre A é uma aplicação linear:

$$\cdot : H \otimes A \longrightarrow A$$

$$h \otimes a \mapsto h \cdot a$$

tal que

$$AP1) \quad 1_H \cdot a = a;$$

$$AP2) \quad h \cdot (ab) = (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b);$$

$$AP3) \quad (h \cdot (k \cdot a)) = (h_{(1)} \cdot 1_A)(h_{(2)} k \cdot a);$$

$$AP4) \quad (h \cdot (k \cdot a)) = (h_{(1)} k \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A),$$

para todo $h, k \in H$ e todo $a, b \in A$.

Quando a condição $AP4$) não for satisfeita, dizemos apenas que, é uma ação parcial à esquerda. Em diante, nos limitaremos a escrever $H \curvearrowright_p A$ para denotar a ação parcial à esquerda simétrica, ou apenas dizer que H age parcialmente em A . Alguns textos também usam a notação (A, \cdot) .

Ações parciais motivam um primeiro exemplo de representações parciais de álgebras de Hopf.

Exemplo 2.31. Toda ação parcial de uma álgebra de Hopf H sobre uma álgebra unital A produz uma representação parcial de H sobre $\mathbf{End}_{\mathbb{k}}(A)$, dada por $\pi : H \longrightarrow \mathbf{End}_{\mathbb{k}}(A)$ a aplicação linear definida por $\pi(h)(a) = h \cdot a$. Provemos que, de fato, π é uma representação parcial de H sobre $\mathbf{End}_{\mathbb{k}}(A)$:

$$(i) \quad \pi(1_H)(a) = 1_H \cdot a \stackrel{(AP1)}{=} a, \text{ para todo } a \text{ em } A, \text{ então } \pi(1_H) = id_B;$$

(ii) Sejam $h, k \in H$, então

$$\begin{aligned}
\pi(h)\pi(k_{(1)})\pi(\mathcal{S}(k_{(2)}))(a) &= h \cdot (k_{(1)} \cdot (\mathcal{S}(k_{(2)}) \cdot a)) \\
&\stackrel{(AP3)}{=} h \cdot (k_{(1)} \cdot 1_A)((k_{(2)}\mathcal{S}(k_{(3)}) \cdot a)) \\
&= h \cdot (k_{(1)} \cdot 1_A)((\epsilon(k_{(2)})1_H \cdot a)) \\
&= h \cdot (k_{(1)}\epsilon(k_{(2)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot a) \\
&\stackrel{(AP1)}{=} h \cdot ((k \cdot 1_A)a).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\pi(hk_{(1)})\pi(\mathcal{S}(k_{(2)}))(a) &= (hk_{(1)}) \cdot (\mathcal{S}(k_{(2)}) \cdot a) \\
&\stackrel{(AP3)}{=} (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A)((h_{(2)}k_{(2)}\mathcal{S}(k_{(3)}) \cdot a)) \\
&= (h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A)(h_{(2)}\epsilon(k_{(2)})1_A \cdot a) \\
&= (h_{(1)}k_{(1)}\epsilon(k_{(2)}) \cdot 1_A)(h_{(2)}1_A \cdot a) \\
&= ((h_{(1)}k) \cdot 1_A)(h_{(2)} \cdot a) \\
&= ((h_{(1)}k) \cdot 1_A)(h_{(2)} \cdot 1_A a) \\
&\stackrel{(AP2)}{=} ((h_{(1)}k) \cdot 1_A)(h_{(2)} \cdot 1_A)(h_{(3)} \cdot a) \\
&\stackrel{(AP4)}{=} (h_{(1)} \cdot (k \cdot 1_A))(h_{(2)} \cdot a) \\
&\stackrel{(AP2)}{=} h \cdot ((k \cdot 1_A)a)
\end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Logo,

$$\pi(h)\pi(k_{(1)})\pi(\mathcal{S}(k_{(2)})) = \pi(hk_{(1)})\pi(\mathcal{S}(k_{(2)})).$$

(iii) Sejam $h, k \in H$, então

$$\begin{aligned}
\pi(h_{(1)})\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(k)(a) &= h_{(1)} \cdot (\mathcal{S}(h_{(2)}) \cdot (k \cdot a)) \\
&\stackrel{(AP3)}{=} (h_{(1)} \cdot 1_A)(h_{(2)}\mathcal{S}(h_{(3)}) \cdot (k \cdot a)) \\
&= (h_{(1)} \cdot 1_A)(\epsilon(h_{(2)})1_H \cdot (k \cdot a)) \\
&= (h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) \cdot 1_A)(1_H \cdot (k \cdot a)) \\
&\stackrel{(AP1)}{=} (h \cdot 1_A)(k \cdot a).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\pi(h_{(1)})\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(k)(a) &= h_{(1)} \cdot (\mathcal{S}(h_{(2)})k \cdot a) \\
&\stackrel{(AP3)}{=} (h_{(1)} \cdot 1_A)(h_{(2)}\mathcal{S}(h_{(3)})k \cdot a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (h_{(1)} \cdot 1_A)(\epsilon(h_{(2)})1_H k \cdot a) \\
 &= (h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) \cdot 1_A)(1_H k \cdot a) \\
 &= (h \cdot 1_A)(k \cdot a)
 \end{aligned}$$

para todo $a \in A$. Logo,

$$\pi(h_{(1)})\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(k) = \pi(h_{(1)})\pi(\mathcal{S}(h_{(2)})k).$$

Com isto, provamos os itens (i), (ii) e (iii) na Definição 2.26, que são suficientes para dizer que π é uma representação parcial de H em $\text{End}_{\mathbb{k}}(A)$. Ou seja,

$$\boxed{
 \begin{array}{ccc}
 \underbrace{H \curvearrowright_p A}_{\text{ação parcial}} & \implies & \underbrace{\pi : H \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(A)}_{\text{representação parcial}}
 \end{array}
 }$$

Para um segundo exemplo de representação parcial, dada uma ação parcial, precisamos primeiro definir a álgebra $A\#H$. Seja $H \curvearrowright_p A$, podemos definir um produto associativo sobre $A \otimes H$ dado pela regra:

$$(a \otimes h)(b \otimes k) := a(h_{(1)} \cdot b) \otimes h_{(2)}k,$$

com $a, b \in A$ e $h, k \in H$. Este produto produz uma nova álgebra unital construída como segue

$$\underline{A\#H} := (A \otimes H)(1_A \otimes 1_H),$$

chamada de **produto smash parcial** (ou álgebra smash parcial). Os elementos geradores da dita álgebra são da forma $a\#h = a(h_{(1)} \cdot 1_A) \otimes h_{(2)}$. Não é o nosso principal objetivo o estudo de dita álgebra, para mais detalhes veja [4].

Algumas das principais propriedades são enunciadas no seguinte lema.

Lema 2.32. *Seja H uma álgebra de Hopf e A uma álgebra unital tal que $H \curvearrowright_p A$. Então*

- $(a\#h)(b\#k) = a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}k$;
- $a\#h = a(h_{(1)} \cdot 1_A)\#h_{(2)}$;
- A aplicação $\phi_0 : A \rightarrow A\#H$ dada por $\phi_0(a) = a\#1_H$ é um morfismo de álgebras, para todo $a, b \in A$ e todo $h, k \in H$.

Demonstração. As duas primeiras seguem da própria definição. Por outro lado, veja que, $\phi_0(ab) = ab\#1_H = a(1_H \cdot b)\#1_H = (a\#1_H)(b\#1_H) = \phi_0(a)\phi_0(b)$, para todo $a, b \in A$, ou seja, ϕ_0 é um morfismo de álgebras. \square

Assim, a álgebra produto smash parcial nos proporciona o seguinte exemplo de representação parcial de álgebras de Hopf.

Exemplo 2.33. Dada uma ação parcial de uma álgebra de Hopf sobre uma álgebra unital A , a aplicação linear

$$\pi_0 : H \longrightarrow \underline{A\#H}$$

dada por $\pi_0(h) = 1_A\#h$ é uma representação parcial de H . De fato, $\pi_0(1_H) = 1_A\#1_H$ é a unidade em $\underline{A\#H}$ e,

$$\begin{aligned} \pi_0(h)\pi_0(k_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(k_{(2)})) &= (1_A\#h)(1_A\#k_{(1)})(1_A\#\mathcal{S}(k_{(2)})) \\ &= (1_A\#h)(1_A(k_{(1)} \cdot 1_A)\#k_{(2)}\mathcal{S}(k_{(3)})) \\ &= (1_A\#h)(k_{(1)} \cdot 1_A\#\epsilon(k_{(2)})1_H) \\ &= (1_A\#h)(k_{(1)}\epsilon(k_{(2)}) \cdot 1_A\#1_H) \\ &= (1_A\#h)(k \cdot 1_A\#1_H) \\ &= 1_A(h_{(1)} \cdot (k \cdot 1_A))\#h_{(2)}1_H \\ &= h_{(1)} \cdot (k \cdot 1_A)\#h_{(2)} \\ &= (h_{(1)}k \cdot 1_A)(h_{(2)} \cdot 1_A)\#h_{(3)} \\ &= h_{(1)}k \cdot 1_A\#h_{(2)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \pi_0(hk_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(k_{(2)})) &= (1_A\#hk_{(1)})(1_A\#\mathcal{S}(k_{(2)})) \\ &= (1_A(h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A))\#h_{(2)}k_{(2)}\mathcal{S}(k_{(3)}) \\ &= h_{(1)}k_{(1)} \cdot 1_A\#h_{(2)}\epsilon(k_{(2)}) \\ &= h_{(1)}k_{(1)}\epsilon(k_{(2)}) \cdot 1_A\#h_{(2)} \\ &= h_{(1)}k \cdot 1_A\#h_{(2)}, \end{aligned}$$

segue então que

$$\pi_0(h)\pi_0(k_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(k_{(2)})) = \pi_0(hk_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(k_{(2)})).$$

Por último,

$$\begin{aligned} \pi_0(h_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(k) &= (1_A\#h_{(1)})(1_A\#\mathcal{S}(h_{(2)}))(1_A\#k) \\ &= (1_A(h_{(1)} \cdot 1_A)\#h_{(2)}\mathcal{S}(h_{(3)}))(1_A\#k) \\ &= (h_{(1)} \cdot 1_A\#\epsilon(h_{(2)})1_H)(1_A\#k) \\ &= (h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) \cdot 1_A\#1_H)(1_A\#k) \\ &= (h \cdot 1_A\#1_H)(1_A\#k) \\ &= (h \cdot 1_A(1_H \cdot 1_A))\#1_Hk \\ &= h \cdot 1_A\#k. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \pi_0(h_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(h_{(2)})k) &= (1_A \# h_{(1)})(1_A \# \mathcal{S}(h_{(2)})k) \\
 &= 1_A(h_{(1)} \cdot 1_A) \# h_{(2)} \mathcal{S}(h_{(3)})k \\
 &= h_{(1)} \cdot 1_A \# \epsilon(h_{(2)})k \\
 &= h_{(1)}\epsilon(h_{(2)}) \cdot 1_A \# k \\
 &= h \cdot 1_A \# k.
 \end{aligned}$$

Logo

$$\pi_0(h_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(k) = \pi_0(h_{(1)})\pi_0(\mathcal{S}(h_{(2)})k).$$

Portanto, quando $H \curvearrowright_p A$, a aplicação $\pi_0 : H \rightarrow \underline{A \# H}$ dada por $\pi_0(a) = 1_A \# h$ é uma representação parcial de H . Ou seja,

$\underbrace{H \curvearrowright_p A}_{\text{ação parcial}} \implies \underbrace{\pi_0 : H \rightarrow \underline{A \# H}}_{\text{representação parcial}}$

Todavia, se $f : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(A)$ for um morfismo de álgebras, podemos definir a aplicação $\Psi : \underline{A \# H} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(A)$ por $\Psi(a \# h)(x) = f(a)\pi(h)(x)$, para todo $x \in A$, que é o único morfismo de álgebras que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc}
 H & & \\
 \downarrow \pi_0 & \searrow \pi & \\
 \underline{A \# H} & \xrightarrow{\Psi} & \text{End}_{\mathbb{k}}(A), \\
 \uparrow \phi_0 & \nearrow f & \\
 A & &
 \end{array}$$

em que π_0, π são as representações parciais de H e ϕ_0, f são os morfismos de álgebras de álgebras definidos anteriormente.

Na verdade, esta configuração nos permite provar que a álgebra produto smash parcial tem a seguinte propriedade universal.

Teorema 2.34. *Sejam A, B álgebras unitais e H uma álgebra de Hopf com uma ação parcial simétrica sobre A . Sejam $f : A \rightarrow B$ um morfismo de álgebras e $\pi : H \rightarrow B$ uma representação parcial tais que,*

C1) $f(h \cdot a) = \pi(h_{(1)})f(a)\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}));$

C2) $f(a)\pi(\mathcal{S}(h_{(1)}))\pi(h_{(2)}) = \pi(\mathcal{S}(h_{(1)}))\pi(h_{(2)})f(a),$

para todo $h \in H$ e todo $a \in A$. Então existe um único morfismo de álgebras

$$\Psi : \underline{A\#H} \longrightarrow B$$

tal que $f = \Psi \circ \phi_0$ e $\pi = \Psi \circ \pi_0$.

Demonstração. Defina a aplicação linear

$$\Psi : \underline{A\#H} \longrightarrow B$$

como sendo $\Psi(a\#b) = f(a)\pi(b)$. Veja que $\Psi(1_A\#1_H) = f(1_A)\pi(1_H) = (1_B)(1_B) = 1_B$, e

$$\begin{aligned} \Psi((a\#h)(b\#k)) &= \Psi(a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}k) \\ &= f(a(h_{(1)} \cdot b))\pi(h_{(2)}k) \\ &= f(a)f(h_{(1)} \cdot b)\pi(h_{(2)}k) \\ &\stackrel{(C1)}{=} f(a)\pi(h_{(1)})f(b)\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(h_{(3)}k) \\ &= f(a)\pi(h_{(1)})f(b)\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(h_{(3)})\pi(k) \\ &\stackrel{(C2)}{=} f(a)\pi(h_{(1)})\pi(\mathcal{S}(h_{(2)}))\pi(h_{(3)})f(b)\pi(k) \\ &\stackrel{(2.7)}{=} f(a)\pi(h)f(b)\pi(k) \\ &= \Psi(a\#h)\Psi(b\#k). \end{aligned}$$

Logo, Ψ é um morfismo de álgebras. Para provar que tal morfismo é único, suponha que existe um outro morfismo de álgebras $\Psi' : \underline{A\#H} \longrightarrow B$ tal que $\pi = \Psi' \circ \pi_0$ e $f = \Psi' \circ \phi_0$. Então, seja $a\#h$ um elemento qualquer em $\underline{A\#H}$, temos

$$\begin{aligned} \Psi'(a\#h) &= \Psi'((a\#1_H)(1_A\#b)) \\ &= \Psi'(a\#1_H)\Psi'(1_A\#b) \\ &= \Psi'(\Phi_0(a))\Psi'(\pi_0(b)) \\ &= f(a)\pi(b) \\ &= \Psi(a\#b). \end{aligned}$$

Portanto, dito Ψ existe, é único, e satisfaz $f = \Psi \circ \phi_0$, $\pi = \Psi \circ \pi_0$. □

O par (π, f) que satisfaz as condições C1) e C2) é chamado de *par covariante* associado a A , B e H . A existência do morfismo Ψ garante a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \pi_0 \downarrow & \searrow \pi & \\ \underline{A\#H} & \xrightarrow{\Psi} & B \\ \phi_0 \uparrow & \nearrow f & \\ A & & \end{array}$$

Note que para a álgebra $B = \text{End}_{\mathbb{k}}(A)$, o morfismo de álgebras $f : A \rightarrow B$ dado por $f(a)(x) = ax$, para todo $a, x \in A$, satisfaz

$$\begin{aligned}
 \pi(h_{(1)})(f(a)(\pi(\mathcal{S}(h_{(2)})(x)))) &= h_{(1)} \cdot (a(\mathcal{S}(h_{(2)}) \cdot x)) \\
 &= (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot (\mathcal{S}(h_{(3)}) \cdot x)) \\
 &= (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)(h_{(3)}\mathcal{S}(h_{(4)}) \cdot x) \\
 &= (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)(\epsilon(h_{(3)})1_H \cdot x) \\
 &= (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)(1_H \cdot x) \\
 &= (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot 1_A)(x) \\
 &= (h \cdot a)(x) \\
 &= f(h \cdot a)(x),
 \end{aligned}$$

para todo $x \in A$; e também

$$\begin{aligned}
 \pi(\mathcal{S}(h_{(1)}))\pi(h_{(2)})f(a)(x) &= \mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(2)} \cdot (ax)) \\
 &= \mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot ((h_{(2)} \cdot a)(h_{(3)} \cdot x)) \\
 &= (\mathcal{S}(h_{(2)}) \cdot (h_{(3)} \cdot a))(\mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(4)} \cdot x)) \\
 &= (\mathcal{S}(h_{(3)})h_{(4)} \cdot a)(\mathcal{S}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(\mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(5)} \cdot x)) \\
 &= (\epsilon(h_{(3)})1_H \cdot a)(\mathcal{S}(h_{(2)}) \cdot 1_A)(\mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(4)} \cdot x)) \\
 &= (1_H \cdot a)(\mathcal{S}(1_H) \cdot 1_A)(\mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(2)} \cdot x)) \\
 &= (a)(1_H \cdot 1_A)(\mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(2)} \cdot x)) \\
 &= a(\mathcal{S}(h_{(1)}) \cdot (h_{(2)} \cdot x)) \\
 &= f(a)\pi(\mathcal{S}(h_{(1)}))\pi(h_{(2)})(x),
 \end{aligned}$$

para todo $x \in A$, logo as condições C1) e C2) são satisfeitas.

As representações parciais sobre álgebras de Hopf nos permite definir os módulos parciais como segue.

Definição 2.35. Seja H uma álgebra de Hopf. Dizemos que o espaço vetorial M é um H -módulo parcial se existir uma representação parcial $\pi : H \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(M)$.

Escrevemos (M, π) para denotar os H -módulos parciais. Naturalmente, se (M, π) e (N, π') são dois H -módulos parciais, então um morfismo entre eles é uma aplicação linear $f : M \rightarrow N$ tal que, para cada $h \in H$, $f \circ \pi(h) = \pi'(h) \circ f$, ou seja, o seguinte diagrama comuta para cada $h \in H$

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\pi(h)} & M \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{\pi'(h)} & N.
 \end{array}$$

A categoria de H -módulos parciais é denotada por ${}_H\mathcal{M}^{par}$. Veremos na seguinte seção que esta categoria é equivalente à categoria dos módulos sobre certa álgebra.

A partir das representações parciais de álgebras de Hopf sobre álgebras unitais, vamos definir uma álgebra muito importante para o nosso trabalho e objeto de estudo chamada H_{par} . Veremos que dita álgebra tem um parentesco com a álgebra produto smash parcial definida anteriormente.

2.3.1 A “álgebra de Hopf” parcial

Para o caso de representações parciais de grupos, podemos obter a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$, Definição 1.5, que cumpre com várias propriedades, entre elas, a propriedade universal que fatora qualquer representação parcial do grupo G por um morfismo de álgebras. No caso de representações parciais de álgebras de Hopf, também podemos definir uma álgebra especial associada a H , H_{par} , que no caso fatora as representações parciais de H por morfismos de álgebras. Vejamos a seguir. Ver [4].

Observamos aqui que a álgebra H_{par} não é uma álgebra de Hopf, mas um Hopf-algebróide, embora o título da seção possa dar falsas impressões.

Definição 2.36 (Álgebra Tensorial). Seja H um espaço vetorial, a álgebra tensorial $T(H)$ é construída como segue:

$$T(H) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{\otimes n},$$

em que

$$\begin{aligned} H^{\otimes 0} &= \mathbb{k} \\ H^{\otimes 1} &= H \\ H^{\otimes 2} &= H \otimes H \\ &\vdots \\ H^{\otimes n} &= \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_n. \end{aligned}$$

Esta álgebra satisfaz a seguinte propriedade universal. Seja B um outro espaço vetorial e $f : H \rightarrow B$ uma transformação linear, então existe uma (única) transformação linear $\bar{f} : T(H) \rightarrow B$ tal que $f = \bar{f} \circ \iota$, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & & T(H) \\ & \nearrow \iota & \downarrow \bar{f} \\ H & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

em que $\iota : H \rightarrow T(H)$ é dado por $\iota(h) = h \in H^{\otimes 1}$.

Definição 2.37. Seja H uma álgebra de Hopf e seja $T(H)$ a álgebra tensorial do espaço vetorial H . A **álgebra de Hopf parcial**, denotada por H_{par} , é definida como o quociente da álgebra $T(H)$ pelo ideal \mathcal{J} gerado pelos elementos da forma

- (1) $1_H - 1_{T(H)}$;
- (2) $h \otimes k_{(1)} \otimes \mathcal{S}(k_{(2)}) - hk_{(1)} \otimes \mathcal{S}(k_{(2)})$;
- (3) $h_{(1)} \otimes \mathcal{S}(h_{(2)}) \otimes k - h_{(1)} \otimes \mathcal{S}(h_{(2)})k$;
- (4) $h \otimes \mathcal{S}(k_{(1)}) \otimes k_{(2)} - h\mathcal{S}(k_{(1)}) \otimes k_{(2)}$;
- (5) $\mathcal{S}(h_{(1)}) \otimes h_{(2)} \otimes k - \mathcal{S}(h_{(1)}) \otimes h_{(2)}k$,

para todo $h, k \in H$.

Denotando a classe de $h \in H$ em H_{par} pelo símbolo $[h]$, é fácil ver que a aplicação

$$\begin{aligned} [-] : H &\longrightarrow H_{par} \\ h &\mapsto [h] \end{aligned}$$

satisfaz as seguintes relações

- (HP1) $[\alpha h + \beta k] = \alpha[h] + \beta[k]$,
- (HP2) $[1_H] = 1_{H_{par}}$,
- (HP3) $[h][k_{(1)}][\mathcal{S}(k_{(2)})] = [hk_{(1)}][\mathcal{S}(k_{(2)})]$,
- (HP4) $[h_{(1)}][\mathcal{S}(h_{(2)})][k] = [h_{(1)}][\mathcal{S}(h_{(2)})k]$,
- (HP5) $[h][\mathcal{S}(k_{(1)})][k_{(2)}] = [h\mathcal{S}(k_{(1)})][k_{(2)}]$,
- (HP6) $[\mathcal{S}(h_{(1)})][h_{(2)}][k] = [\mathcal{S}(h_{(1)})][h_{(2)}k]$,

para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ e todo $h, k \in H$.

Segue então que a aplicação linear $[-]$ é uma representação parcial da álgebra de Hopf H sobre a álgebra unital H_{par} . Vejamos a propriedade universal de H_{par} , mencionada anteriormente.

Teorema 2.38. *Para toda representação parcial $\pi : H \longrightarrow B$, existe um único morfismo de álgebras $\tilde{\pi} : H_{par} \longrightarrow B$ tal que $\pi = \tilde{\pi} \circ [-]$, isto é, o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\pi} & B \\ & \searrow [-] & \nearrow \tilde{\pi} \\ & & H_{par} \end{array}$$

Recíprocamente, dado um morfismo de álgebras $\Phi : H_{par} \longrightarrow B$, existe uma única representação parcial $\pi_\Phi : H \longrightarrow B$ tal que $\Phi = \tilde{\pi}_\Phi$.

A demonstração do teorema anterior não é muito difícil. Veja no seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & T(H) & \\
 \iota \nearrow & \vdots & \searrow j \\
 H & \xrightarrow{\pi} B & \xleftarrow{\exists \bar{\pi}} T(H)/\mathcal{J} =: H_{par}
 \end{array}$$

que a existência de π' é garantida pela propriedade universal de $T(H)$ enquanto a existência de $\bar{\pi}$ é garantida pelo fato de $\mathcal{J} \subseteq \ker(\pi')$, pois $\pi' \circ i = \pi$, e π é uma representação parcial.

Com isto, podemos afirmar que existe um isomorfismo entre a categoria de H -módulos parciais e a categoria de H_{par} -módulos, Proposição 2.40. Da definição de módulo parcial, Definição 2.35, e pela propriedade universal da H_{par} , Teorema 2.38, temos a seguinte observação.

Observação 2.39. Seja (M, π) um H -módulo parcial, existe um morfismo de álgebras $\bar{\pi} : H_{par} \rightarrow \text{End}(M)$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\pi} & \text{End}(M) \\
 \searrow [\] & & \nearrow \bar{\pi} \\
 & H_{par} &
 \end{array}$$

onde π é uma representação parcial, ver Definição 2.35. Logo, M é um H_{par} -módulo via a ação

$$[h] \triangleright m := \bar{\pi}([h])(m) = \pi(h)(m).$$

Reciprocamente, se M é um H_{par} -módulo, podemos definir um H -módulo parcial. Isto induz o seguinte resultado.

Proposição 2.40. *Seja H uma álgebra de Hopf, então existe um isomorfismo de categorias*

$${}_H\mathcal{M}^{par} \cong H_{par}\mathcal{M}.$$

Demonstração. Ver [4]. □

Observação 2.41. Em particular, a aplicação identidade $id : H \rightarrow H$ é um morfismo de álgebras, logo, uma representação parcial de H sobre H . Pela propriedade universal de H_{par} , Teorema 2.38, temos o seguinte morfismo de álgebras

$$\Psi : H_{par} \rightarrow H$$

tal que $\Psi \circ [\] = id_H$, ou seja, $\Psi([h^1][h^2] \dots [h^n]) = h^1 h^2 \dots h^n$.

Exemplo 2.42. Seja $H = \mathbb{k}G$, lembrando que

$$\Delta(g) = g \otimes g, \quad \epsilon(g) = 1_{\mathbb{k}},$$

$$\mathcal{S}(g) = g^{-1},$$

para todo $g \in G$. Segue da definição de $\mathbb{k}_{par}(G)$, Definição 1.5, que $(\mathbb{k}G)_{par} = \mathbb{k}_{par}(G)$.

Exemplo 2.43. Seja $H = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ a álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} . Nesse caso, $H_{par} \cong H$. Ver Exemplo 4.4 em [4].

Considere agora os elementos

$$\varepsilon_x = [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})],$$

$$\tilde{\varepsilon}_x = [\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}].$$

Vejamos algumas propriedades desses elementos para depois descrever a álgebra que eles geram, fundamental para o nosso objeto de estudo, ver [4].

Lema 2.44. *Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda invertível \mathcal{S} . Então para todo $x, y \in H$ temos*

$$1. \quad \varepsilon_x[y] = [y_{(2)}]\varepsilon_{\mathcal{S}^{-1}(y_{(1)})x};$$

$$2. \quad [x]\varepsilon_y = \varepsilon_{x_{(1)}y}[x_{(2)}];$$

$$3. \quad \varepsilon_{x_{(1)}}\varepsilon_{x_{(2)}} = \varepsilon_x;$$

$$4. \quad \tilde{\varepsilon}_x[y] = [y_{(1)}]\tilde{\varepsilon}_{xy_{(2)}};$$

$$5. \quad [x]\tilde{\varepsilon}_y = \tilde{\varepsilon}_y\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})[x_{(1)}];$$

$$6. \quad \tilde{\varepsilon}_{x_{(1)}}\tilde{\varepsilon}_{x_{(2)}} = \tilde{\varepsilon}_x;$$

$$7. \quad \tilde{\varepsilon}_x\varepsilon_y = \varepsilon_y\tilde{\varepsilon}_x.$$

E quando $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$ para todo $x \in H$ obtemos $\varepsilon_x\varepsilon_y = \varepsilon_y\varepsilon_x$, para todo $x, y \in H$.

Demonstração. Vejamos.

1.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x[y] &= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})][y] \\ &= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})y] \\ &= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})_{(3)}y_{(3)}][\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(x_{(2)})_{(2)}y_{(2)})][\mathcal{S}(x_{(2)})_{(1)}y_{(1)}] \\ &= [x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)})_{(3)}y_{(3)}][\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(x_{(2)})_{(2)}y_{(2)})][\mathcal{S}(x_{(2)})_{(1)}y_{(1)}] \\ &= [x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)})y_{(3)}][\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(x_{(3)})y_{(2)})][\mathcal{S}(x_{(4)})y_{(1)}] \\ &= [y_{(3)}][\mathcal{S}^{-1}(\mathcal{S}(x_{(1)})y_{(2)})][\mathcal{S}(x_{(2)})y_{(1)}] \\ &= [y_{(3)}][\mathcal{S}^{-1}(y_{(2)})x_{(1)}][\mathcal{S}(\mathcal{S}^{-1}(y_{(1)})x_{(2)})] \\ &= [y_{(2)}]\varepsilon_{\mathcal{S}^{-1}(y_{(1)})x}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} [x]\varepsilon_y &= [x][y_{(1)}][\mathcal{S}(y_{(2)})] \\ &= [xy_{(1)}][\mathcal{S}(y_{(2)})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [x_{(1)}y_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)}y_{(2)})][x_{(3)}y_{(3)}][\mathcal{S}(y_{(4)})] \\
&= [x_{(1)}y_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)}y_{(2)})][x_{(3)}y_{(3)}\mathcal{S}(y_{(4)})] \\
&= [x_{(1)}y_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)}y_{(2)})][x_{(3)}] \\
&= \varepsilon_{x_{(1)}y}[x_{(2)}].
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x_{(1)}}\varepsilon_{x_{(2)}} &= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})][x_{(3)}][\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
&= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})x_{(3)}][\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
&= [x_{(1)}][\varepsilon(x_{(2)})1_H][\mathcal{S}(x_{(3)})] \\
&= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= \varepsilon_x.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
[y_{(1)}]\tilde{\varepsilon}_{xy_{(2)}} &= [y_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(1)}y_{(2)})][x_{(2)}y_{(3)}] \\
&= [y_{(1)}\mathcal{S}(x_{(1)}y_{(2)})][x_{(2)}y_{(3)}] \\
&= [y_{(1)}\mathcal{S}(y_{(2)})\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}y_{(3)}] \\
&= [\varepsilon(y_{(1)})\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}y_{(2)}] \\
&= [\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}y] \\
&= [\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}][y] \\
&= \tilde{\varepsilon}_x[y].
\end{aligned}$$

5. $[x]\tilde{\varepsilon}_y = \tilde{\varepsilon}_y\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})[x_{(1)}],$

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon}_y\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})[x_{(1)}] &= [\mathcal{S}(y_{(1)}\mathcal{S}^{-1}(x_{(3)}))][y_{(2)}\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})][x_{(1)}] \\
&= [x_{(3)}\mathcal{S}(y_{(1)})][y_{(2)}\mathcal{S}^{-1}(x_{(2)})x_{(1)}] \\
&= [x_{(2)}\mathcal{S}(y_{(1)})][y_{(2)}\varepsilon(x_{(1)})] \\
&= [x\mathcal{S}(y_{(1)})][y_{(2)}] \\
&= [x][\mathcal{S}(y_{(1)})][y_{(2)}] \\
&= [x]\tilde{\varepsilon}_y.
\end{aligned}$$

6. Análogo ao caso $\varepsilon_{x_{(1)}}\varepsilon_{x_{(2)}} = \varepsilon_x.$

7.

$$\tilde{\varepsilon}_x\varepsilon_y = [\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}]\varepsilon_y$$

$$\begin{aligned}
 &= [\mathcal{S}(x_{(1)})]\varepsilon_{x_{(2)}y}[x_{(3)}] \\
 &= \varepsilon_{\mathcal{S}(x_{(2)})x_{(3)}y}[\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(4)}] \\
 &= \varepsilon_{\varepsilon(x_{(2)})y}[\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(3)}] \\
 &= \varepsilon_y[\mathcal{S}(x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)}))][x_{(3)}] \\
 &= \varepsilon_y[\mathcal{S}(x_{(1)})][x_{(2)}] \\
 &= \varepsilon_y\tilde{\varepsilon}x.
 \end{aligned}$$

Por último, se $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(2)} \otimes x_{(1)}$, então

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x\varepsilon_y &= [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})]\varepsilon_y \\
 &= [x_{(1)}]\varepsilon_{\mathcal{S}(x_{(3)})y}[\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
 &= [x_{(1)}]\varepsilon_{\mathcal{S}(x_{(2)})y}[\mathcal{S}(x_{(3)})] \\
 &= \varepsilon_{x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(3)})y}[x_{(2)}][\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
 &= \varepsilon_{x_{(1)}\mathcal{S}(x_{(2)})y}[x_{(3)}][\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
 &= \varepsilon_y[x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
 &= \varepsilon_y\varepsilon_x. \quad \square
 \end{aligned}$$

Veja também que, se \mathcal{S} é tal que $\mathcal{S}^2 = Id$, então $\varepsilon_h = \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{S}(h)}$, $\tilde{\varepsilon}_h = \varepsilon_{\mathcal{S}(h)}$. No caso do Exemplo 2.42, veja que $\varepsilon_g = [g][g^{-1}]$ e $\tilde{\varepsilon}_g = [g^{-1}][g]$.

Definimos então as seguintes subálgebras unitais de H_{par} ,

$$\mathcal{A} := \text{span}\{\varepsilon_h : h \in H\}, \quad \tilde{\mathcal{A}} := \text{span}\{\tilde{\varepsilon}_h : h \in H\}.$$

Pelo Lema 2.44, os elementos de \mathcal{A} comutam com os elementos de $\tilde{\mathcal{A}}$. Veja que $1_{\mathcal{A}} = [1_H] = 1_{\tilde{\mathcal{A}}}$. Em particular, quando $\mathcal{S}^2 = Id$, essas duas subálgebras coincidem e obtemos uma subálgebra comutativa.

O seguinte resultado mostra que H age parcialmente em \mathcal{A} parcialmente.

Teorema 2.45. *Sejam H uma álgebra de Hopf e \mathcal{A} a subálgebra de H_{par} definida anteriormente. Então a aplicação*

$$\cdot : H \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

definida por $x \cdot a = [x_{(1)}]a[\mathcal{S}(x_{(2)})]$, para todo $x \in H$ e todo $a \in \mathcal{A}$, é uma ação parcial simétrica.

Demonstração. Veja primeiro que, sejam $x \in H$ e $a \in \mathcal{A}$, então $a = \varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n}$, usando o Lema 2.44 reiteradamente obtemos

$$\begin{aligned}
 x \cdot a &= [x_{(1)}]\varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n}[\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
 &= \varepsilon_{x_{(1)}h^1}[x_{(2)}]\varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n}[\mathcal{S}(x_{(3)})]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_{x_{(1)}} h^1 \varepsilon_{x_{(2)}} h^2 [x_{(3)}] \cdots \varepsilon_{h^n} [\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
&\vdots \\
&= \varepsilon_{x_{(1)}} h^1 \varepsilon_{x_{(2)}} h^2 \cdots \varepsilon_{x_{(n)}} h^n [x_{(n+1)}] [\mathcal{S}(x_{(n+2)})] \\
&= \varepsilon_{x_{(1)}} h^1 \varepsilon_{x_{(2)}} h^2 \cdots \varepsilon_{x_{(n)}} h^n \varepsilon_{x_{(n+1)}} \in \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos que é, de fato, uma ação parcial.

AP1) Seja $a \in H$, então $1_H \cdot a = [1_H]a[\mathcal{S}(1_H)] = a[1_H] = a$;

AP2) Sejam $a, b \in \mathcal{A}$ e $x \in H$, então

$$\begin{aligned}
x \cdot (ab) &= [x_{(1)}]ab[\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&\stackrel{(2.7)}{=} [x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})][x_{(3)}]ab[\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
&= [x_{(1)}]\tilde{\varepsilon}_{x_{(2)}}ab[\mathcal{S}(x_{(3)})] \\
&= [x_{(1)}]a\tilde{\varepsilon}_{x_{(2)}}b[\mathcal{S}(x_{(3)})] \\
&= [x_{(1)}]a[\mathcal{S}(x_{(2)})][x_{(3)}]b[\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
&= (x_{(1)} \cdot a)(x_{(2)} \cdot b).
\end{aligned}$$

AP3) Sejam $x, y \in H$ e $a \in \mathcal{A}$, então

$$\begin{aligned}
(x_{(1)} \cdot 1_{\mathcal{A}})(x_{(2)}y \cdot a) &= [x_{(1)}][1_H]([\mathcal{S}(x_{(2)})][x_{(3)}y_{(1)}])a[\mathcal{S}(x_{(4)}y_{(2)})] \\
&= ([x_{(1)}][\mathcal{S}(x_{(2)})][x_{(3)}])[y_{(1)}]a[\mathcal{S}(y_{(2)})\mathcal{S}(x_{(4)})] \\
&\stackrel{(2.7)}{=} [x_{(1)}][y_{(1)}]a[\mathcal{S}(y_{(2)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&\stackrel{(2.7)}{=} [x_{(1)}][y_{(1)}][\mathcal{S}(y_{(2)})][y_{(3)}]a[\mathcal{S}(y_{(4)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= [x_{(1)}][y_{(1)}]\tilde{\varepsilon}_{y_{(2)}}a[\mathcal{S}(y_{(3)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= [x_{(1)}][y_{(1)}]a\tilde{\varepsilon}_{y_{(2)}}[\mathcal{S}(y_{(3)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= [x_{(1)}][y_{(1)}]a[\mathcal{S}(y_{(2)})][y_{(3)}][\mathcal{S}(y_{(4)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= [x_{(1)}][y_{(1)}]a[\mathcal{S}(y_{(2)})][y_{(3)}\mathcal{S}(y_{(4)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= [x_{(1)}][y_{(1)}]a[\mathcal{S}(y_{(2)})][\varepsilon(y_{(3)})\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= [x_{(1)}][y_{(1)}]a[\mathcal{S}(y_{(2)})][\mathcal{S}(x_{(2)})] \\
&= x \cdot (y \cdot a).
\end{aligned}$$

AP4) Provar $x \cdot (y \cdot a) = (x_{(1)}y \cdot a)(x_{(2)} \cdot 1_{\mathcal{A}})$ é análogo ao item anterior.

Portanto, a ação $x \cdot a = [x_{(1)}]a[\mathcal{S}(x_{(2)})]$ é uma ação parcial simétrica à esquerda de H sobre \mathcal{A} . \square

Em particular,

$$h \cdot [1_H] = [h_1][1_H][\mathcal{S}(h_{(2)})] = \varepsilon_h.$$

Assim, temos a álgebra unital produto smash parcial $\underline{\mathcal{A}\#H}$, e como $[\] : H \longrightarrow H_{par}$ é uma representação parcial de H , segue da propriedade universal de $\underline{\mathcal{A}\#H}$ que existe um único morfismo de álgebras $\Psi : \underline{\mathcal{A}\#H} \longrightarrow H_{par}$ definido por

$$\Psi(a\#h) = i(a)[\](h) = a[h],$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $h \in H$, tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \pi_0 \downarrow & \searrow [\] & \\ \underline{\mathcal{A}\#H} & \xrightarrow{\Psi} & H_{par}, \\ \Phi_0 \uparrow & \nearrow i & \\ \mathcal{A} & & \end{array}$$

ou seja, $[h] = \Psi(\pi_0(h))$ para todo $h \in H$, e $i(a) = \Psi(\Phi_0(a))$, para todo $a \in \mathcal{A}$, sendo que $i : \mathcal{A} \longrightarrow H_{par}$ é o morfismo inclusão.

Observação 2.46. Para o morfismo Ψ existir, o par $([\], i)$ deve satisfazer as propriedades C1) e C2) no Teorema 2.34 (par covariante). De fato,

$$i(h \cdot a) = h \cdot a = [h_{(1)}]a[\mathcal{S}(h_{(2)})],$$

e

$$i(a)[\mathcal{S}(h_{(1)})][h_{(2)}] = a\tilde{\varepsilon}_h = \tilde{\varepsilon}_h a = [\mathcal{S}(h_{(1)})][h_{(2)}]i(a).$$

Por outro lado, sendo $\pi_0 : H \longrightarrow \underline{\mathcal{A}\#H}$ e $[\] : H \longrightarrow H_{par}$ representações parciais, segue da propriedade universal de H_{par} que existe um único morfismo de álgebras $\Phi : H_{par} \longrightarrow \underline{\mathcal{A}\#H}$ tal que o seguinte diagrama comuta,

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \pi_0 \downarrow & \searrow [\] & \\ H_{par} & \xrightarrow{\Phi} & \underline{\mathcal{A}\#H}, \end{array}$$

ou seja, $\Phi([h]) = [1_H]\#h$. Logo, para todo $[h^1][h^2] \dots [h^n] \in H_{par}$, temos

$$\begin{aligned} \Phi([h^1][h^2] \dots [h^n]) &= \Phi([h^1])\Phi([h^2])\Phi([h^3]) \dots \Phi([h^n]) \\ &= ([1_H]\#h^1)([1_H]\#h^2)([1_H]\#h^3) \dots ([1_H]\#h^n) \\ &= ([1_H](h^1_{(1)} \cdot [1_H])\#h^1_{(2)}h^2)([1_H]\#h^3) \dots ([1_H]\#h^n) \\ &= ([h^1_{(1)}][1_H][\mathcal{S}(h^1_{(2)})]\#h^1_{(3)}h^2)([1_H]\#h^3) \dots ([1_H]\#h^n) \\ &= (\varepsilon_{h^1_{(1)}}\#h^1_{(2)}h^2)([1_H]\#h^3) \dots ([1_H]\#h^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\varepsilon_{h_{(1)}^1} (h_{(2)}^1 h_{(1)}^2 \cdot [1_H]) \# h_{(3)}^1 h_{(2)}^2 h^3) \dots ([1_H] \# h^n) \\
&= (\varepsilon_{h_{(1)}^1} ([h_{(2)}^1 h_{(1)}^2] [\mathcal{S}(h_{(3)}^1 h_{(2)}^2)]) \# h_{(4)}^1 h_{(3)}^2 h^3) \dots ([1_H] \# h^n) \\
&= (\varepsilon_{h_{(1)}^1} \varepsilon_{h_{(2)}^1 h_{(1)}^2} \# h_{(3)}^1 h_{(2)}^2 h^3) \dots ([1_H] \# h^n) \\
&\vdots \\
&= \varepsilon_{h_{(1)}^1} \varepsilon_{h_{(2)}^1 h_{(1)}^2} \dots \varepsilon_{h_{(n-1)}^1 h_{(n-2)}^2 \dots h_{(1)}^{n-1}} \# h_{(n)}^1 h_{(n-1)}^2 \dots h_{(2)}^{n-1} h^n.
\end{aligned}$$

Em particular, para qualquer $g, h \in H$

$$\begin{aligned}
\Phi(\varepsilon_g[h]) &= \Phi([g_{(1)}] [\mathcal{S}(g_{(2)})] [h]) \\
&= \varepsilon_{g_{(1)}} \varepsilon_{g_{(2)}} \mathcal{S}(g_{(5)}) \# g_{(3)} \mathcal{S}(g_{(4)}) h \\
&= \varepsilon_{g_{(1)}} \varepsilon_{g_{(2)}} \# h \\
&= \varepsilon_g \# h.
\end{aligned}$$

Ou seja, $\Phi(\varepsilon_g) = \varepsilon_g \# 1_H$ e $\Phi([h]) = [1_H] \# h$.

Observação 2.47. Perceba que em geral, todo $x = [h^1][h^2] \dots [h^n]$ em H_{par} pode ser escrito como

$$x = \varepsilon_{h_{(1)}^1} \varepsilon_{h_{(2)}^1 h_{(1)}^2} \dots \varepsilon_{h_{(n-1)}^1 h_{(n-2)}^2 \dots h_{(1)}^{n-1}} [h_{(n)}^1 h_{(n-1)}^2 \dots h_{(2)}^{n-1} h^n].$$

Teorema 2.48. H uma álgebra de Hopf, então $H_{par} \cong \mathcal{A} \# H$.

Demonstração. Sejam Ψ e Φ como antes. Vamos mostrar que são uma inversa da outra.

Seja $[h] \in H_{par}$. Logo,

$$\begin{aligned}
(\Psi \circ \Phi)([h]) &= \Psi(\Phi([h])) \\
&= \Psi([1_H] \# h) \\
&= [1_H][h] = [h].
\end{aligned}$$

Assim, de Φ e Ψ morfismos de álgebras, se tomarmos um elemento $x = [h^1][h^2] \dots [h^n]$ de H_{par} obtemos

$$\Psi(\Phi(x)) = \Psi(\Phi([h^1][h^2] \dots [h^n])) = \Psi(\Phi[h^1])\Psi(\Phi[h^2]) \dots \Psi(\Phi[h^n]) = [h^1][h^2] \dots [h^n] = x.$$

Ou seja, $\Psi \circ \Phi = Id_{H_{par}}$. Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned}
\Phi(\Psi(a \# h)) &= \Phi(a[h]) \\
&= \Phi(a)\Phi([h]) \\
&= \Phi(\varepsilon_{h^1} \varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n})([1_H] \# h) \\
&= \Phi(\varepsilon_{h^1})\Phi(\varepsilon_{h^2}) \dots \Phi(\varepsilon_{h^n})([1_H] \# h) \\
&= (\varepsilon_{h^1} \# 1_H)(\varepsilon_{h^2} \# 1_H) \dots (\varepsilon_{h^n} \# 1_H)([1_H] \# h) \\
&= \varepsilon_{h^1} \varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n} \# h \\
&= a \# h.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.49. Vimos que se H é uma álgebra de Hopf, então $H_{par} \cong \mathcal{A} \# H$, sendo \mathcal{A} a subálgebra de H_{par} gerada pelos elementos ε_h 's e H agindo parcialmente em \mathcal{A} . Logo, conhecendo \mathcal{A} podemos determinar H_{par} via o produto smash parcial. Contudo, \mathcal{A} foi determinada conhecendo H_{par} . Veremos que é possível determiná-la de forma independente.

Sejam H uma álgebra de Hopf e $T(H)$ a álgebra tensorial de H . Considere \mathcal{I} o ideal gerado pelos elementos da forma

- i) $1_H - 1_{T(H)}$,
- ii) $h - h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, para todo $h \in H$ e,
- iii) $h_{(1)} \otimes h_{(2)}k - h_{(1)}k \otimes h_{(2)}$, para todo $h, k \in H$.

Definimos $\mathcal{A}_{par}(H)$ como sendo o quociente $T(H)/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{A}_{par}(H)$ tem a seguinte propriedade universal.

Seja B uma álgebra unital junto de uma aplicação linear $e_B : H \rightarrow B$ tal que

$$e_B(h) = e_B(h_{(1)})e_B(h_{(2)}), \quad (2.10)$$

$$e_B(h_{(1)})e_B(h_{(2)}k) = e_B(h_{(1)}k)e_B(h_{(2)}), \quad (2.11)$$

para todo $h, k \in H$, então existe um único morfismo de álgebras $u : \mathcal{A}_{par}(H) \rightarrow B$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}_{par}(H) \\ & \nearrow \sigma & \vdots \\ H & \xrightarrow{e_B} & B \\ & & \downarrow u \end{array}$$

Observação 2.50. • $\mathcal{A}_{par}(H)$ é a única álgebra que satisfaz dita propriedade, a menos de isomorfismo.

- $\sigma = p \circ \iota$, em que $H \xrightarrow{\iota} T(H) \xrightarrow{p} T(H)/\mathcal{I} =: \mathcal{A}_{par}(H)$.

Provaremos agora que a álgebra \mathcal{A} é isomorfa a $\mathcal{A}_{par}(H)$. Primeiro, defina a aplicação $e_{\mathcal{A}} : H \rightarrow \mathcal{A}$ como sendo $e_{\mathcal{A}}(h) = \varepsilon_h$. Veja que

$$\begin{aligned} e_{\mathcal{A}}(1_H) &= 1_{\mathcal{A}}; \\ e_{\mathcal{A}}(h) &= \varepsilon_h \\ &= \varepsilon_{h_{(1)}}\varepsilon_{h_{(2)}} \\ &= e_{\mathcal{A}}(h_{(1)})e_{\mathcal{A}}(h_{(2)}); \\ e_{\mathcal{A}}(h_{(1)}k)e_{\mathcal{A}}(h_{(2)}) &= \varepsilon_{h_{(1)}k}\varepsilon_{h_{(2)}} \\ &= [h_{(1)}k_{(1)}][\mathcal{S}(h_{(2)}k_{(2)})][h_3][\mathcal{S}(h_{(4)})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [h_{(1)}k_{(1)}][\mathcal{S}(k_{(2)})\mathcal{S}(h_{(2)})h_{(3)}][\mathcal{S}(h_{(4)})] \\
 &= [h_{(1)}k_{(1)}][\mathcal{S}(k_{(2)})][\mathcal{S}(h_{(2)})] \\
 &= [h_{(1)}][k_{(1)}][\mathcal{S}(k_{(2)})][\mathcal{S}(h_{(2)})] \\
 &\stackrel{(2.7)}{=} [h_{(1)}][\mathcal{S}(h_{(2)})][h_{(3)}][k_{(1)}][\mathcal{S}(k_{(2)})\mathcal{S}(h_{(4)})] \\
 &= [h_{(1)}][\mathcal{S}(h_{(2)})][h_{(3)}k_{(1)}][\mathcal{S}(h_{(4)}k_{(2)})] \\
 &= \varepsilon_{h_{(1)}}\varepsilon_{h_{(2)}}k \\
 &= e_{\mathcal{A}}(h_{(1)})e_{\mathcal{A}}(h_{(2)}k).
 \end{aligned}$$

Ou seja, $e_{\mathcal{A}}$ satisfaz as Equações (2.10) e (2.11). Logo, pela propriedade universal de $\mathcal{A}_{par}(H)$, existe um único morfismo de álgebras $u : \mathcal{A}_{par}(H) \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $u \circ \sigma = e_{\mathcal{A}}$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{A}_{par}(H) \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow u \\
 H & \xrightarrow{e_{\mathcal{A}}} & \mathcal{A}.
 \end{array}$$

Por outro lado, vamos construir um morfismo de álgebras $\eta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_{par}(H)$ talque o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H_{par} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\
 & \nearrow [\] & \downarrow \bar{\pi} & & \downarrow \eta \\
 H & \xrightarrow{\pi} & End(B) & \longrightarrow & B,
 \end{array}$$

onde $B = \mathcal{A}_{par}(H)$.

Ação de H em \mathcal{A}_{par} : Vamos definir uma ação parcial de H em \mathcal{A}_{par} para obter a representação parcial π como no Exemplo 2.31, logo, um morfismo de álgebras $\bar{\pi}$ que segue da propriedade universal de H_{par} .

Para começar, denote a classe de $h \in H$ em $\mathcal{A}_{par}(H)$ por $E(h)$. Logo, a aplicação

$$E : H \rightarrow \mathcal{A}_{par}(H)$$

$$h \mapsto E(h)$$

satisfaz as seguintes propriedades:

- $E(\alpha h + \beta k) = \alpha E(h) + \beta E(k)$, para todo $h, k \in H$;
- $E(1_H) = 1_{H_{par}}$;
- $E(h) = E(h_{(1)})E(h_{(2)})$, para todo $h \in H$ e;

$$\bullet E(h_{(1)}k)E(h_{(2)}) = E(h_{(1)})E(h_{(2)}k),$$

isto é, a aplicação E é linear e satisfaz as Equações (2.10) e (2.11). Agora, observe que a aplicação

$$\bullet : H \longrightarrow \mathcal{A}_{par}(H),$$

definida por

$$x \bullet a = E(x_{(1)}h^1)E(x_{(2)}h^2) \dots E(x_{(n)}h^n)E(x_{(n+1)}),$$

para todo $a = E(h^1)E(h^2) \dots E(h^n) \in \mathcal{A}_{par}(H)$ define uma ação parcial à esquerda simétrica de H em $\mathcal{A}_{par}(H)$. Assim, devemos provar AP1), AP2), AP3) e AP4) da Definição 2.30. De fato,

AP1) Para todo $a = E(h^1)E(h^2) \dots E(h^n) \in \mathcal{A}_{par}(H) \in \mathcal{A}_{par}(H)$ temos

$$1_H \bullet a = E(1_H h^1)E(1_H h^2) \dots E(1_H h^n)E(1_H) = a.$$

AP2) Sejam $a = E(h^1)E(h^2) \dots E(h^n), b = E(k^1)E(k^2) \dots E(k^m) \in \mathcal{A}_{par}(H)$, e seja $x \in H$. Então

$$\begin{aligned} (x_{(1)} \bullet a)(x_{(2)} \bullet b) &= (E(x_{(1)(1)}h^1)E(x_{(1)(2)}h^2) \dots E(x_{(1)(n)}h^n)E(x_{(1)(n+1)})) \\ &\quad (E(x_{(2)(1)}k^1)E(x_{(2)(2)}k^2) \dots E(x_{(2)(m)}k^m)E(x_{(2)(m+1)})) \\ &= (E(x_{(1)}h^1)E(x_{(2)}h^2) \dots E(x_{(n)}h^n)E(x_{(n+1)})) \\ &\quad (E(x_{(n+2)}k^1)E(x_{(n+3)}k^2) \dots E(x_{(n+m+1)}k^m)E(x_{(n+m+2)})) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} E(x_{(1)}h^1)E(x_{(2)}h^2) \dots E(x_{(n)}h^n)E(x_{(n+1)}k^1) \\ &\quad E(x_{(n+2)}k^2)E(x_{(n+3)}k^3) \dots E(x_{(n+m+1)})E(x_{(n+m+2)}) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} E(x_{(1)}h^1)E(x_{(2)}h^2) \dots E(x_{(n)}h^n)E(x_{(n+1)}k^1) \\ &\quad E(x_{(n+2)}k^2)E(x_{(n+3)}k^3) \dots E(x_{(n+m)}k^m)E(x_{(n+m+1)}) \\ &= x \bullet E(h^1)E(h^2) \dots E(h^n)E(k^1)E(k^2) \dots E(k^m) \\ &= x \bullet (ab). \end{aligned}$$

AP3) Sejam $x, y \in H$ e $a = E(h^1)E(h^2) \dots E(h^n) \in \mathcal{A}_{par}(H)$. Então,

$$\begin{aligned} (x_{(1)} \bullet E(1_H))(x_{(2)}y \bullet a) &= (E(x_{(1)(1)})E(x_{(1)(2)})) (E(x_{(2)(1)}y_{(1)}h^1) \dots \\ &\quad \dots E(x_{(2)(n)}y_{(n)}h^n)E(x_{(2)(n+1)}y_{(n+1)})) \\ &\stackrel{(2.10)}{=} E(x_{(1)})E(x_{(2)(1)}y_{(1)}h^1) \dots \\ &\quad \dots E(x_{(2)(n)}y_{(n)}h^n)E(x_{(2)(n+1)}y_{(n+1)}) \\ &= E(x_{(1)})E(x_{(2)}y_{(1)}h^1) \dots \\ &\quad \dots E(x_{(n)}y_{(n-1)}h^{n-1})E(x_{(n+1)}y_{(n)}h^n)E(x_{(n+2)}y_{(n+1)}) \\ &\stackrel{(2.11)}{=} E(x_{(1)}y_{(1)}h^1)E(x_{(2)}y_{(2)}h^2) \dots \\ &\quad \dots E(x_{(n)}y_{(n)}h^n)E(x_{(n+1)}y_{(n+1)})E(x_{(n+2)}) \\ &= x \bullet (y \bullet a). \end{aligned}$$

AP4) $x \bullet (y \bullet a) = (x_{(1)}y \bullet a)(x_{(2)} \bullet E(1_H))$ é análogo ao item anterior.

Com isso, $H \curvearrowright_p \mathcal{A}_{par}(H)$, e pelo Exemplo 2.31 obtemos a representação parcial

$$\pi : H \longrightarrow \text{End}(B),$$

definida por $\pi(h)(b) = h \bullet b$, para todo $b \in B = \mathcal{A}_{par}(H)$. Pela propriedade universal de H_{par} , existe um único morfismo de álgebras $\bar{\pi} : H_{par} \longrightarrow \text{End}(B)$ tal que $\bar{\pi} \circ [] = \pi$. Ou seja,

$$\begin{array}{ccc} & & H_{par} \\ & \nearrow [] & \downarrow \bar{\pi} \\ H & \xrightarrow{\pi} & \text{End}(B). \end{array}$$

Considere agora as funções

$$ev_1 : \text{End}(B) \longrightarrow B,$$

definida por $ev_1(f) = f(1_B)$ para todo f de $\text{End}(B)$ e,

$$\epsilon_l : H_{par} \longrightarrow \mathcal{A},$$

definida por $\epsilon_l(x) = \varepsilon_{h_{(1)}^1} \varepsilon_{h_{(2)}^1 h_{(1)}^2} \cdots \varepsilon_{h_{(n)}^1 h_{(n-1)}^2 \cdots h_{(2)}^{n-1} h^n}$, para todo $x = [h^1][h^2] \cdots [h^n]$ em H_{par} .

Observação 2.51. A função $\epsilon_l : H_{par} \longrightarrow \mathcal{A}$ é propositalmente denotada assim, pois será usada a mesma quando descrevermos a estrutura de H_{par} como Hopf Algebróide no Exemplo 2.52.

Seja $\bar{\pi}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow \text{End}(B)$ a restrição de $\bar{\pi}$ a \mathcal{A} . Defina $\eta : \mathcal{A} \longrightarrow B = \mathcal{A}_{par}$ como sendo $ev_1 \circ \bar{\pi}_{\mathcal{A}}$. Então para todo $h \in H$, $\varepsilon_h \in \mathcal{A}$ temos

$$\begin{aligned} \eta(\varepsilon_h) &= (ev_1 \circ \bar{\pi}_{\mathcal{A}})(\varepsilon_h) \\ &= \bar{\pi}_{\mathcal{A}}(\varepsilon_h)(1_B) \\ &= \pi(h_{(1)})(\pi(S(h_{(2)}))(1_B)) \\ &= h_{(1)} \bullet (S(h_{(2)}) \bullet 1_B) \\ &= h \bullet 1_B \\ &= E(h). \end{aligned}$$

Por outro lado, lembrando que $u : \mathcal{A}_{par} \longrightarrow \mathcal{A}$ foi obtido tal que $u \circ \sigma = e_{\mathcal{A}}$, em que $\sigma(h) = p \circ \iota(h) = E(h)$, temos $u(E(h)) = u(p(\iota(E(h)))) = u(\sigma(h)) = e_{\mathcal{A}}(h) = \varepsilon_h$.

Lembremos que a categoria de módulos parciais e de H_{par} -módulos são isomorfas, Proposição 2.40. Além disso, observe que todo módulo $M \in {}_{H_{par}}\mathcal{M}$ possui automaticamente uma estrutura de bimódulo sobre \mathcal{A} , ou seja, $M \in {}_{\mathcal{A}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ via as seguintes ações

$$\varepsilon_h \blacktriangleright m := [h_{(1)}][S(h_{(2)})] \triangleright m,$$

$$m \blacktriangleleft \varepsilon_h := [h_{(2)}][S^{-1}(h_{(1)})] \triangleright m.$$

Em particular, H_{par} é um \mathcal{A} -bimódulo.

Veremos agora que a álgebra H_{par} é um Hopf-algebróide e com isto, a categoria dos seus módulos à esquerda é monoidal fechada. O fato de H_{par} ser um Hopf algebróide também implicará que o funtor “esquecimento”

$$U : {}_{H_{par}}\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$$

é monoidal estrito.

No que segue, nos dedicamos a descrever a estrutura de H_{par} como Hopf algebróide. É importante lembrar que se $H = \mathbb{k}G$, então $H_{par} = (\mathbb{k}G)_{par}$ é exatamente $\mathbb{k}_{par}(G)$, que é isomorfa (por enquanto como álgebras) a $\mathbb{k}\Gamma(G)$, quando G finito.

Exemplo 2.52. Para toda álgebra de Hopf H , vejamos a estrutura de H_{par} como Hopf algebróide. Primeiro, seja H uma álgebra de Hopf com antípoda invertível S . Temos,

- 1) H_{par} é uma \mathbb{k} -álgebra.
- 2) Considere a subálgebra

$$\mathcal{A} = \text{span}\{\varepsilon_h = [h_{(1)}][S(h_{(2)})] : h \in H\}.$$

Defina

$$s : \mathcal{A} \longrightarrow H_{par}$$

como sendo a inclusão, isto é, seja $a = \varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n} \in \mathcal{A}$,

$$s(a) = [h_{(1)}^1][S(h_{(2)}^1)][h_{(1)}^2][S(h_{(2)}^2)] \dots [h_{(1)}^n][S(h_{(2)}^n)],$$

logo, é fácil ver que s é um morfismo de álgebras. Defina,

$$t : \mathcal{A} \longrightarrow H_{par}$$

como segue. Para cada $a = \varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n} \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} t(a) &= [h_{(2)}^n][S^{-1}(h_{(1)}^n)] \dots [h_{(2)}^2][S^{-1}(h_{(1)}^2)][h_{(2)}^1][S^{-1}(h_{(1)}^1)] \\ &= \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(h^n)} \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(h^{n-1})} \dots \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(h^2)} \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(h^1)}. \end{aligned}$$

Ou seja, $t(\varepsilon_h) = [h_{(2)}][S^{-1}(h_{(1)})]$. Observe também que

$$t(\varepsilon_h \varepsilon_k) = [k_{(2)}][S^{-1}(k_{(1)})][h_{(2)}][S^{-1}(h_{(1)})] = t(\varepsilon_k)t(\varepsilon_h).$$

Segue desta última igualdade que, em geral, para todo $a = \varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2} \dots \varepsilon_{h^n}$ e todo $b = \varepsilon_{k^1}\varepsilon_{k^2} \dots \varepsilon_{k^m}$ em \mathcal{A} ,

$$t(ab) = t(b)t(a),$$

ou seja, $t : \mathcal{A} \longrightarrow H_{par}$ é um antimorfismo de álgebras.

Vejamos que as imagens de s e t comutam. Observe que,

$$\begin{aligned}
 s(\varepsilon_h)t(\varepsilon_k) &= \varepsilon_h[k_{(2)}][S^{-1}(k_{(1)})] \\
 &= \varepsilon_h\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k)} \\
 &= \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k)}\varepsilon_h && \text{(Lema 2.44)} \\
 &= t(\varepsilon_k)s(\varepsilon_h).
 \end{aligned}$$

Logo, para todo $a = \varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2}\dots\varepsilon_{h^n}$, $b = \varepsilon_{k^1}\varepsilon_{k^2}\dots\varepsilon_{k^m}$ em \mathcal{A} temos

$$\begin{aligned}
 s(a)t(b) &= s(\varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2}\dots\varepsilon_{h^n})t(\varepsilon_{k^1}\varepsilon_{k^2}\dots\varepsilon_{k^m}) \\
 &= \varepsilon_{h^1}\dots\varepsilon_{h^n}\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^m)}\dots\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^2)}\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^1)} \\
 &= \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^m)}\dots\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^2)}\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^1)}\varepsilon_{h^1}\dots\varepsilon_{h^n} \quad (\varepsilon_{h^i}\tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^j)} = \tilde{\varepsilon}_{S^{-1}(k^j)}\varepsilon_{h^i}, \forall i, j) \\
 &= t(\varepsilon_{k^1}\varepsilon_{k^2}\dots\varepsilon_{k^m})s(\varepsilon_{h^1}\varepsilon_{h^2}\dots\varepsilon_{h^n}) \\
 &= t(b)s(a).
 \end{aligned}$$

Essas aplicações fazem de H_{par} um \mathcal{A} -bimódulo:

*) A estrutura de \mathcal{A} -módulo à esquerda está dada pela aplicação s ,

$$a \triangleright [h] = s(a)[h] = a[h],$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $h \in H$.

***) A estrutura de \mathcal{A} -módulo à direita está dada pela aplicação t ,

$$[h] \triangleleft a = t(a)[h],$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e todo $h \in H$. De fato, veja que

$$\begin{aligned}
 [h] \triangleleft ab &= t(ab)[h] \\
 &= t(b)t(a)[h] \\
 &= ([h] \triangleleft a) \triangleleft b.
 \end{aligned}$$

3) Considere a tripla $(H_{par}, \underline{\Delta}_l, \underline{\varepsilon}_l)$ como segue.

i) H_{par} como \mathcal{A} -bimódulo definido por s e t ;

ii) O morfismo $\underline{\Delta}_l : H_{par} \longrightarrow H_{par} \otimes_{\mathcal{A}} H_{par}$ definido por

$$\underline{\Delta}_l(a) = [h_{(1)}^1][h_{(1)}^2]\dots[h_{(1)}^n] \otimes_{\mathcal{A}} [h_{(2)}^1][h_{(2)}^2]\dots[h_{(2)}^n],$$

para todo $a = [h_1][h^2]\dots[h^n] \in H_{par}$. Procedemos a provar que $\underline{\Delta}_l$ é um morfismo de \mathcal{A} -bimódulos.

iii) O morfismo $\underline{\varepsilon}_l : H_{par} \longrightarrow \mathcal{A}$ definido por

$$\underline{\varepsilon}_l(x) = \varepsilon_{h_{(1)}^1} \varepsilon_{h_{(2)}^1} h_{(1)}^2 \varepsilon_{h_{(3)}^1} h_{(2)}^2 h_{(1)}^3 \cdots \varepsilon_{h_{(n)}^1} h_{(n-1)}^2 \cdots h_{(2)}^{n-1} h^n,$$

para todo $x = [h^1][h^2] \dots [h^n] \in H_{par}$. Observe que a própria definição de $\underline{\varepsilon}_l$ nos garante que é morfismo de \mathcal{A} -módulos à esquerda. Para provar que é morfismo de \mathcal{A} -módulos à direita, veja que, sejam $[h] \in H_{par}$ e $\varepsilon_k \in \mathcal{A}$ então

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_l([h] \triangleleft \varepsilon_k) &= \underline{\varepsilon}_l(t(\tilde{\varepsilon}_k)[h]) \\ &= \underline{\varepsilon}_l([k_{(2)}][S^{-1}(k_{(1)})][h]) \\ &= \underline{\varepsilon}_l([k_{(2)}][S^{-1}(k_{(1)})h]) \\ &= \underline{\varepsilon}_l(\varepsilon_{k_{(2)}}[k_{(3)}S^{-1}(k_{(1)})h]) \\ &= \varepsilon_{k_{(2)}} \varepsilon_{k_{(3)}S^{-1}(k_{(1)})h} \\ &= [k_{(3)}][S(k_{(4)})][k_{(5)}S^{-1}(k_{(2)})h_{(1)}][S(k_{(6)}S^{-1}(k_{(1)})h_{(2)})] \\ &= [k_{(3)}][S^{-1}(k_{(2)})h_{(1)}][S(S^{-1}(k_{(1)})h_{(2)})S(k_{(4)})] \\ &= [k_{(3)}][S^{-1}(k_{(2)})h_{(1)}][S(S^{-1}(k_{(1)})h_{(2)})][S(k_{(4)})] \\ &= [h_{(1)}][S(h_{(2)}k_{(1)})][S(k_{(2)})] \\ &= \varepsilon_h \varepsilon_k \\ &= \underline{\varepsilon}_l([h])\varepsilon_k. \end{aligned}$$

Logo, $(H_{par}, \underline{\Delta}_l, \underline{\varepsilon}_l)$ é um \mathcal{A} -coanel.

- 4) Devemos provar agora que a imagem de $\underline{\Delta}_l$ está contida na subálgebra de Takeuchi $H_{par} \times_{\mathcal{A}} H_{par}$. Para isto, primeiro devemos provar

$$[h_{(1)}]t(\varepsilon_k) \otimes_{\mathcal{A}} [h_{(2)}] = [h_{(1)}] \otimes_{\mathcal{A}} [h_{(2)}]s(\varepsilon_k).$$

Uma vez provado isto, podemos mostrar que a aplicação

$$\pi \circ ([] \otimes []) \circ \Delta : H \longrightarrow H_{par} \otimes_{\mathcal{A}_{par}} H_{par}$$

é uma representação parcial da álgebra de Hopf H . Logo, a propriedade universal da H_{par} , garante que $\underline{\Delta}_l$ é um morfismo de álgebras, pois teríamos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\pi \circ ([] \otimes []) \circ \Delta} & H_{par} \otimes_{\mathcal{A}} H_{par} \\ & \searrow [] & \nearrow \underline{\Delta}_l \\ & & H_{par} \end{array}$$

5) Para provar a igualdade

$$\underline{\epsilon}_l(hk) = \underline{\epsilon}_l(hs(\underline{\epsilon}_l(k))) = \underline{\epsilon}_l(ht(\underline{\epsilon}_l(k))),$$

para todo $h, k \in H_{par}$. Veja que, do isomorfismo apresentado no Teorema 2.48 obtemos,

$$\underline{\epsilon}_l([h]s(a)) = \underline{\epsilon}_l((h_{(1)} \cdot a)[h_{(2)}]) = (h_{(1)} \cdot a)\epsilon_{(2)} = h \cdot a,$$

o que nos garante que a igualdade desejada é verdadeira.

Assim, a sextupla $(\mathcal{H}_{par}, \mathcal{A}, s, t, \underline{\Delta}_l, \underline{\epsilon}_l)$ é um \mathcal{A} -bialgebróide à esquerda. Analogamente é possível provar que $(H_{par}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{s}, \tilde{t}, \underline{\Delta}_r, \underline{\epsilon}_r)$ é um $\tilde{\mathcal{A}}$ -bialgebróide à direita, em que,

$$\tilde{\mathcal{A}} = \text{span}\{\tilde{\epsilon}_h : h \in H\}.$$

As aplicações

$$\tilde{s} : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow H_{par}, \quad \tilde{t} : \tilde{\mathcal{A}} \longrightarrow H_{par}$$

são definidas de forma análoga. Por exemplo, se $\tilde{a} = \tilde{\epsilon}_{h^1} \tilde{\epsilon}_{h^2} \dots \tilde{\epsilon}_{h^n} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{s}(\tilde{a}) = \tilde{a}$.

As aplicações

$$\underline{\Delta}_r : H_{par} \longrightarrow H_{par} \otimes_{\tilde{\mathcal{A}}} H_{par}, \quad \underline{\epsilon}_r : H_{par} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$

são definidas por

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_r(a) &= [h_{(1)}^1][h_{(1)}^2] \dots [h_{(1)}^n] \otimes_{\tilde{\mathcal{A}}} [h_{(2)}^1][h_{(2)}^2] \dots [h_{(2)}^n], \\ \underline{\epsilon}_r(a) &= \tilde{\epsilon}_{h_{(n)}^1} h_{(n-1)}^2 \dots h_{(2)}^{n-1} h^n \tilde{\epsilon}_{h_{(n)}^1} h_{(n-1)}^2 \dots h_{(2)}^{n-1} h^n \dots \tilde{\epsilon}_{h_{(n)}^n}, \end{aligned}$$

para todo $[h_1][h^2] \dots [h^n] \in H_{par}$.

A antípoda da H_{par} é dada pela aplicação

$$\mathcal{S} : H_{par} \longrightarrow H_{par}$$

definida por $\mathcal{S}([h^1][h^2] \dots [h^n]) = [S(h^n)] \dots [S(h^2)][S(h^1)]$.

Todos os detalhes da demonstração encontram-se no artigo [4].

3 ESTRUTURA MONOIDAL

Veremos agora a estrutura monoidal da categorias de módulos parciais. Antes disso, mostraremos que o morfismo λ no Teorema 1.13 é um isomorfismo de Hopf algebróides. As estruturas de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e H_{par} são descritas nos Proposição 2.25 e Exemplo 2.52.

Teorema 3.1. $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$ são isomorfas como Hopf algebróides.

Demonstração. Considere os morfismos de álgebras unitais definidos no Teorema 1.13:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\pi} : \mathbb{k}\Gamma(G) & \longrightarrow & \mathbb{k}_{par}(G), & \bar{\lambda} : \mathbb{k}_{par}(G) & \longrightarrow & \mathbb{k}\Gamma(G) \\ (g, A) & \longmapsto & [g]P_A & [g] & \longmapsto & \sum_{A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} (g, A), \end{array}$$

em que $P_A = \prod_{x \in A} \epsilon_x \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_y)$. Mostramos que são um inverso do outro, e que são os únicos (a menos de isomorfismo) que fazem os seguintes diagramas comutar

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{[\]} & \mathbb{k}_{par}(G), \\ & \searrow \lambda & \nearrow \bar{\pi} \\ & & \mathbb{k}\Gamma(G) \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{k}\Gamma(G) \\ & \searrow [\] & \nearrow \bar{\lambda} \\ & & \mathbb{k}_{par}(G) \end{array}$$

Ou seja, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$ são isomorfas como \mathbb{k} -álgebras, logo, $\bar{\lambda}$ é bijetiva.

Considere a aplicação $\phi : \mathcal{A}_\Gamma \longrightarrow \mathcal{A}_{par}$ definida por $\phi((e, A)) = P_A$ e estenda por linearidade. Nosso objetivo agora é provar que o par $(\bar{\lambda}, \phi)$ define um isomorfismo de Hopf algebróides, Definição 2.21. Basicamente devemos provar que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\Gamma & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{k}\Gamma(G) \\ \phi \downarrow & (1) & \downarrow \bar{\pi} \\ \mathcal{A}_{par} & \xrightarrow{\iota'} & \mathbb{k}_{par}(G) \\ & \iota' \circ \phi = \bar{\pi} \circ \iota, & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_\Gamma & \xrightarrow{\epsilon'_s} & \mathbb{k}\Gamma(G) \\ \phi \downarrow & (2) & \downarrow \bar{\pi} \\ \mathcal{A}_{par} & \xrightarrow{t'} & \mathbb{k}_{par}(G) \\ & t' \circ \phi = \bar{\pi} \circ \epsilon'_s, & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{k}\Gamma(G) & \xrightarrow{\epsilon_l} & \mathcal{A}_\Gamma \\ \bar{\pi} \downarrow & (3) & \downarrow \phi \\ \mathbb{k}_{par}(G) & \xrightarrow{\epsilon'_l} & \mathcal{A}_{par} \\ & \epsilon'_l \circ \bar{\pi} = \phi \circ \epsilon_l, & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{k}\Gamma(G) & \xrightarrow{\Delta_l} & \mathbb{k}\Gamma(G) \otimes_{\mathcal{A}_\Gamma} \mathbb{k}\Gamma(G) \\ \bar{\pi} \downarrow & (4) & \downarrow \bar{\pi} \otimes \bar{\pi} \\ \mathbb{k}_{par}(G) & \xrightarrow{\Delta'_l} & \mathbb{k}_{par}(G) \otimes_{\mathcal{A}_{par}} \mathbb{k}_{par}(G) \\ & \Delta'_l \circ \bar{\pi} = (\bar{\pi} \otimes \bar{\pi}) \circ \Delta_l. & \end{array}$$

O diagrama (1) sai direto da definição de ϕ e $\bar{\pi}$.

Para fazer comutar o diagrama (2), observe primeiro que, como lembrado anteriormente, $\epsilon'_s(e, A) = (e, A)$, isto é, atua como uma inclusão, ou seja, $\bar{\pi}(\epsilon'_s(e, A)) = P_A$. Além disso, $t(P_A) = P_A$, logo,

$$t'(\phi(e, A)) = t'(P_A) = P_A,$$

donde temos a comutatividade.

A comutatividade do diagrama (3), sai pelas seguintes duas igualdades. Primeiro,

$$\phi(\underline{\epsilon}_l(g, A)) = \phi(e, gA) = P_{gA},$$

por outro lado,

$$\underline{\epsilon}'_l(\bar{\pi}(g, A)) = \underline{\epsilon}'_l([g]P_A) = [g] \triangleright \underline{\epsilon}'_l(P_A) = [g] \triangleright P_A = P_{gA}.$$

Para provar a comutatividade do diagrama (4), também devemos ter presente que $\underline{\Delta}'_l$ é um morfismo de \mathcal{A}_{par} -bimódulos, donde

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}'_l(\bar{\pi}(g, A)) &= \underline{\Delta}'_l([g]P_A) \\ &= [g]P_A \otimes_{\mathcal{A}_{par}} [g]P_A, \end{aligned}$$

pois $P_A = \prod_{x \in A} \epsilon_x \prod_{y \notin A} (1 - \epsilon_y)$ e $\epsilon_x = [x][x^{-1}]$, $\epsilon_x = [x][x^{-1}]$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\bar{\pi} \otimes \bar{\pi})(\underline{\Delta}_l(g, A)) &= (\bar{\pi} \otimes \bar{\pi})((g, A) \otimes_{\mathcal{A}_r} (g, A)) \\ &= \bar{\pi}(g, A) \otimes_{\mathcal{A}_{par}} \bar{\pi}(g, A) \\ &= [g]P_A \otimes_{\mathcal{A}_{par}} [g]P_A \end{aligned}$$

Cabe destacar que estamos usando o fato de $\underline{\Delta}'_l$ e $\underline{\epsilon}'_l$ serem morfismos de \mathcal{A}_{par} -bimódulos. Pela própria construção, obtemos que λ e ϕ são bijetivas.

Por último, observe que, a antípoda de $\mathbb{k}\Gamma(G)$ como Hopf algebróide é a própria antípoda como álgebra de Hopf fraca, isto é

$$S : \mathbb{k}\Gamma(G) \longrightarrow \mathbb{k}\Gamma(G),$$

tal que $S(g, A) = (g^{-1}, gA)$. E a antípoda de $\mathbb{k}_{par}(G)$ como Hopf algebróide é definida no Exemplo 2.52 por

$$\mathcal{S}([h^1][h^2] \dots [h^n]) = [S(h^n)] \dots [S(h^2)][S(h^1)].$$

Assim, $\mathcal{S}([g]) = [g^{-1}]$, $\mathcal{S}([g][g^{-1}]) = [g][g^{-1}]$ e $\mathcal{S}([g]P_A) = P_A[g^{-1}]$, donde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\bar{\pi}(g, A)) &= \mathcal{S}([g]P_A) \\ &= P_A[g^{-1}]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\bar{\pi}(S(g, A)) &= \bar{\pi}(g^{-1}, gA) \\ &= [g^{-1}]P_{gA} \\ &= P_A[g^{-1}].\end{aligned}$$

As outras igualdades seguem direto da definição de $\mathbb{k}_{par}(G)$ e $\mathbb{k}\Gamma(G)$.

Portanto, $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$ são isomorfas como Hopf algebróides. \square

O Teorema 3.1, junto com o Teorema 2.18, nos garante a seguinte equivalência,

$$\left(\mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{A}_{par}}, \mathcal{A}_{par}\right) \cong \left(\mathbb{k}\Gamma(G)\mathcal{M}, \boxtimes, \mathcal{A}_\Gamma\right)$$

em que,

$$M \otimes_{\mathcal{A}_\Gamma} N \cong M \boxtimes N = \Delta(\mathbf{1})(M \otimes N).$$

No que segue, vamos detalhar os módulos simples e dar alguns exemplos. Quando não houver confusão, iremos usar \mathcal{A} para denotar a álgebra base, seja \mathcal{A}_{par} ou \mathcal{A}_Γ . Também iremos detalhar como se comporta o produto tensorial \boxtimes acima definido. Isto é importante, pois até aqui, o fato de provar que as álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$ são isomorfas como Hopf algebróides é o que nos garante que a equivalência anterior seja verdadeira.

3.1 OBJETOS SIMPLES

Para começar, apresentamos algumas definições adicionais. Seja $\pi : G \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{V})$ uma representação parcial, então \mathbb{V} pode ser considerado como um G -espaço parcial. Dizemos que π é:

- *reduzível*, se \mathbb{V} contém um G -subespaço parcial próprio invariante. Caso contrário π é dita de *irreduzível*.
- *decomponível*, se \mathbb{V} pode ser escrito como soma direta de dois G -subespaços parciais próprios. Caso contrário é chamada de *indecomponível*.
- *completamente reduzível*, se o seu G -espaço parcial pode ser escrito como uma soma direta de G -subespaços parciais irreduzíveis.

Antes de enunciar os próximos resultados, observe que, dada uma componente conexa Σ de $\Gamma(G)$, a aplicação

$$\lambda_\Sigma : G \longrightarrow \mathbb{k}\Sigma,$$

definida por

$$\lambda_\Sigma(g) = \begin{cases} \sum_{\substack{A \in \Sigma \\ A \in \mathcal{P}_{e, g^{-1}}} (g, A), & \text{se } g^{-1} \in A \in \Sigma, \text{ para algum } A, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é uma representação parcial, Teorema 2.2 em [18]. A expressão “ $A \in \Sigma$ ” significa que A é uma unidade (vértice) do grupóide Σ .

Além disso, se m é o número de vértices de Σ , então $\mathbb{k}\Sigma \cong M_m(\mathbb{k}G_A)$, onde A é algum vértice de Σ , veja a Proposição 3.1 em [15].

Teorema 3.2. *Seja G um grupo finito e Σ uma componente conexa de $\Gamma(G)$. Então para cada \mathbb{k} -representação irredutível de grau finito $\varphi : \mathbb{k}\Sigma \rightarrow \text{End}(V)$, $\varphi \circ \lambda_\Sigma$ é uma representação parcial irredutível de G . Reciprocamente, para toda \mathbb{k} -representação parcial irredutível de grau finito $\pi : G \rightarrow \text{End}(V)$, existe uma única componente conexa Σ de $\Gamma(G)$ e uma única representação irredutível $\tilde{\pi} : \mathbb{k}\Sigma \rightarrow \text{End}(V)$ tal que $\tilde{\pi} \circ \lambda_\Sigma = \pi$.*

Demonstração. A demonstração foi feita no Teorema 2.2 em [18] e depois completada na Proposição 2.2 em e [16]. \square

Segue do Teorema anterior que, se V for um G -espaço parcial irredutível de dimensão finita, ele pode ser considerado como um $\mathbb{k}\Sigma$ -módulo à esquerda simples, para certa (única) componente conexa Σ de $\Gamma(G)$, com um número finito de vértices.

Observação 3.3. O teorema anterior e algumas afirmações feitas aqui continuam sendo válidas se substituirmos a palavra “irredutível” por “indecomponível”.

Para um grupo qualquer G e uma aplicação $\varphi : G \rightarrow \text{End}(V_{\mathbb{k}H})$, dizemos que φ é *monomial sobre H* , se existe uma base $\mathbb{k}H$ -livre de V tal que para todo $g \in G$, cada linha e cada coluna da matriz $\varphi(g)$ contém no máximo uma entrada não-zero, a qual é um elemento de H , sendo que poderiam ser todas as filas e colunas zero. O Teorema a seguir e a sua demonstração pode ser consultado em [18].

Teorema 3.4. *Seja $\pi : G \rightarrow \text{End}(V)$ uma \mathbb{k} -representação parcial irredutível de grau finito de G , Σ a componente conexa de $\Gamma(G)$ relacionada a π e $\mathbb{k}\Sigma V$ o $\mathbb{k}\Sigma$ -módulo correspondente a π . Então $\mathbb{k}\Sigma V \cong \mathbb{k}\Sigma W \otimes_{\mathbb{k}H} U$, onde $H \leq G$ é o grupo de isotropia de um vértice de Σ , U é um $\mathbb{k}H$ -módulo irredutível à esquerda e W é o $\mathbb{k}\Sigma - \mathbb{k}H$ -bimódulo correspondente a uma representação parcial monomial sobre H de G .*

A seguir, apresentamos uma alternativa para caracterizar os objetos simples da categoria $\mathbb{k}_{par}(G)$. Esta apresentação será útil para o estudo das representações parciais irredutíveis de um grupo G e para o Teorema principal 4.4 que queremos provar.

Seja $A \in \mathcal{P}_e(G)$, isto é, um subconjunto de G que contém o elemento neutro, e seja

$$G_A = \{h \in G \mid hA = A\}$$

o grupo de isotropia de A , então $G_A \leq G$ e

$$G = G_A \cup a_1 G_A \cup a_2 G_A \cup \dots \cup a_t G_A,$$

com $a_i \in G$, $i \in \{1, \dots, t\}$.

Considere uma representação irredutível \mathbb{V}^α de G_A , isto é, um homomorfismo de grupos

$$\alpha : G_A \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{V}^{(\alpha)}).$$

Defina o \mathbb{k} -espaço vetorial

$$M_A := \mathrm{span}_{\mathbb{k}}\{P_{xA} : x \in G, x^{-1} \in A\}.$$

Observe que M_A é não vazio, pois $P_A \in M_A$. Além disso, veja que $P_{xA} = 0$ quando $x^{-1} \notin A$, logo é suficiente pedir $x^{-1} \in A$.

Nosso objetivo agora é mostrar que

$$M_{(A,\alpha)} := M_A \otimes \mathbb{V}^{(\alpha)}$$

é um $\mathbb{k}_{\mathrm{par}}(G)$ -módulo simples à esquerda.

Antes disso, o seguinte lema afirma que, se A e B estão na mesma componente conexa, isto é, se existe $g \in G$ tal que $A = gB$, vamos denotar por $A \sim B$ esta relação, então $M_A = M_B$, e a recíproca também é verdadeira. Devemos notar que a relação \sim é uma relação de equivalência. Isto será importante ao identificarmos $M_{(A,\alpha)}$ com a sua respectiva componente conexa e fazermos produto com outras componentes.

Lema 3.5. *Sejam $A, B \in \mathcal{P}_e$. Então, $M_A = M_B$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $A = gB$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Como $P_A \in M_A$ e por hipóteses $M_A = M_B$, então $P_A = \sum_{h^{-1} \in B} \alpha_h P_{hB}$

e daí,

$$0 \neq P_A = P_A P_A = P_A \sum_{h^{-1} \in B} \alpha_h P_{hB} = \sum_{h^{-1} \in B} \alpha_h P_A [A = hB],$$

donde segue que existe $h^{-1} \in B$ tal que $A = hB$, e como $e \in B$ então $h \in hB = A$, ou seja, $h \in A$ tal que $A = hB$, como queríamos mostrar.

(\Leftarrow) Seja $g \in A$ tal que $A = gB$. Se $x \in M_A$, então

$$x = \sum_{h^{-1} \in A} \alpha_h P_{hA} = \sum_{h^{-1} \in gB} \alpha_h P_{hgB} = \sum_{g^{-1}h^{-1} \in B} \alpha_h P_{hgB} \in M_B,$$

dai $M_A \subseteq M_B$. Analogamente $M_B \subseteq M_A$ e portanto $M_A = M_B$. \square

Provemos agora que $M_{(A,\alpha)} = M_A \otimes \mathbb{V}^{(\alpha)}$ definem uma representação parcial irredutível de G . Podemos ver também que todas as representações parciais irredutíveis de G são dessa forma.

Proposição 3.6. *Sejam $A, B \in \mathcal{P}_e$. Então $M_{(A,\alpha)}$ é um $\mathbb{k}_{\mathrm{par}}(G)$ -módulo simples à esquerda com a ação definida como segue.*

Para todo $[g] \in \mathbb{k}_{par}(G)$ e $P_{xA} \otimes v \in M_{(A,\alpha)}$,

$$[g] \triangleright (P_{xA} \otimes v) := \begin{cases} P_{yA} \otimes \alpha(h)(v), & \text{se } y^{-1} \in A, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $gx = yh$ para algum $h \in G_A$, e $y \in G$.

Demonstração. Para mostrar que se $A \in \mathcal{P}_e$, $M_{(A,\alpha)} = M_A \otimes \mathbb{V}^\alpha$ é simples, basta fixar um elemento $P_{gA} \otimes v$ de $M_{(A,\alpha)}$ e provar que ele gera qualquer elemento de $M_A \otimes \mathbb{V}^\alpha$. Para isto, considere $\sum P_{g_i A} \otimes v_i$ um elemento arbitrário em $M_A \otimes \mathbb{V}^\alpha$. Como \mathbb{V}^α é irredutível, para cada v_i existe um $s_i \in G_A$ tal que $\alpha(s_i)(v) = v_i$. Com isto, veja que

$$\begin{aligned} [g_i s_i g^{-1}] \triangleright (P_{gA} \otimes v) &= P_{g_i A} \otimes \alpha(s_i)(v) \\ &= P_{g_i A} \otimes v_i. \end{aligned}$$

Como $\sum [g_i s_i g^{-1}] \in \mathbb{k}_{par}(G)$, segue do anterior que

$$\sum P_{g_i A} \otimes v_i = \sum [g_i s_i g^{-1}] \triangleright (P_{gA} \otimes v). \quad \square$$

Observe que, se $M_{(A,\alpha)} = M_A \otimes \mathbb{V}^\alpha$ e $M_{(B,\beta)} = M_B \otimes \mathbb{V}^\beta$ são módulos simples, em que $\alpha : G_A \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V}^\alpha)$ e $\beta : G_B \rightarrow \text{GL}(\mathbb{V}^\beta)$ são representações irredutíveis de G_A e G_B , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} (M_A \otimes \mathbb{V}^\alpha) \boxtimes (M_B \otimes \mathbb{V}^\beta) &= [A \sim B] M_A \otimes (\mathbb{V}^\alpha \otimes \mathbb{V}^\beta) \\ &\cong [A \sim B] M_A \otimes \left(\bigoplus n_\sigma^{\alpha\beta} \mathbb{V}^\sigma \right) \\ &= \bigoplus n_\sigma^{\alpha\beta} [A \sim B] M_A \otimes \mathbb{V}^\sigma \end{aligned}$$

Como o nosso objeto de estudo é G , um grupo finito, então

$$\mathbb{k}\Gamma(G) \cong \mathbb{k}_{par}(G),$$

logo todo $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulo à esquerda irredutível (indecomponível) é isomorfo a $\mathbb{k}_{par}(G)W \otimes_{\mathbb{k}H} U$, onde U é algum $\mathbb{k}H$ -módulo à esquerda irredutível (indecomponível) e $\mathbb{k}_{par}(G)W_{\mathbb{k}H}$ é o bimódulo correspondente a uma representação parcial elementar, sendo H o grupo de isotropia de algum vértice.

Note que, os Teoremas 3.2 e 3.4 garantem que todo módulo simples é da forma $M_{(A,\alpha)}$.

Podemos observar a seguinte decomposição em módulos simples

$$\mathcal{A}_\Gamma = \bigoplus_{A \in \mathcal{P}_e} M_A \subseteq \mathbb{k}_{par}(G),$$

onde \mathcal{A}_Γ é a sub-álgebra comutativa gerada pelos vértices de $\Gamma(G)$ definida em (2.5)

Com a notação anterior, $M_\Sigma \boxtimes M_{\Sigma'} = 0$, para Σ e Σ' componentes conexas distintas. No entanto, se elas são iguais, o produto tensorial será determinado pelas representações do grupo de isotropia.

Observemos os próximos dois exemplos. É importante destacar que quando não houver confusão, iremos escrever apenas M_A querendo dizer $M_{(A,\pi_0)} = M_A \otimes \mathbb{k}$, sabendo que A tem grupo de isotropia trivial $\{e\}$ e que π_0 é a representação trivial.

Exemplo 3.7. Seja $G = C_3 = \{g^t : g^3 = e\}$. Vimos que

$$\mathbb{k}_{par}(G) \cong \mathbb{k} \oplus M_2(\mathbb{k}) \oplus \mathbb{k}G,$$

e, $\mathcal{P}_e = \{\{e\}, \{e, g\}, \{e, g^2\}, G\}$.

Aqui temos uma componente conexa não trivial com dois vértices X_1 e X_2 , a saber $\Sigma = \{\{e, g\}, \{e, g^2\}\}$. O vértice base de Σ é $X_1 = \{e, g\}$ e o segundo vértice é $X_2 = \{e, g^2\}$. Temos que $M_{X_1} = M_{X_2}$.

No caso, poderíamos dizer que M_{X_1} é a classe de módulos relacionados com X_1 . Como espaços vetoriais temos as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned} M_{\{e\}} &= \mathbb{k}P_{\{e\}}, \\ M_{X_1} &= \mathbb{k}P_{\{e,g\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^2\}}, \\ M_G &= \mathbb{k}PG. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos as representações parciais irredutíveis

- $M_{(\{e\}, \pi_0)} = M_{\{e\}} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k}$;
- $M_{(X_1, \pi_0)} = M_{X_1} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k} = M_{X_2} \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{k} = M_{(X_2, \pi_0)}$;
- $M_{(G, \rho_i)} = M_G \otimes_{\mathbb{k}G} V_{\rho_i}$, para $i \in \{1, 2, 3\}$ determinada por

$$\begin{array}{ccc} \rho_1 : G \longrightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_2 : G \longrightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_3 : G \longrightarrow \mathbb{k}^* , \\ e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 \\ g \longmapsto 1 & g \longmapsto \omega & g \longmapsto \omega^2 \\ g^2 \longmapsto 1 & g^2 \longmapsto \omega^2 & g^2 \longmapsto \omega \end{array}$$

em que $\omega^k = e^{\frac{2k\pi i}{3}}$. Como $M_{(G, \rho_i)} := M_G \otimes_{\mathbb{k}G} V_{\rho_i}$, então

\boxtimes	$M_{\{e\}}$	M_{X_1}	$M_{(G, \rho_1)}$	$M_{(G, \rho_2)}$	$M_{(G, \rho_3)}$
$M_{\{e\}}$	$M_{\{e\}}$	0	0	0	0
M_{X_1}	0	M_{X_1}	0	0	0
$M_{(G, \rho_1)}$	0	0	$M_{(G, \rho_1)}$	$M_{(G, \rho_2)}$	$M_{(G, \rho_3)}$
$M_{(G, \rho_2)}$	0	0	$M_{(G, \rho_2)}$	$M_{(G, \rho_3)}$	$M_{(G, \rho_1)}$
$M_{(G, \rho_3)}$	0	0	$M_{(G, \rho_3)}$	$M_{(G, \rho_1)}$	$M_{(G, \rho_2)}$

Aqui, vejamos o produto

$$M_{(G,\rho_i)} \boxtimes M_{(G,\rho_j)} \cong M_{(G,\rho_k)},$$

em que $\rho_k(g^t) = \rho_i(g^t) \cdot \rho_j(g^t)$. Este produto, pode ser identificado com a multiplicação em G :

*	e	g	g^2	\equiv	\boxtimes	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$
e	e	g	g^2		$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$
g	g	g^2	e		$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_1)}$
g^2	g^2	e	g		$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$

Mais exemplos e construções que auxiliaram para a construção e entendimento do nosso principal resultado são explorados no Apêndice **B**.

4 TEOREMA DA ÁRVORE DE NATAL E DA MATRYOSHKA

Reiteramos que, ao longo deste trabalho, \mathbb{k} denota um corpo algebricamente fechado de característica zero, e G um grupo finito de ordem $|G|$, com elemento neutro e . Para simplificar a escrita, escrevemos apenas *representação* para nos referir às representações globais no sentido clássico.

Teorema 4.1 (Árvore de Natal). *Se $H \leq G$, e G um grupo finito. Existe um funtor*

$$\mathcal{F} : \mathbb{k}H\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M},$$

que é aditivo, monoidal, injetivo nos objetos e fiel.

Demonstração. Definamos o funtor $\mathcal{F} : \mathbb{k}H\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}$ que associa cada $\mathbb{k}H$ -módulo à esquerda \mathbb{V}^α o $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulo à esquerda

$$M_{(H,\alpha)} = M_H \otimes \mathbb{V}^\alpha.$$

De fato, $M_{(H,\alpha)}$ é um $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulo. Lembremos que a ação é dada pela seguinte regra

$$[g] \triangleright (P_H \otimes v) \begin{cases} P_H \otimes \alpha(g)(v), & \text{se } g \in H, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $[g] \in \mathbb{k}_{par}(G)$, onde $\alpha : H \longrightarrow \text{GL}(\mathbb{V}^\alpha)$ é a representação de H que faz de \mathbb{V}^α um $\mathbb{k}H$ -módulo.

Se $f : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ é um morfismo de $\mathbb{k}H$ -módulos à esquerda, então

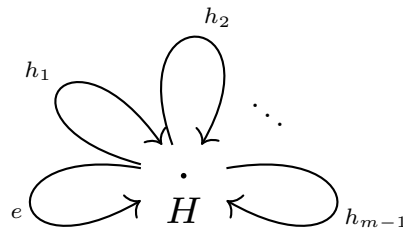
$$\mathcal{F}(f) : M_H \otimes \mathbb{V} \longrightarrow M_H \otimes \mathbb{W}$$

definido por

$$\mathcal{F}(f)(P_H \otimes v) = P_H \otimes f(v)$$

é um morfismo de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos à esquerda. Não é difícil provar que $\mathcal{F}(f)([g] \triangleright (P_H \otimes v)) = [g] \triangleright \mathcal{F}(f)(P_H \otimes v)$, pois f é morfismo de $\mathbb{k}H$ -módulos.

Geometricamente falando, o subgrupo H é associado ao vértice H e as suas representações irreduzíveis (globais no sentido clássico) são associadas às flechas da seguinte componente conexa em $\Gamma(G)$:



Provemos que \mathcal{F} é aditivo. Seja $\bigoplus_i \mathbb{V}_i \in \mathbb{k}H\mathcal{M}$ com $\mathbb{V}_i \in \mathbb{k}H\mathcal{M}$ para todo i , então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\bigoplus_i \mathbb{V}_i\right) &= M_H \otimes \left(\bigoplus_i \mathbb{V}_i\right) \\ &= \bigoplus_i (M_H \otimes \mathbb{V}_i) \\ &= \bigoplus_i (\mathcal{F}(\mathbb{V}_i)). \end{aligned}$$

A aditividade de \mathcal{F} nos dá também a monoidalidade de \mathcal{F} . Para mostrar que \mathcal{F} é um funtor monoidal, considere primeiro o conjunto das classes de isomorfismos de $\mathbb{k}H$ -módulos simples $\{\mathbb{V}_i\}_i^N$. Assim, todos os $\mathbb{k}H$ -módulos podem ser escritos como soma direta desses \mathbb{V}_i .

Sejam $\mathbb{V} = \bigoplus_i^N n_i \mathbb{V}_i$ e $\mathbb{W} = \bigoplus_j^N m_j \mathbb{V}_j$ dois $\mathbb{k}H$ -módulos, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) &= \mathcal{F}\left(\bigoplus_i^N n_i \mathbb{V}_i \otimes \bigoplus_j^N m_j \mathbb{V}_j\right) \\ &= \mathcal{F}\left(\bigoplus_{i,j}^N n_i m_j (\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j)\right) \\ &= \bigoplus_{i,j}^N n_i m_j \mathcal{F}(\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j) \\ &= \bigoplus_{i,j}^N n_i m_j \mathcal{F}\left(\bigoplus_k \lambda_{ijk} \mathbb{V}_k\right), \end{aligned}$$

em que \mathbb{V}_k é irredutível, para todo k ,

$$\begin{aligned} &= \bigoplus_{i,j,k}^N n_i m_j \lambda_{ijk} \mathcal{F}(\mathbb{V}_k) \\ &= \bigoplus_{i,j,k}^N n_i m_j \lambda_{ijk} (M_H \otimes \mathbb{V}_k) \\ &= \bigoplus_{i,j}^N n_i m_j (M_H \otimes \bigoplus_k n_{ijk} \mathbb{V}_k) \\ &= \bigoplus_{i,j}^N n_i m_j (M_H \otimes (\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j)) \\ &\cong \bigoplus_{i,j}^N n_i m_j ((M_H \otimes \mathbb{V}_i) \otimes (M_H \otimes \mathbb{V}_j)) \\ &= (M_H \otimes \bigoplus_i^N n_i \mathbb{V}_i) \otimes (M_H \otimes \bigoplus_j^N m_j \mathbb{V}_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (M_H \otimes \mathbb{V}) \otimes (M_H \otimes \mathbb{W}) \\ &= \mathcal{F}(\mathbb{V}) \otimes \mathcal{F}(\mathbb{W}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{F}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) = \mathcal{F}(\mathbb{V}) \otimes \mathcal{F}(\mathbb{W}).$$

Para provarmos que \mathcal{F} é injetivo nos objetos, lembremos que

$$M_H = \text{span}_{\mathbb{k}}\{P_H\} \cong \mathbb{k}.$$

Segue então que para qualquer $\mathbb{k}H$ -módulo \mathbb{V} , $M_H \otimes \mathbb{V} \cong \mathbb{V}$ como espaço vetorial.

Assim, sejam $\mathbb{V} = \bigoplus_i^N n_i \mathbb{V}_i$ e $\mathbb{W} = \bigoplus_i^N m_i \mathbb{V}_i$ dois $\mathbb{k}H$ -módulos tais que

$$\mathcal{F}(\mathbb{V}) \cong \mathcal{F}(\mathbb{W})$$

como $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos. Logo, a própria estrutura de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos definida sobre $M_H \otimes \mathbb{V}$ e $M_H \otimes \mathbb{W}$ obtemos que \mathbb{V} e \mathbb{W} são isomorfos como $\mathbb{k}H$ -módulos. Daqui o Teorema de *Krull-Schmidt* nos garante que as multiplicidades n_i e m_i são iguais para todo $i \in \{1, \dots, N\}$.

Para mostrar a fidelidade de \mathcal{F} procedemos a seguir. Lembramos novamente que se \mathbb{V} é um $\mathbb{k}H$ -módulo, da semissimplicidade da categoria $\mathbb{k}H\mathcal{M}$, $\mathbb{V} \cong \bigoplus_{i=1}^N n_i \mathbb{V}_i$, com \mathbb{V}_i simples para todo i e, qualquer morfismo $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ pode ser decomposto em uma soma direta como segue

$$f = \bigoplus n_i f|_{\mathbb{V}_i} : \mathbb{V} \cong \bigoplus_{i=1}^N n_i \mathbb{V}_i \rightarrow \mathbb{W},$$

em que $f|_{\mathbb{V}_i}$ ou é injetivo ou é nulo, pois \mathbb{V}_i é simples.

Considere $f, g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ dois morfismos de $\mathbb{k}H$ -módulos diferentes. Então existe um somando simples \mathbb{V}_i em que $f|_{\mathbb{V}_i}$ é injetivo ou é nulo. Por outro lado, se

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g),$$

então

$$M_H \otimes f = M_H \otimes g : M_H \otimes \mathbb{V} \rightarrow M_H \otimes \mathbb{W}.$$

Restringindo a cada somando simples de \mathbb{V} , é fácil ver que

$$M_H \otimes f|_{\mathbb{V}_i} = M_H \otimes g|_{\mathbb{V}_i} \text{ implica } f|_{\mathbb{V}_i} = g|_{\mathbb{V}_i},$$

donde obtemos que $f = g$. Portanto, \mathcal{F} é de fato fiel. \square

Para provarmos o nosso último resultado precisamos do seguinte lema.

Lema 4.2. *Seja $\psi : A \longrightarrow B$ um morfismo de álgebras. Então ψ induz um funtor*

$$(_)\psi : {}_B\mathcal{M} \longrightarrow {}_A\mathcal{M}$$

tal que, para todo B -módulo à esquerda N , com a ação \triangleright de B em N , então $a \blacktriangleright n := \psi(a) \triangleright n$ define uma ação de A sobre N .

Observe que, no lema anterior, se $f : N \longrightarrow N'$ é um morfismo de B -módulos então $f(a \blacktriangleright n) = f(\psi(a) \triangleright n) = \psi(a) \triangleright (f(n)) = a \blacktriangleright f(n)$, ou seja, f é um morfismo de A -módulos.

Observação 4.3. Como iremos tratar com duas estruturas diferentes, $\mathbb{k}_{par}(H)$ e $\mathbb{k}_{par}(G)$, com $H \leq G$, devemos fazer uma distinção entre os elementos de cada um deles. Ao longo deste trabalho, os elementos de $\mathbb{k}_{par}(G)$ serão denotados com colchetes sem índices, por exemplo, $[a]$, para $a \in G$, descreve um elemento de $\mathbb{k}_{par}(G)$. No entanto, se $a \in H$ e quisermos nos referir a $[a]$ como um elemento de $\mathbb{k}_{par}(H)$, denotaremos $[a]_H$ à classe de $a \in H$ em $\mathbb{k}_{par}(H)$ e $[a]$ à classe de $a \in H \leq G$ em $\mathbb{k}_{par}(G)$, respectivamente.

Teorema 4.4 (Matryoshka). *Sejam \mathbb{k} um corpo algebricamente fechado de característica zero, G um grupo abeliano finito e $H \leq G$. Então existe um funtor*

$$\mathfrak{M} : \mathbb{k}_{par}(H)\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}.$$

Demonstração. Considere primeiro um grupo cíclico G de ordem p^n , com p primo e $n \geq 2$. Veja que, podemos escrever

$$G = \mathbb{Z}_{p^n} = \langle a \mid a^{p^n} = e \rangle.$$

Seja $H \leq G$, então $|H| = p^m$, para algum $m \leq n$. Considere $n \neq m$. Escrevemos

$$H = \langle a^{p^{n-m}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^m}.$$

Sendo $a^{p^{n-m}}$ o gerador de H como subgrupo de G , definimos a aplicação

$$\varphi : G \longrightarrow H,$$

por $\varphi(a^t) = a^{tp^{n-m}}$, para todo $a^t \in G$. Não é difícil ver que φ é um homomorfismo de grupos, pois

$$\varphi(a^i a^j) = \varphi(a^{i+j}) = a^{(i+j)p^{n-m}} = a^{ip^{n-m} + jp^{n-m}} = a^{ip^{n-m}} a^{jp^{n-m}} = \varphi(a^i) \varphi(a^j).$$

Lembrando que, a composição de uma representação parcial com um homomorfismo de grupos também resulta em uma representação parcial, veja Observação 1.4, temos que,

$$\pi := [\]_H \circ \varphi : G \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(H)$$

é uma representação parcial (pois $[\]_H : H \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(H)$ já é uma representação parcial) que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & \searrow \pi & \downarrow [\]_H \\ & & \mathbb{k}_{par}(H) \end{array}$$

Assim, pela propriedade universal de $\mathbb{k}_{par}(G)$, existe um único morfismo de álgebras $\bar{\pi} : \mathbb{k}_{par}(G) \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(H)$ tal que $\bar{\pi} \circ [\] = \pi = [\]_H \circ \varphi$, isto é, para todo $a^t \in G$,

$$\bar{\pi}([a^t]) = [\varphi(a^t)]_H = [a^{tp^{n-m}}]_H,$$

ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \downarrow [\] & \searrow \pi & \downarrow [\]_H \\ \mathbb{k}_{par}(G) & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{k}_{par}(H). \end{array}$$

Segue do Lema 4.2, que o morfismo de álgebras $\bar{\pi}$ induz o funtor

$$\mathfrak{M} =: (_)\bar{\pi} : \mathbb{k}_{par}(H)\text{-}\mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{k}_{par}(G)\text{-}\mathcal{M},$$

tal que, a ação parcial de G sobre M , sendo M um $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulo, é a ação induzida vista anteriormente no Lema 4.2.

Em outras palavras, se $\xi \in \mathbb{k}_{par}H$ e $m \in M$ com

$$\triangleright : \mathbb{k}_{par}(H) \otimes M \longrightarrow M,$$

$$\xi \otimes m \longmapsto \xi \triangleright m$$

a estrutura de $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulo, então

$$\blacktriangleright : \mathbb{k}_{par}(G) \otimes M \longrightarrow M$$

é definida como sendo $\zeta \blacktriangleright m = \bar{\pi}(\zeta) \triangleright m$.

Concretamente, suponha $a^t \in G$ e $m \in M$. Então $[a^t] \in \mathbb{k}_{par}(G)$. A afirmação acima nos diz que $[a^t] \blacktriangleright m = [a^{tp^{n-m}}]_H \triangleright m$ define a ação de $\mathbb{k}_{par}(G)$ sobre M , se \triangleright é a ação de $\mathbb{k}_{par}(H)$ sobre M .

Consideremos $X \in \mathcal{P}_e(H)$. Seja $H_X = K$ o grupo de isotropia de X em H , então $K \leq H$, digamos $K = \langle a^{p^{n-l}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^l}$, com $l \leq m \leq n$ (podemos supor s.p.g., $l < m < n$).

Veja que, se $a^{tp^{n-l}}$ é um elemento de K , então $a^{tp^{n-l}} = (a^{tp^{n-m}})^{p^{m-l}} \in H$. Assim,

$$K = \langle a^{p^{n-l}} \rangle = \langle (a^{p^{n-m}})^{p^{m-l}} \rangle \subseteq H.$$

Além disso, sendo K o grupo de isotropia de X , então

$$X = K \cup \left(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} a^{ip^{n-m}} K \right),$$

em que $\mathfrak{J} \subseteq \{1, \dots, p^{m-l} - 1\}$.

Considere ω como sendo uma p^l -ésima raiz da unidade,

$$\omega^{p^l} - 1 = 0,$$

com $\omega \in \mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$.

Seja $M_X = \text{span}_{\mathbb{k}}\{P_{hX} \mid h \in H, h^{-1} \in X\}$, então

$$M = M_X \otimes \mathbb{k}_\omega$$

é um $\mathbb{k}_{\text{par}}(H)$ -módulo simples via a seguinte ação.

Seja $\left[a^{tp^{n-m}} \right]_H \in \mathbb{k}_{\text{par}}(H)$ e $P_{a^{sp^{n-m}}X} \otimes 1 \in M$, então

$$\left[a^{tp^{n-m}} \right]_H \triangleright (P_{a^{sp^{n-m}}X} \otimes 1) = \begin{cases} P_{a^{rp^{n-m}}X} \otimes \omega^q, & \text{se } a^{-rp^{n-m}} \in X, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.1)$$

em que $t + s = qp^{m-l} + r$, $0 \leq r < p^{m-l}$. Repare que se \mathfrak{J} tem v elementos, então a componente conexa associada ao módulo $M = M_X \otimes \mathbb{k}$ tem $v + 1$ vértices.

Segue de Lema 4.2, que para qualquer $[a^t] \in \mathbb{k}_{\text{par}}(G)$, e todo $P_{a^{sp^{n-m}}X} \otimes 1 \in M$, a aplicação

$$[a^t] \blacktriangleright (P_{a^{sp^{n-m}}X} \otimes 1) = [a^{tp^{n-m}}]_H \triangleright (P_{a^{sp^{n-m}}X} \otimes 1) \quad (4.2)$$

faz de M um $\mathbb{k}_{\text{par}}(G)$ -módulo (\triangleright definido em (4.1)).

Queremos mostrar agora que o $\mathbb{k}_{\text{par}}(H)$ -módulo simples $M = M_X \otimes \mathbb{k}_\omega$, que é um $\mathbb{k}_{\text{par}}(G)$ -módulo via o morfismo $\bar{\pi}$ (que induz o funtor \mathfrak{M}), é isomorfo a um módulo simples $N = M_Y \otimes \mathbb{k}_{\hat{\omega}}$, com $Y \in \mathcal{P}_e(G)$.

$$\mathbb{k}_{\text{par}}(H)\mathcal{M} \xrightarrow{\mathfrak{M}} \mathbb{k}_{\text{par}}(G)\mathcal{M}$$

$$M = M_X \otimes \mathbb{k}_\omega \longmapsto \mathfrak{M}(M) \cong M_Y \otimes \mathbb{k}_{\hat{\omega}}$$

De fato, se X é como anteriormente, isto é, $X \in \mathcal{P}_e(H)$ e $H_X = K \cong \mathbb{Z}_{p^l}$, então

$$\varphi^{-1}(K) = \langle a^{p^{m-l}} \rangle = \langle a^{p^{n-(n-m+l)}} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^{n-m+l}}.$$

Para provar a igualdade $\varphi^{-1}(K) = \langle a^{p^{m-l}} \rangle$, veja que

\subseteq) Se $a^x \in \varphi^{-1}(K)$, então $\varphi(a^x) = a^{xp^{n-m}} \in K$, isto é,

$$a^{xp^{n-m}} = a^{yp^{n-l}},$$

para algum y tal que $0 \leq y \leq p^l - 1$. Donde,

$$a^x = (a^{xp^{n-m}})^{p^{-(n-m)}} = (a^{yp^{n-l}})^{p^{-(n-m)}} = a^{yp^{m-l}} \in \langle a^{p^{m-l}} \rangle,$$

ou seja, $\varphi^{-1}(K) \subseteq \langle a^{p^{m-l}} \rangle$.

\supseteq) Reciprocamente, se $a^{xp^{m-l}} \in \langle a^{p^{m-l}} \rangle$ então

$$\varphi(a^{xp^{m-l}}) = (a^{xp^{m-l}})^{p^{n-m}} = a^{xp^{n-m+m-l}} = a^{xp^{n-l}} \in K,$$

ou seja, $\langle a^{p^{m-l}} \rangle \subseteq \varphi^{-1}(K)$.

Escreva, $L := \varphi^{-1}(K) = \mathbb{Z}_{p^{n-m+l}}$. Se

$$X = K \cup \left(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} a^{ip^{n-m}} K \right),$$

em que $\mathfrak{J} \subseteq \{1, \dots, p^{m-l} - 1\}$, defina Y como sendo

$$Y = L \cup \left(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} a^i L \right).$$

(Observe que $p^{m-l} = p^{n-(n-m+l)}$). Então $Y \in \mathcal{P}_e(G)$ e o grupo de isotropia de Y em G , G_Y , é exatamente L .

Precisamos agora fixar uma raiz p^{n-m+l} -ésima da unidade $\widehat{\omega}$. Observe que se $\omega^{p^l} = 1$ então

$$\omega^{p-m+l} = (\omega^{p^l})^{p^{n-m}} = 1.$$

Então ω definida anteriormente como a raiz p^l -ésima da unidade que definia o objeto

$$M_{(H,\omega)} = M_H \otimes \mathbb{k}_\omega \in \mathbb{k}_{par} H \mathcal{M}$$

é também uma p^{n-m+l} -ésima raiz da unidade e, por isso, escolhemos $\widehat{\omega} = \omega$.

Seja $M_Y = \text{span}_{\mathbb{k}}\{P_g Y \mid g \in G, g^{-1} \in Y\}$, então

$$N = M_Y \otimes \mathbb{k}_\omega$$

é um $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulo simples via a seguinte ação.

Seja $[a^t] \in \mathbb{k}_{par}(G)$ e $P_{a^s Y} \otimes 1 \in N$, então

$$[a^t] \cdot P_{a^s Y} \otimes 1 = \begin{cases} P_{a^r Y} \otimes \omega^q, & \text{se } a^{-r} \in Y, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $t + s = qp^{m-l} + r$, $0 \leq r < p^{m-l}$.

Considere a aplicação

$$f : M_X \otimes \mathbb{k}_\omega \longrightarrow M_Y \otimes \mathbb{k}_\omega$$

como sendo

$$P_{a^t p^{n-m}} \otimes 1 \longmapsto P_{a^t Y} \otimes 1.$$

Devemos provar agora que esta aplicação é um isomorfismo. De fato, observe primeiro que para qualquer $a^t \in G$, e $P_{a^{sp^{n-m}} X} \otimes 1 \in M_X \otimes \mathbb{k}_\omega$ então

$$\begin{aligned} f([a^t] \blacktriangleright P_{a^{sp^{n-m}} X} \otimes 1) &= f([a^t p^{n-m}]_H \triangleright P_{a^{sp^{n-m}} X} \otimes 1) \\ &= f(P_{a^{rp^{n-m}} X} \otimes \omega^q) \\ &= \begin{cases} f(P_{a^{rp^{n-m}} X} \otimes \omega^q), & \text{se } a^{-rp^{n-m}} \in X, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

com $t + s = qp^{m-l} + r$,

$$= \begin{cases} P_{a^r Y} \otimes \omega^q, & \text{se } a^{-rp^{n-m}} \in X, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} [a^t] \cdot f(P_{a^{sp^{n-m}} X} \otimes 1) &= [a^t] \cdot P_{a^s Y} \otimes 1 \\ &= \begin{cases} P_{a^r Y} \otimes \omega^q, & \text{se } a^{-r} \in Y, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \end{aligned}$$

pois $t + s = qp^{m-l} + r$. Aqui, temos o seguinte,

$$a^{-rp^{n-m}} \in X \iff a^{-r} \in Y,$$

pois se $a^{-rp^{n-m}} \in X$ então $a^{-rp^{n-m}} \in K \cup \left(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} a^i p^{n-m} K \right)$.

No caso de $a^{-rp^{n-m}} \in K$, então $\varphi(a^{-r}) \in K$, logo $a^{-r} \in \varphi^{-1}(K) = L \subseteq Y$. No caso de $a^{-rp^{n-m}} \in \bigcup_{i \in \mathfrak{J}} a^i p^{n-m} K$, então existe um $i \in \mathfrak{J}$ tal que $a^{-rp^{n-m}} \in a^i p^{n-m} K$, donde

$$a^{-rp^{n-m}} a^{-ip^{n-m}} = a^{(-r-i)p^{n-m}} = \varphi(a^{-r-i}) \in K,$$

logo

$$\begin{aligned} a^{-r-i} &\in \varphi^{-1}(K) = L \\ a^{-r} &\in a^i L, \end{aligned}$$

para algum $i \in \mathfrak{J}$, ou seja $a^{-r} \in Y$. Portanto, f é um morfismo de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos.

Escreva $M = M_X \otimes \mathbb{k}_\omega$ e $N = M_Y \otimes \mathbb{k}_\omega$. Para mostrar que f é um isomorfismo, basta mostrar que M é simples como $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulo. Como M é um $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulo

simples, então qualquer elemento de M gera ele como $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulo. Assim, tome um elemento qualquer $m_0 = P_{a^{sp^{n-m}} X} \otimes 1$ em M , então

$$\begin{aligned} M &= \{[a^{tp^{n-m}}]_H \triangleright m_0 \mid [a^{tp^{n-m}}]_H \in \mathbb{k}_{par}(H)\} \\ &= \{\bar{\varphi}([a^t]) \triangleright m_0 \mid [a^{tp^{n-m}}]_H \in \mathbb{k}_{par}(H)\} \\ &= \{[a^t] \blacktriangleright m_0 \mid [a^t] \in \mathbb{k}_{par}(G)\}. \end{aligned}$$

A última igualdade segue de $\bar{\varphi}$ ser sobrejetiva, pois os elementos de $\mathbb{k}_{par}(G)$ agindo sobre M são exatamente os elementos da imagem de $\bar{\varphi}$. Como m_0 foi tomado arbitrariamente segue que M é gerado por qualquer elemento como $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulo, então é simples. Assim, o Lema de Schur garante que f é um isomorfismo de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos, pois f é não nulo, sendo que $P_Y \otimes 1 = f(P_X \otimes 1)$ é em particular um elemento não nulo na imagem de f .

Para o caso mais geral, considere o grupo abeliano finito G tal que

$$G = \mathbb{Z}_{p_1}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}^{n_k} = \{a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k} \mid 0 \leq t_i \leq p_i^{n_i} - 1, i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Seja H um subgrupo de G , então

$$H = \{a_1^{s_1 p_1^{n_1 - m_1}} \cdots a_k^{s_k p_k^{n_k - m_k}} \mid 0 \leq s_i \leq p_i^{m_i} - 1, i \in \{1, \dots, k\}\} \cong \mathbb{Z}_{p_1}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}^{m_k},$$

com $m_i \leq n_i$, para todo i . Considere $X \in \mathcal{P}_e(H)$ com grupo de isotropia K . Como K é um subgrupo de H , então

$$K = \{a_1^{x_1 p_1^{n_1 - l_1}} \cdots a_k^{x_k p_k^{n_k - l_k}} \mid 0 \leq x_i \leq p_i^{l_i} - 1, i \in \{1, \dots, k\}\} \cong \mathbb{Z}_{p_1}^{l_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}^{l_k},$$

com $l_i \leq m_i \leq n_i$. Seja $\omega_i \in \mathbb{k}$ tal que $\omega_i^{p_i^{l_i}} - 1 = 0$, com $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Então $M_X = \text{span}_{\mathbb{k}}\{P_{hX} \mid h \in H, h^{-1} \in X\}$ é um \mathbb{k}_{par} -módulo simples via

$$\begin{aligned} [a_1^{t_1 p_1^{n_1 - m_1}} \cdots a_k^{t_k p_k^{n_k - m_k}}]_H \triangleright \left(P_{\substack{s_1 p_1^{n_1 - m_1} \\ a_1}} \cdots P_{\substack{s_k p_k^{n_k - m_k} \\ a_k}} \otimes 1 \right) \\ = P_{\substack{r_1 p_1^{n_1 - m_1} \\ a_1}} \cdots P_{\substack{r_k p_k^{n_k - m_k} \\ a_k}} \otimes \omega_1^{q_1} \cdots \omega_k^{q_k}, \end{aligned}$$

onde $t_i + s_i = q_i p_i^{m_i - l_i} + r_i$.

Escreva

$$X = K \cup \left(\bigcup_{i \in \mathfrak{J}} a_1^{s_{1i} p_1^{n_1 - m_1}} \cdots a_k^{s_{ki} p_k^{n_k - m_k}} K \right),$$

onde $0 \leq s_{ji} \leq p_i^{m_i - l_i} - 1$. Considere o morfismo $\varphi : G \rightarrow H$ como sendo

$$\varphi(a_1^{t_1} \cdots a_k^{t_k}) = a_1^{t_k p_k^{n_k - m_k}}.$$

Assim, $L = \varphi^{-1}(K) = \mathbb{Z}_{p_1}^{n_1 - m_1 + l_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_k}^{n_k - m_k + l_k}$. Logo, temos o seguinte morfismo

$$f : M_X \otimes \mathbb{k}_{\omega_1, \dots, \omega_k} \rightarrow M_Y \otimes \mathbb{k}_{\omega_1, \dots, \omega_k}$$

definido por

$$P_{a_1^{s_1 p^{n_1 - m_1}} \dots a_k^{s_k p^{n_k - m_k}}} \otimes 1 \mapsto P_{a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}} Y \otimes 1,$$

que resulta ser um isomorfismo de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos. Com isto, terminamos de descrever o funtor \mathfrak{M} . Que $\mathfrak{M}(\phi) : M_Y \otimes \mathbb{V} \rightarrow M'_Y \otimes \mathbb{W}$ seja um morfismo de $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos sai direto da definição de \mathfrak{M} , para qualquer $\phi : M_X \otimes \mathbb{V} \rightarrow M'_X \otimes \mathbb{W}$ morfismo de $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulos. Ou seja, temos o seguinte diagrama comutando:

$$\begin{array}{ccc} M_X \otimes \mathbb{V} & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & M_Y \otimes \mathbb{V} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \mathfrak{M}(\phi) \\ M_{X'} \otimes \mathbb{W} & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & M_{Y'} \otimes \mathbb{W}. \end{array}$$

□

Nas condições do teorema anterior, temos o seguinte colorário.

Colorário 4.5. *O funtor da Matryoshka $\mathfrak{M} : \mathbb{k}_{par}(H)\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}$ é injetivo nos objetos, fiel, aditivo e monoidal.*

Demonstração. A aditividade do funtor segue direto, pois da semissimplicidade da categoria, se $M \in \mathbb{k}_{par}(H)$ então podemos escrever

$$M = \bigoplus_{(X_i, \omega_i)} n_i M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi_i},$$

em que $\pi_i = (\omega_1 \dots \omega_n)$. Portanto, da definição de \mathfrak{M} temos que

$$\mathfrak{M}(M) = \bigoplus n_i M_{Y_i} \otimes \mathbb{k}_{\hat{\omega}_i} \cong \bigoplus_{(X_i, \omega_i)} n_i M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi_i} = M,$$

como $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos.

Vamos ver agora a monoidalidade. Sejam $M_X \otimes \mathbb{k}_\pi$ e $M_{X'} \otimes \mathbb{k}_\sigma$ dois $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulos, em que $\pi : H \rightarrow \text{GL}(\mathbb{k}_\pi)$ e $\sigma : H \rightarrow \text{GL}(\mathbb{k}_\sigma)$ são representações irredutíveis de H (módulos simples sobre grupos abelianos são unidimensionais pelo *Lema de Schur*). Então, temos

$$\mathfrak{M}(M_X \otimes \mathbb{k}_\pi) = M_Y \otimes \mathbb{k}_\pi$$

e,

$$\mathfrak{M}(M_{X'} \otimes \mathbb{k}_\sigma) = M_{Y'} \otimes \mathbb{k}_\sigma,$$

definidos como anteriormente. Logo,

$$\mathfrak{M}((M_X \otimes \mathbb{k}_\pi) \boxtimes (M_{X'} \otimes \mathbb{k}_\sigma)) = \mathfrak{M}([X \sim X'] M_X \otimes \mathbb{k}_{\pi\sigma})$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(M_X \otimes \mathbb{V}) \boxtimes \mathfrak{M}(M_{X'} \otimes \mathbb{W}) &= (M_Y \otimes \mathbb{V}) \odot (M_{Y'} \otimes \mathbb{W}) \\ &= \llbracket Y \sim Y' \rrbracket M_Y \otimes \mathbb{k}^{\pi\sigma} \end{aligned}$$

Resta provar que

$$\llbracket X \sim X' \rrbracket \Leftrightarrow \llbracket Y \sim Y' \rrbracket.$$

Mas isto segue de duas sentenças, a primeira é a definição da relação $X \sim X' \Leftrightarrow hX = X'$ para algum $h \in H$, ver página 98. A segunda é, se H_X é o grupo de isotropia de X em H , então $X = H_X \cup (\cup a^{t_i p^{n-m}} H_X)$.

Portanto, \mathfrak{M} é monoidal.

A injetividade nos objetos também segue direto. Suponha M e N tais que

$$\mathfrak{M}(M) \cong \mathfrak{N},$$

como $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos. Então $M \cong N$ como $\mathbb{k}_{par}(G)$ e portanto, são isomorfos como $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulos.

Para provar que \mathfrak{M} é fiel. Considere $f : M \rightarrow N$ um morfismo de $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulos. Então,

$$f : \bigoplus M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi_i} \rightarrow N,$$

assim, $f = \bigoplus f|_{M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi}}$. Suponha $g : M \rightarrow N$ em $\mathbb{k}_{par}(H)\mathcal{M}$ tal que $f \neq g$ como morfismos de $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulos. Então existe $M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi}$ uma componente simples tal que

$$f|_{M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi}} \text{ é injetiva e, } g|_{M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\pi}} \text{ é nula.}$$

Mas, se

$$\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M}(g) : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}(N)$$

para toda componente simples, ou seja,

$$\mathfrak{M}(f)|_{M_{Y_i} \otimes \mathbb{k}_{\hat{\pi}}} = \mathfrak{M}(g)|_{M_{Y_i} \otimes \mathbb{k}_{\hat{\pi}}},$$

para todo i . Mas isto implica que

$$f|_{M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\hat{\pi}}} = g|_{M_{X_i} \otimes \mathbb{k}_{\hat{\pi}}}.$$

E disto, temos a injetividade do funtor \mathfrak{M} . □

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início, este trabalho teve como objetivo estudar a categoria de representações parciais de um grupo finito G . Uma das questões iniciais, levantada já no projeto de qualificação, era como relacionar as representações parciais de um grupo com as representações parciais dos seus subgrupos, e se seria possível generalizar essa relação. Mais especificamente, investigamos a existência um funtor não trivial que mapeasse a categoria dos $\mathbb{k}_{par}(H)$ -módulos na categoria dos $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos, e se tal construção poderia ser feita para qualquer grupo. No intuito de resolver e comprovar esses questionamentos, começamos estudar as representações parciais para grupos finitos e a estrutura monoidal de módulos sobre a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$. Essa foi a primeira aproximação para abordar a questão, o que também nos levou a estudar a seguinte equivalência categórica

$$\left(\mathbb{k}_{par}(G)\mathcal{M}, \otimes_{\mathcal{A}_{par}}, \mathcal{A}_{par} \right) \cong \left(\mathbb{k}\Gamma(G)\mathcal{M}, \boxtimes, \mathcal{A}_{\Gamma} \right)$$

Neste ponto, surgiu um dos maiores desafios, pois estudar essa equivalência exigiu estudar diferentes estruturas que, embora conhecidas, muitas vezes são tratadas de forma independente. Por exemplo, é conhecido o fato de que $\mathbb{k}_{par}(G) \cong \mathbb{k}\Gamma(G)$ como álgebras quando G é um grupo finito, (1.5), mas esse isomorfismo também é um isomorfismo de Hopf algebróides, Teorema 3.1, e, com isto, pensarmos na categoria dos módulos sobre um Hopf algebróide trouxe consigo estudar em detalhe a sua estrutura monoidal, e entender os produtos tensoriais.

A heurística deste assunto todo foi desenvolvida estudando caso por caso e exemplos específicos. Durante essa investigação, percebemos que a álgebra $\mathbb{k}_{par}(G)$, quando vista por meio da álgebra do grupóide associado $\mathbb{k}\Gamma(G)$, contém todas as representações do tipo global (no sentido clássico) dos seus subgrupos, o que pôde ser visualizado nos vértices do grupóide. Neste sentido, foi o que motivou o nome de Árvore de Natal, pois geometricamente as representações desses subgrupos pareciam estar “penduradas” quando feito o grupóide do grupo.

Logo, surge o teorema da Matryoshka, que conseguimos fazer graças a decomposição do grupo abeliano finito G , A.1, pois podemos descrever de forma geral os elementos de um grupo, os seus subgrupos e os quocientes, tudo em função dos geradores do próprio grupo G . Este teorema da Matryoshka é visualizado não só na forma geométrica, pois podem haver várias componentes conexas “geometricamente” parecidas. Aqui o estudo das representações parciais é muito importante, sendo que para grupos abelianos conseguimos enxergar que as isotropias que aparecem no grupóide associado a G são as representações irredutíveis dos subgrupos, que também são abelianos, logo, são todas unidimensionais e portanto, todas são isomorfas ao corpo como espaço vetorial.

Ainda em relação ao Teorema da Matryoshka, destacamos que a hipótese de que o corpo seja algebricamente fechado é necessário para garantir que todas as raízes da unidade estejam em \mathbb{k} . Essas raízes correspondem às representações irredutíveis do grupo

de isotropia de cada vértice. Isto de fato é importante para provarmos que o funtor é fiel, pois caso contrário, teríamos álgebras de divisão sobre o corpo base. A hipótese da característica zero também nos garante que a álgebra seja semissimples, um fato fundamental utilizado na demonstração do Teorema da Matryoshka.

Mas, se o grupo não for abeliano, por exemplo, poderíamos obter uma representação irreduzível de tamanho maior, logo o produto tensorial ficaria muito difícil de fazer. Mesmo assim, é interessante e desafiador pensarmos o que aconteceria com grupos abelianos finitos conhecidos e já muito explorados, como por exemplos o grupo S_3 ou S_4 .

Conseguiríamos mapear a categoria dos $\mathbb{k}_{par}(S_3)$ -módulos na categoria $\mathbb{k}_{par}(S_4)$ -módulos através de uma relação funtorial?

Outra pergunta que foi inicialmente levantada é se ao estudarmos a categoria dos $\mathbb{k}_{par}(G)$ -módulos, e analisarmos a 2-categoria das categorias módulo sobre a mesma, como seria a sua estrutura e quais propriedades poderíamos extrair dela?

Como matemático e como algebrista, estudar diferentes estruturas e as suas relações com outras é um grande desafio. Mergulhar por diferentes cenários, como no caso indo de grupos para categorias, de representações globais para representações parciais, fez com que enriquecesse e amadurecesse as ideias. Muitas questões ainda ficaram em aberto e espero que, este trabalho, seja apenas o começo dessa longa jornada como pesquisador.

REFERÊNCIAS

- [1] F. Abadie. “Dilations of interaction groups that extend actions of ore semigroups”. *Em: J. Aust. Math. Soc.* 104 (2018), pp. 145–161.
- [2] F. Abadie. “Sobre ações parciais, fibrados de Fell, e grupóides”. Tese de dout. Universidade de São Paulo, 1999.
- [3] M. M. S. Alves, E. Batista e J. Vercruyssen. “Dilations of partial representations of Hopf algebras”. *Em: Journal of the London Mathematical Society-second series* 100 (2019), pp. 1–28.
- [4] M. M. S. Alves, E. Batista e J. Vercruyssen. “Partial representations of Hopf algebras”. *Em: Journal of Algebra* 426 (2015), pp. 137–187.
- [5] E. Batista. “Partial actions: What they are and why we care”. *Em: Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin* 24 (2016).
- [6] G. Böhm. “An alternative notion of Hopf Algebroid”. *Em: Hopf Algebras in Non-commutative Geometry and Physics* (2003).
- [7] G. Böhm. *Hopf algebras and their generalizations from a category theoretical point of view*. Switzerland: Lecture Notes in Mathematics 2226, 3a. ed. Springer, 2018.
- [8] G. Böhm. “Hopf Algebroids”. *Em: Handbook of Algebra* 6 (2009). Ed. por M. Hazewinkel, pp. 173–235.
- [9] G. Böhm, F. Nill e K. Szlachányi. “Weak Hopf Algebras: I. Integral Theory and C-Structure”. *Em: Journal of Algebra* 221 (1998), pp. 385–438.
- [10] G. Böhm e K. Szlachányi. “Weak Hopf Algebras: II. Representation Theory, Dimensions, and the Markov Trace”. *Em: Journal of Algebra* 233 (1999), pp. 156–212.
- [11] T. Brzezinski e R. Wisbauer. *Corings and Comodules*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 2003.

- [12] M. D’Adderio, W. Hautekiet, P. Saracco e J. Vercauteren. “Partial and Global Representations of Finite Groups”. *Em: Algebr Represent Theor* 26 (2023), pp. 1371–1414.
- [13] S. Dascalescu, C. Nastasescu e S. Raianu. *Hopf Algebra: An Introduction*. 1 Ed. Taylor & Francis Inc., 2000.
- [14] M. Dokuchaev e R. Exel. “Associativity of Crossed Products by Partial Actions, Enveloping Actions and Partial Representations”. *Em: Transactions of the American Mathematical Society* 357.5 (2005), pp. 1931–1952.
- [15] M. Dokuchaev, R. Exel e P. Piccione. “Partial representations and partial group algebras”. *Em: Journal of Algebra* 226.1 (2000), pp. 505–532.
- [16] M. Dokuchaev, H. Lima e H. Pinedo. “Partial representations and their domains”. *Em: The Rocky Mountain Journal of Mathematics* 47.8 (2017), pp. 2565–2604.
- [17] M. Dokuchaev e F. C. Polcino Milies. “Isomorphisms of partial group rings”. *Em: Glasgow Mathematical Journal* 46.1 (2004), pp. 161–168.
- [18] M. Dokuchaev e N. Zhukavets. “On finite degree partial representations of groups”. *Em: Journal of Algebra* 274.1 (2004), pp. 309–334.
- [19] D. Dummit e R. Foote. *Abstract Algebra*. 3 Ed. John Wiley & Sons, Inc, 2004.
- [20] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych e V. Ostrik. *Tensor Categories*. American Mathematical Society, 2015.
- [21] R. Exel. “Partial Actions of Groups and Actions of Inverse Semigroups”. *Em: Proceedings of the American Mathematical Society* 126.12 (1998), pp. 3481–3494.
- [22] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer Science & Business Media, 1971.
- [23] M. Mombelli. *Una introducción a las categorías tensoriales y sus representaciones*. Notas de aula.
- [24] R. D. Morais da Silva. “Hopf Algebróides”. Diss. de mest. Florianópolis: Matemática Pura e Aplicada/Universidade Federal de Santa Catarina, 2016.

-
- [25] V. Ostrik. “Module categories, weak Hopf algebras and modular invariants”. *Em: Transformation Groups* 8 (2003), pp. 177–206.
- [26] D. R. Pansera. “Álgebras de Hopf fracas: teoremas de dualidade e de Maschke”. Diss. de maestr. Florianópolis: Matemática Pura e Aplicada/Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.
- [27] E. Riehl. *Category Theory in Context*. Courier Dover Publications, 2016.
- [28] P. Schauenburg. “Weak Hopf algebras and quantum groupoids”. *Em: Noncommutative geometry and quantum groups* 61 (2003), pp. 171–188.

APÊNDICE A – TEOREMA DOS GRUPOS ABELIANOS FINITOS

É de conhecimento geral o seguinte resultado, e pode ser consultado em qualquer livro que trate estruturas algébricas, teoria de grupos ou classificação de grupos abelianos finitos. Em particular, pode consultar [19].

Teorema A.1. *Seja G um grupo abeliano de ordem $n > 1$. Considere a fatoração única de n em potências de primos distintos como segue*

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}.$$

Então,

a) $G \cong A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, onde $|A_i| = p_i^{\alpha_i}$.

b) Para cada $A \in \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ com $|A| = p^\alpha$

$$A \cong \mathbb{Z}_{p^{\beta_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{\beta_t}},$$

com $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_t \geq 1$ e $\beta_1 + \cdots + \beta_t = \alpha$, onde t e $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ dependem de i .

c) A decomposição em a) e b) é única, isto é, se

$$G \cong B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m,$$

com $|B_i| = p_i^{\alpha_i}$ para todo i então $B_i \cong A_i$ e B_i e A_i têm os mesmos fatores invariantes.

APÊNDICE B – EXEMPLOS

No que segue, apresento de forma mais detalhada como foi desenvolvida na prática a construção de alguns grupóides para grupos finitos. Devo avisar que as notações contidas aqui podem diferir com as notações ao longo do trabalho, pois este apêndice busca apenas mostrar uma pequena parte do laboratório experimental de um matemático.

Em particular, começo com grupos de ordem prima, pois não vamos ter subgrupos não triviais. E depois realizo para grupos de ordem p^n e pq com p e q primos não necessariamente diferentes. As contas realizadas neste apêndice foram feitas muito antes de chegar de fato nos resultados que procurávamos e foram provados na tese, por isso, pretende ser um apoio para quem se interessar em tentar entender como foi encontrado o “padrão” entre a categoria de representações parciais de um grupo finito G e a da categoria de representações parciais dos seus subgrupos o que motivou o Teorema da Árvore de Natal e o Teorema da Matryoshka.

Alguns algoritmos também foram implementados baseados nestes exemplos, e é por isso que algumas notações são usadas exclusivamente aqui. Começemos então considerando o grupo $G = \mathbb{Z}_p$, com p primo.

O caso $G = \mathbb{Z}_p$ com p um número primo

Se A é um vértice de uma componente conexa Σ^m , com $A \neq G$, então $G_A = \{e\}$, pois G não possui subgrupos não triviais. Obtemos assim $\frac{1}{m} \binom{|G|-1}{m-1} =: k_m$ componentes conexas diferentes com m -vértices. Portanto temos,

- 1 : Uma representação parcial irredutível associada à componente conexa com um vértice $A = \{e\}$ que denotamos por $M_{\{e\}}$. Segue do Teorema 3.4 que $M_{\{e\}} = M_{\{e\}} \otimes \mathbb{k}$. Portanto,

$$M_{\{e\}} \boxtimes M_A = \begin{cases} M_{\{e\}} & ; \text{ se } A = \{e\} \\ 0 & ; \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- 2 : As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com 2-vértices. Cada representação será denotada por

$$M_{X_i},$$

em que X_i denota o vértice $\{e, g^i\}$, e $k_2 = \frac{1}{2} \binom{|G|-1}{2-1} = \frac{|G|-1}{2}$ denota o número de componentes conexas distintas com 2-vértices. Pelo visto anteriormente,

$$M_{X_i} = M_{X_{p-i}},$$

pois $X_i \sim X_{p-i}$ sendo que $X_i = g^i X_{p-i}$. Logo,

$$M_{X_i} \otimes \mathbb{k} \cong M_{X_i} = M_{X_{p-i}} \cong M_{X_{p-i}} \otimes \mathbb{k}.$$

Onde M_{X_i} é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \pi_{X_i} : \quad \mathbb{Z}_p &\longrightarrow M_2(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_2 \\ g^i &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{p-i} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^t &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

com $t \in \{1, \dots, p-1\} \setminus \{i, p-i\}$.

A representação π_{X_i} refere-se à seguinte componente conexa

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overset{e}{\curvearrowright} \\ X_i \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{g^{p-i}} \\ \xleftarrow{g^i} \end{array} & \begin{array}{c} \overset{e}{\curvearrowright} \\ X_{p-i} \end{array} \end{array}$$

Ou seja, $g^i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ não zera a “primeira fila” e “segunda coluna”, logo nos indica que o elemento g^i está no vértice base (primeiro vértice-primeira fila não nula), e há uma flecha no sentido “segunda coluna $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ primeira fila” e “segundo vértice $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$ vértice base”.

Note que as representações π_{X_i} e $\pi_{X_{p-i}}$ “são a mesma”. Por exemplo, a aplicação π_{X_3} em \mathbb{Z}_7 é a representação parcial

$$\begin{aligned} \pi_{X_3} : \quad \mathbb{Z}_7 &\longrightarrow M_2(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_2 \\ g^3 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^4 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^t &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

com $t \in \{1, 2, 5, 6\}$. Essa representação refere-se à componente conexa

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \overset{e}{\curvearrowright} \\ \{e, g^3\} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{g^4} \\ \xleftarrow{g^3} \end{array} & \begin{array}{c} \overset{e}{\curvearrowright} \\ \{e, g^4\} \end{array} \end{array}$$

Por outro lado, a representação associada a X_4 seria dada por,

$$\begin{aligned} \pi_{X_4} : \quad \mathbb{Z}_7 &\longrightarrow M_2(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_2 \\ g^4 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^3 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^t &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

com $t \in \{1, 2, 5, 6\}$, que se refere à mesma componente conexa. Logo $M_{X_3} = M_{X_4}$, pois carregam a mesma informação.

Segue que,

$$M_{X_i} \boxtimes M_{X_j} = \llbracket X_i \sim X_j \rrbracket M_{X_i} = \begin{cases} M_{X_i}, & \text{se } j = p - i; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3 : As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com 3-vértices. Cada representação será denotada por

$$M_{X_{i,j}},$$

com $i < j$, em que $X_{i,j}$ denota o vértice $\{e, g^i, g^j\}$, e $k_3 = \frac{1}{3} \binom{|G|-1}{3-1}$ denota o número de componentes conexas distintas com 3-vértices. Considere $\text{spg } X_{i,j}$ “lexicograficamente” o menor vértice da componente conexa que o contém. Tal vértice será o nosso “vértice base”. Veja que,

$$M_{X_{i,j}} = M_{X_{p-i,j-i}} = M_{X_{\overline{i-j}, p-j}}$$

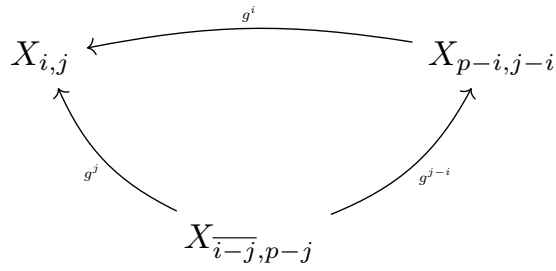
pois $X_{i,j} \sim X_{p-i,j-i} \sim X_{\overline{i-j}, p-j}$ (aqui $\overline{i-j} = p - (j - i)$), sendo que

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= g^i X_{p-i,j-i} \\ &= g^j X_{\overline{i-j}, p-j}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_{X_{i,j}} \otimes \mathbb{k} &\cong M_{X_{i,j}} \\ &= M_{X_{p-i,j-i}} \cong M_{X_{p-i,j-i}} \otimes \mathbb{k} \\ &= M_{X_{\overline{i-j}, p-j}} \cong M_{X_{\overline{i-j}, p-j}} \otimes \mathbb{k}. \end{aligned}$$

A componente conexa que contém os 3-vértices é

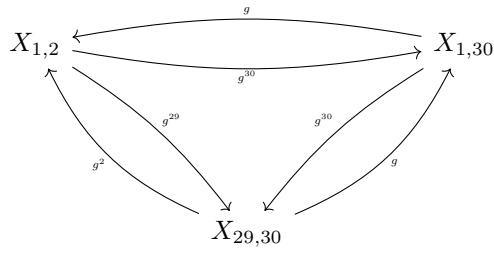


Se $i \neq j \neq p - i \neq j - i \neq p - j \neq \overline{i - j}$, então $M_{X_{i,j}}$ é dado pela aplicação

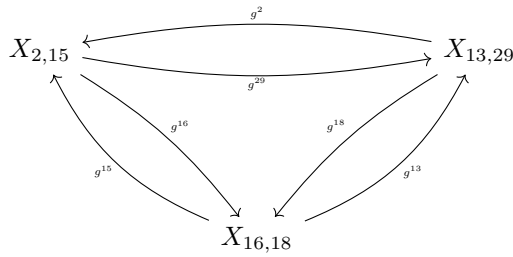
$$\begin{aligned} \pi_{X_{i,j}} : \quad \mathbb{Z}_p &\longrightarrow M_3(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_3 \\ \\ g^i &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ g^j &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ g^{p-i} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ g^{j-i} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ g^{\overline{i-j}} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ g^{p-j} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e $g^t \mapsto 0$ para o resto. Mas pode acontecer que nem todos sejam diferentes, nesse caso temos mais de uma fila ou coluna não nulas. Ilustremos isto com um exemplo.

Considere o grupo $G = \mathbb{Z}_{31}$ e os vértices $X_{1,2}$ e $X_{2,15}$. Uma conta rápida nos permite ver que não existe k , $1 \leq k \leq 30$, tal que $X_{1,2} = g^k X_{2,15}$, ou $X_{2,15} = g^k X_{1,2}$, logo, são vértices de duas componentes conexas distintas, cada uma com 3 vértices. Note também que esses vértices já foram considerados sendo vértices bases, e as componentes conexas que os contém são respectivamente



e,



- Para a componente conexa $\Sigma_{X_{1,2}} = \{X_{1,2}, X_{30,1}, X_{30,29}\}$, a representação parcial é dada por

$$\begin{aligned} \pi_{X_{1,2}} : \mathbb{Z}_{31} &\longrightarrow M_3(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_3 \\ g &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^2 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{29} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{30} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Para a componente conexa $\Sigma_{X_{2,15}} = \{X_{2,15}, X_{29,13}, X_{18,16}\}$, a representação parcial

é dada por

$$\begin{aligned} \pi_{X_{2,15}} : \quad \mathbb{Z}_{31} &\longrightarrow M_3(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_3 \\ g^2 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{15} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{29} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{13} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{18} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^{16} &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, as filas nos indicam os vértices do grupóide associado à representação, e as colunas nos indicam os vértices donde provêm as flechas. Por exemplo, os elementos que pertencem ao vértice base são aqueles que na representação matricial, não zeram

$$\begin{aligned} \text{a primeira fila, ou seja, } X_{i_1, j_1} = \{e, g^{i_1}, g^{j_1}\} \text{ é o vértice base se } g^{i_1} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \text{ e} \\ g^{j_1} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}; X_{i_2, j_2} \text{ é o segundo vértice se } g^{i_2} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g^{j_2} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ * & * & 0 \end{bmatrix}; \\ X_{i_3, j_3} \text{ é o terceiro vértice se } g^{i_3} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } g^{j_3} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se temos $g^i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, quer dizer que o elemento g^i apenas aparece no vértice base

desta componente conexa com 3-vértices. Porém, se $g^i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ então o elemento g^i aparece no vértice base e no “segundo vértice”.

Por outro lado, as colunas nos indicam de qual vértice vêm as flechas, por exemplo, $g^i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$ além de indicar que g^i está no vértice base (primeiro vértice), também

nos indica que há uma flecha no sentido “segundo vértice \mapsto vértice base”, se tivermos $g^i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & * \\ * & * & 0 \end{bmatrix}$, temos a flecha no sentido “terceiro vértice \mapsto vértice base”.

Se por exemplo tivermos $g^i \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, isto nos indica que g^i está no vértice

base e também no segundo vértice, e que têm flechas no sentido “segundo vértice \mapsto primeira fila”, “terceira coluna \mapsto primeira fila”, “segunda fila \mapsto vértice base” e “terceiro vértice \mapsto segundo vértice”.

Por último, temos que,

$$M_{X_{i,j}} \boxtimes M_{X_{i',j'}} = \llbracket X_{i,j} \sim X_{i',j'} \rrbracket M_{X_{i,j}}$$

O que significa que, o produto é diferente de zero quando, $i' = p - i$ e $j' = j - i$, ou $i' = p - (j - i)$ e $j' = p - j$.

⋮

$n + 1$: As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com até $p - 1$ vértices. Seja $X_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \{e, g^{i_1}, g^{i_2}, \dots, g^{i_n}\}$ um vértice com $n + 1$ elementos, com $n \in \{1, \dots, p - 2\}$ e $i_r < i_{r+1}$, para todo r . Então

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sim X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1} \sim X_{\overline{i_1-i_2}, \overline{p-i_2}, \dots, \overline{i_n-i_2}} \sim X_{\overline{i_1-i_n}, \overline{i_2-i_n}, \dots, \overline{p-i_n}},$$

pois,

$$\begin{aligned} X_{i_1, i_2, \dots, i_n} &= g^{i_1} X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1} \\ &= g^{i_2} X_{\overline{i_1-i_2}, \overline{p-i_2}, \dots, \overline{i_n-i_2}} \\ &\vdots \\ &= g^{i_n} X_{\overline{i_1-i_n}, \overline{i_2-i_n}, \dots, \overline{p-i_n}}, \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade consideramos o vértice base (primeiro vértice) X_{i_1, i_2, \dots, i_n} , sendo lexicograficamente o menor de todos os vértices da componente conexa que o contém. Veja que temos $\frac{\binom{p-1}{n}}{n+1}$ módulos simples diferentes não isomorfos associados a vértices com $n + 1$ elementos, ou $\frac{\binom{p-1}{n}}{n+1}$ componentes conexas diferentes com $n + 1$ vértices.

A representação associada ao vértice X_{i_1, i_2, \dots, i_n} será denotada por

$$M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}.$$

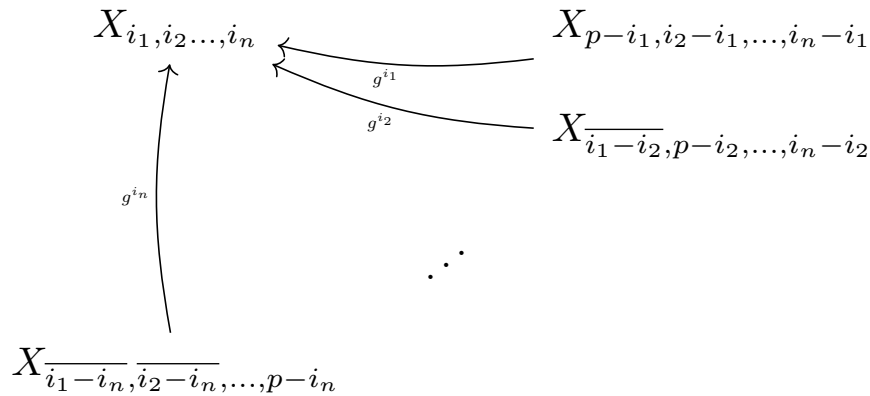
Segue-se que

$$M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}} = M_{X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}} = \dots = M_{X_{\overline{i_1-i_n, i_2-i_n}, \dots, p-i_n}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \otimes \mathbb{k} &\cong M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \\ &= M_{X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}} \cong M_{X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}} \otimes \mathbb{k} \\ &\vdots \\ &= M_{X_{\overline{i_1-i_n, i_2-i_n}, \dots, p-i_n}} \cong M_{X_{\overline{i_1-i_n, i_2-i_n}, \dots, p-i_n}} \otimes \mathbb{k}. \end{aligned}$$

A componente conexa que contém o nosso vértice base fica do tipo



Como o segundo vértice é $X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}$, depende da escolha do vértice base. Caso o vértice base seja escolhido de forma diferente, a obtenção dos outros vértices continua similar, mas deve-se tomar cuidado ao fazer as substrações, que são módulo p em todo momento.

No entanto, a representação independe da escolha da ordem dos vértices, seja qual for o vértice base ou o resto, pois como falado anteriormente, as representação resultam ser “as mesmas”.

Pela construção, $M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}$ é dado pela aplicação

$$\pi_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}} : \mathbb{Z}_p \longrightarrow M_{n+1}(\mathbb{k}),$$

em que $\pi_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}(g^t)$ não zerar a célula $(r \times s)$ nos indica que g^t está no r -ésimo vértice, e há uma flecha no sentido “ $\underbrace{\text{vértice } s}_{\text{coluna } s} \longrightarrow \underbrace{\text{vértice } r}_{\text{fila } r}$ ”.

Segue então que,

$$M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \boxtimes M_{X_{i'_1, i'_2, \dots, i'_n}} = \llbracket X_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sim X_{i'_1, i'_2, \dots, i'_n} \rrbracket M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}$$

p : As representações associadas à componente conexa



Logo, quando o vértice é o próprio grupo $G = \mathbb{Z}_p$, temos $M_G := M_G \otimes_{\mathbb{k}G} V_{\rho_i}$, ver 3.4, que denotaremos por $M_{(G, \rho_i)}$ em que os ρ_i 's identificam a representação irredutível V_{ρ_i} , que tem a ver com as representações irredutíveis de $\mathbb{k}G$, associadas às raízes da unidade.

Lembrando aqui que as representações associadas a \mathbb{Z}_p são determinadas pelas raízes p -éssimas da unidade, ou seja,

$$\begin{array}{ccccccc} \rho_1 : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_2 : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{k}^* , & \dots & \rho_{p-1} : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_p : \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{k}^* , & & \\ e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & \dots & e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & & \\ g \longmapsto 1 & g \longmapsto \omega & \dots & g \longmapsto \omega^{p-2} & g \longmapsto \omega^{p-1} & & \\ g^2 \longmapsto 1 & g^2 \longmapsto \omega^2 & \dots & g^2 \longmapsto \omega^{p-4} & g^2 \longmapsto \omega^{p-2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ g^{p-2} \longmapsto 1 & g^{p-2} \longmapsto \omega^{p-2} & \dots & g^{p-2} \longmapsto \omega^4 & g^{p-2} \longmapsto \omega^2 & & \\ g^{p-1} \longmapsto 1 & g^{p-1} \longmapsto \omega^{p-1} & \dots & g^{p-1} \longmapsto \omega^2 & g^{p-1} \longmapsto \omega & & \end{array}$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$.

Por último, temos então que se A é um vértice de $\Gamma(G)$,

$$M_{(G, \rho_i)} \boxtimes M_A = \begin{cases} M_{(G, \rho_k)} & \text{se } A = G, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $M_A = M_{(G, \rho_j)}$, e $\rho_k(g^t) = \rho_i(g^t) \cdot \rho_j(g^t)$, $i, j, k \in \{1, \dots, p-1\}$. Neste caso temos que este produto se identifica com o produto em \mathbb{Z}_p .

Lembramos que nos referimos como “componentes conexas triviais” àquelas que se referem aos vértices $\{e\}$ e G .

Exemplo B.1. Seja $G = \mathbb{Z}_5 = \{e, g : g^5 = e\}$. Vimos que

$$\mathbb{k}_{par}(G) \cong \mathbb{k} \oplus 2M_2(\mathbb{k}) \oplus 2M_3(\mathbb{k}) \oplus M_4(\mathbb{k}) \oplus \mathbb{k}G,$$

e, $\mathcal{P}_e = \{\{e\}, \{e, g\}, \{e, g^2\}, \{e, g^3\}, \{e, g^4\}, \{e, g, g^2\}, \{e, g, g^3\}, \{e, g, g^4\}, \{e, g^2, g^3\}, \{e, g^2, g^4\}, \{e, g^3, g^4\}, \{e, g, g^2, g^3\}, \{e, g, g^2, g^4\}, \{e, g, g^3, g^4\}, \{e, g^2, g^3, g^4\}, G\}$, neste caso temos 5 componentes conexas não triviais:

- $\Sigma_{X_1} = \{\{e, g\}, \{e, g^4\}\};$
- $\Sigma_{X_2} = \{\{e, g^2\}, \{e, g^3\}\};$
- $\Sigma_{X_{1,2}} = \{\{e, g, g^2\}, \{e, g, g^4\}, \{e, g^3, g^4\}\};$
- $\Sigma_{X_{1,3}} = \{\{e, g, g^3\}, \{e, g^2, g^3\}, \{e, g^2, g^4\}\};$
- $\Sigma_{X_{1,2,3,4}} = \{\{e, g, g^2, g^3\}, \{e, g, g^2, g^4\}, \{e, g, g^3, g^4\}, \{e, g^2, g^3, g^4\}\}.$

Como espaços vetoriais temos as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned} M_{\{e\}} &= \mathbb{k}P_{\{e\}} \\ M_{X_1} &= \mathbb{k}P_{\{e,g\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^4\}} \\ M_{X_2} &= \mathbb{k}P_{\{e,g^2\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^3\}} \\ M_{X_{1,2}} &= \mathbb{k}P_{\{e,g,g^2\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g,g^4\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^3,g^4\}} \\ M_{X_{1,3}} &= \mathbb{k}P_{\{e,g,g^3\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^2,g^3\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^2,g^4\}} \\ M_{X_{1,2,3}} &= \mathbb{k}P_{\{e,g,g^2,g^3\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g,g^2,g^4\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g,g^3,g^4\}} \oplus \mathbb{k}P_{\{e,g^2,g^3,g^4\}} \\ M_G &= \mathbb{k}P_G. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos as representações parciais irredutíveis

- $M_{\{e\}} := M_{\{e\}} \otimes \mathbb{k}$, logo $M_{\{e\}} \boxtimes M_A \cong \llbracket A = \{e\} \rrbracket M_{\{e\}}$;
- $M_{X_i} := M_{X_i} \otimes \mathbb{k}$, com $i \in \{1, 2\}$. Então,

$$M_{X_i} \boxtimes M_{X_j} \cong \llbracket X_i \sim X_j \rrbracket M_{X_i} = \delta_{i,j} M_{X_i}.$$

- $M_{X_{1,j}} \cong M_{X_{1,j}} \otimes \mathbb{k}$, com $j \in \{2, 3\}$. Então,

$$M_{X_{1,j}} \boxtimes M_{X_{1,j'}} \cong \llbracket X_{1,j} \sim X_{1,j'} \rrbracket M_{X_{1,j}} = \delta_{j,j'} M_{X_{1,j}}.$$

- $M_{X_{1,2,3}} \cong M_{X_{1,2,3}} \otimes \mathbb{k}$. Pois vimos que apenas há uma componente com 4 vértices. Então,

$$M_{X_{1,2,3}} \boxtimes M_{X_{1,2,3}} \cong M_{X_{1,2,3}}.$$

- $M_G \cong M_{(G, \rho_i)} = M_G \otimes_{\mathbb{k}G} V_{\rho_i}$

Em resumo, temos as seguinte tabela de multiplicação:

\boxtimes	$M_{\{e\}}$	M_{X_1}	M_{X_2}	$M_{X_{1,2}}$	$M_{X_{1,3}}$	$M_{X_{1,2,3}}$	$M_{(G,\rho_j)}$
$M_{\{e\}}$	$M_{\{e\}}$	0	0	0	0	0	0
M_{X_1}	0	M_{X_1}	0	0	0	0	0
M_{X_2}	0	0	M_{X_2}	0	0	0	0
$M_{X_{1,2}}$	0	0	0	$M_{X_{1,2}}$	0	0	0
$M_{X_{1,3}}$	0	0	0	0	$M_{X_{1,3}}$	0	0
$M_{X_{1,2,3}}$	0	0	0	0	0	$M_{X_{1,2,3}}$	0
$M_{(G,\rho_i)}$	0	0	0	0	0	0	$M_{(G,\rho_k)}$

Onde

$$\begin{array}{ccccc}
 \rho_1 : G \rightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_2 : G \rightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_3 : G \rightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_4 : G \rightarrow \mathbb{k}^* , & \rho_5 : G \rightarrow \mathbb{k}^* . \\
 e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 \\
 g \longmapsto 1 & g \longmapsto \omega & g \longmapsto \omega^2 & g \longmapsto \omega^3 & g \longmapsto \omega^4 \\
 g^2 \longmapsto 1 & g^2 \longmapsto \omega^2 & g^2 \longmapsto \omega^4 & g^2 \longmapsto \omega & g^2 \longmapsto \omega^3 \\
 g^3 \longmapsto 1 & g^3 \longmapsto \omega^3 & g^3 \longmapsto \omega & g^3 \longmapsto \omega^4 & g^3 \longmapsto \omega^2 \\
 g^4 \longmapsto 1 & g^4 \longmapsto \omega^4 & g^4 \longmapsto \omega^3 & g^4 \longmapsto \omega^2 & g^4 \longmapsto \omega
 \end{array}$$

Veja que para a componente conexa trivial $\{e\}$, temos o produto $M_{\{e\}} \boxtimes M_A = M_A$ só se $A = \{e\}$, e para o resto é zero. Já para a componente conexa trivial G fica

$$M_{(G,\rho_i)} \boxtimes M_{(G,\rho_j)} \cong M_{(G,\rho_k)},$$

em que $\rho_k(g^t) = \rho_i(g^t) \cdot \rho_j(g^t)$, logo, o que temos é a tabela de multiplicação de G :

*	e	g	g^2	g^3	g^4	
e	e	g	g^2	g^3	g^4	
g	g	g^2	g^3	g^4	e	\equiv
g^2	g^2	g^3	g^4	e	g	
g^3	g^3	g^4	e	g	g^2	
g^4	g^4	e	g	g^2	g^3	
\boxtimes	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_4)}$	$M_{(G,\rho_5)}$	
$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_4)}$	$M_{(G,\rho_5)}$	
$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_4)}$	$M_{(G,\rho_5)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	
$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_4)}$	$M_{(G,\rho_5)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	
$M_{(G,\rho_4)}$	$M_{(G,\rho_4)}$	$M_{(G,\rho_5)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	
$M_{(G,\rho_5)}$	$M_{(G,\rho_5)}$	$M_{(G,\rho_1)}$	$M_{(G,\rho_2)}$	$M_{(G,\rho_3)}$	$M_{(G,\rho_4)}$	

Lembremos a decomposição da álgebra $\mathbb{k}\Gamma(G)$, ver (1.7),

$$\mathbb{k}\Gamma(G) = \sum_{\substack{H \leq G \\ 1 \leq m \leq (G:H)}} c_m(H) M_m(\mathbb{k}H).$$

Para grupos que tem subgrupos não triviais, a decomposição acima pode ter “somandos não triviais”, isto é, somandos em que devem ser considerados os subgrupos H , tal que $\{e\} \subsetneq H \subsetneq G$. Para o grupóide, é natural pensar que algumas componentes conexas poderiam ter grupo de isotropia não trivial.

Como visto anteriormente, se $G = \mathbb{Z}_p$, com p primo, o subíndice m acima varia no conjunto $\{1, \dots, |G|\}$, e o cálculo do coeficiente $c_m(H)$ não se faz necessário.

Porém, se por exemplo $G = \mathbb{Z}_{pq}$, devemos considerar os subgrupos \mathbb{Z}_p e \mathbb{Z}_q , e o m varia nos seguintes conjuntos $\{1, \dots, pq\}$, $\{1, \dots, p\}$ e $\{1, \dots, q\}$, assim como deve ser considerado na hora de calcular os coeficientes $c_m(H)$.

Vejamos primeiro o caso $p = q$, $G = \mathbb{Z}_{p^2}$.

O caso $G = \mathbb{Z}_{p^2}$ com p um número primo

Quando $G = \mathbb{Z}_{p^2}$, \mathbb{Z}_p é o único subgrupo não trivial de G . Se A é um vértice de uma componente conexa Σ^m , com $A \neq G$, então $G_A = \{e\}$, ou $G_A = \mathbb{Z}_p$. Temos então,

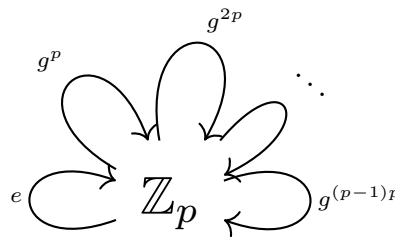
i) A representação parcial irredutível $M_{\{e\}}$ associada à componente conexa com um vértice $A = \{e\}$. Temos $M_{\{e\}} \cong M_{\{e\}} \otimes \mathbb{k}$ e portanto,

$$M_{\{e\}} \boxtimes M_A = \begin{cases} M_{\{e\}} & \text{se } A = \{e\}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

ii) As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com isotropia não trivial \mathbb{Z}_p . Aqui, $c_m(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{m} \binom{p-1}{m-1}$ denota o número de componentes conexas distintas com m -vértices, sendo $1 \leq m \leq p-1$, pois $c_1(\mathbb{Z}_p) = 1$ implica em $c_p(\mathbb{Z}_p) = 0$, (1.8).

Por tanto, temos

1 : A representação associada à componente conexa com um vértice



em que $\mathbb{Z}_p \cong \{e, g^p, g^{2p}, \dots, g^{(p-1)p}\}$, isto é, \mathbb{Z}_p como subgrupo de \mathbb{Z}_{p^2} .

Para $M_{\mathbb{Z}_p} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_p} V_{\nu_i}$, denotamos tais representações por

$$M_{(\mathbb{Z}_p, \nu_i)},$$

em que os ν_i 's identificam a representação irredutível V_{ν_i} , $i \in \{1, \dots, p\}$, que tem a

ver com as representações irredutíveis de $\mathbb{k}\mathbb{Z}_p$ associadas às raízes da unidade.

$$\begin{array}{cccccc}
 \nu_1 : \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{k}, & \nu_2 : \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{k}, & \cdots & \nu_{p-1} : \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{k}, & \nu_p : \mathbb{Z}_{p^2} \longrightarrow \mathbb{k}, \\
 e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 & \cdots & e \longmapsto 1 & e \longmapsto 1 \\
 g^p \longmapsto 1 & g^p \longmapsto \omega & \cdots & g^p \longmapsto \omega^{p-2} & g^p \longmapsto \omega^{p-1} \\
 g^{2p} \longmapsto 1 & g^{2p} \longmapsto \omega^2 & \cdots & g^{2p} \longmapsto \omega^{p-4} & g^{2p} \longmapsto \omega^{p-2} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 g^{(p-2)p} \longmapsto 1 & g^{(p-2)p} \longmapsto \omega^{p-2} & \cdots & g^{(p-2)p} \longmapsto \omega^4 & g^{(p-2)p} \longmapsto \omega^2 \\
 g^{(p-1)p} \longmapsto 1 & g^{(p-1)p} \longmapsto \omega^{p-1} & \cdots & g^{(p-1)p} \longmapsto \omega^2 & g^{(p-1)p} \longmapsto \omega \\
 g^t \longmapsto 0 & g^t \longmapsto 0 & \cdots & g^t \longmapsto 0 & g^t \longmapsto 0
 \end{array}$$

onde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{p}}$, e t não é múltiplo de p . Por último, temos então que se A é um vértice de $\Gamma(G)$,

$$M_{(\mathbb{Z}_p, \nu_i)} \boxtimes M_A = \begin{cases} M_{(\mathbb{Z}_p, \nu_k)} & \text{se } A = \mathbb{Z}_p, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $M_A = M_{(\mathbb{Z}_p, \nu_j)}$, e $\nu_k(g^t) = \nu_i(g^t) \cdot \nu_j(g^t)$. Neste caso temos que este produto se identifica com o produto em \mathbb{Z}_p .

2 : As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com 2-vértices. Cada representação será denotada por

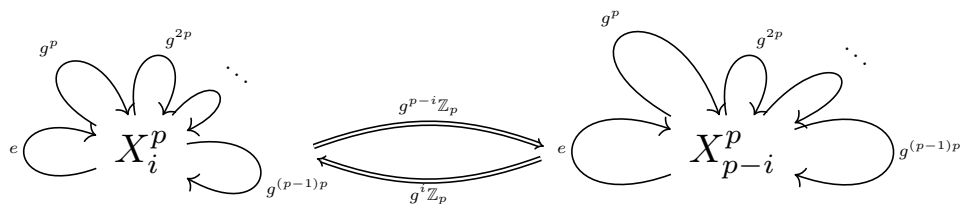
$$M_{X_i^p}$$

em que $X_i^p = \{e, g^p, g^{2p}, \dots, g^{(p-1)p}, g^i, g^{p+i}, g^{2p+i}, \dots, g^{(p-1)p+i}\} \cong \mathbb{Z}_p \cup g^i\mathbb{Z}_p$ com $i \in \{1, \dots, p-1\}$, e $c_2(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{2} \binom{p-1}{2-1} = \frac{p-1}{2}$ denota o número de componentes conexas distintas com 2-vértices e isotropia \mathbb{Z}_p . Veja também que

$$M_{X_i^p} = M_{X_{p-i}^p}$$

pois $X_i^p \sim X_{p-i}^p$, sendo que $X_i^p = g^i X_{p-i}^p$. Dito de outra forma, temos uma reunião de classes laterais em \mathbb{Z}_{p^2} dois a dois.

As componentes conexas são da forma



Observe que, aqui, não há apenas um morfismo de X_{p-i}^p em X_i^p , na verdade quando se escreve o morfismo $g_i\mathbb{Z}_p$ (note-se o formato diferente), quer dizer p morfismos,

esses são os morfismos $g^i, g^{p+i}, \dots, g^{(p-1)p+i} : X_{p-i}^p \rightarrow X_i^p$. Analogamente quando escrevo o morfismo $g^{p-i} \mathbb{Z}_p$, quero dizer que são vários morfismos.

Por outro lado, como estamos no caso em que possui grupo de isotropia \mathbb{Z}_p , segue

$$M_{X_i^p} = M_{X_i^p} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_p} V_{\nu_r},$$

que denotaremos por

$$M_{(X_i^p, \nu_r)}.$$

onde ν_r 's são associadas as raízes r -éssimas da unidade, $r \in \{1, \dots, p-1\}$.

Por último, para A vértice de $\Gamma(G)$,

$$M_{(X_i^p, \nu_r)} \boxtimes M_A = \begin{cases} \llbracket X_i^p \sim X_j^p \rrbracket M_{(X_i^p, \nu_k)} & \text{se } A = X_j^p, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $A = M_{(X_j^p, \nu_s)}$, e $\nu_k(g^t) = \nu_r(g^t) \cdot \nu_s(g^t)$. Aqui fazemos especial menção em que, além de terem o mesmo grupo de isotropia, devem estar na mesma componente conexa.

3 : As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com 3-vértices. Cada representação será denotada por

$$M_{X_{i,j}^p}$$

em que

$$\begin{aligned} X_{i,j}^p &= \{e, g^p, g^{2p}, \dots, g^{(p-1)p}, g^i, g^{p+i}, g^{2p+i}, \dots, g^{(p-1)p+i}, \\ &\quad g^j, g^{p+j}, g^{2p+j}, \dots, g^{(p-1)p+j}\} \\ &\cong \mathbb{Z}_p \cup g^i \mathbb{Z}_p \cup g^j \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

com $i, j \in \{1, \dots, p-1\}$, $i < j$ e $c_3(\mathbb{Z}_p) = \frac{1}{3} \binom{p-1}{3-1}$ denota o número de componentes conexas distintas com 3-vértices e grupo de isotropia \mathbb{Z}_p .

Análogo ao caso de grupo simples, podemos considerar $X_{i,j}^p$ lexicograficamente o menor vértice da componente conexa que o contém. De novo será chamado de primeiro vértice, ou vértice base. Aqui comparamos apenas os subíndices i, j .

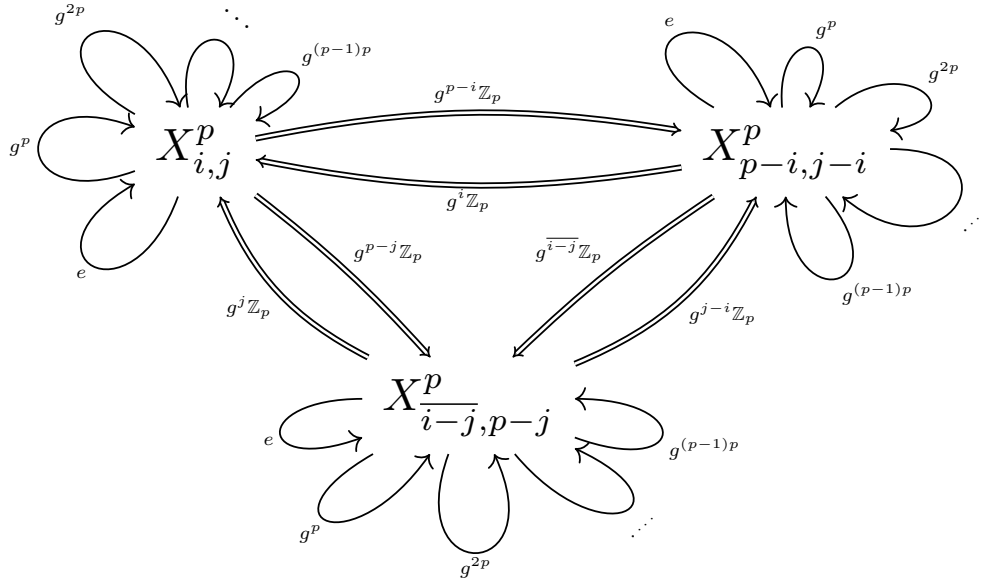
Veja também que

$$M_{X_{i,j}^p} = M_{X_{p-i, j-i}^p} = M_{X_{i-j, p-j}^p}$$

pois $X_{i,j}^p \sim X_{p-i, j-i}^p \sim X_{i-j, p-j}^p$, ($\overline{i-j} = p - (j-i)$), sendo que

$$\begin{aligned} X_{i,j}^p &= g^i X_{p-i, j-i}^p \\ &= g^j X_{i-j, p-j}^p. \end{aligned}$$

A componente conexa que contém os 3-vértices é do tipo



em que $g^k\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_{p^2}$ indica os elementos $\{g^k, g^{p+k}, g^{2p+k}, \dots, g^{(p-1)p+k}\}$, para qualquer $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Logo, as flechas diferenciadas querem dizer que são p flechas. Por outro lado, como estamos no caso de grupo de isotropia \mathbb{Z}_p , segue que

$$M_{X_{i,j}^p} \cong M_{X_{i,j}^p} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_p} V_{\nu_r},$$

que denotaremos por

$$M_{(X_{i,j}^p, \nu_r)}.$$

em que ν_r são como acima, associado às raízes da unidade, $r \in \{1, \dots, p-1\}$.

Por último, para A vértice de $\Gamma(G)$,

$$M_{(X_{i,j}^p, \nu_r)} \boxtimes M_A = \begin{cases} \llbracket X_{i,j}^p \sim X_{i',j'}^p \rrbracket M_{(X_{i,j}^p, \nu_k)} & \text{se } A = X_{i',j'}^p, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que $M_A = M_{(X_{i',j'}^p, \nu_s)}$, e $\nu_k(g^t) = \nu_r(g^t) \cdot \nu_s(g^t)$.

⋮

$n + 1$: As representações parciais irredutíveis associadas a componentes conexas com até $p - 1$ -vértices.

Seja

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p := \mathbb{Z}_p \cup g^{i_1}\mathbb{Z}_p \cup g^{i_2}\mathbb{Z}_p \cup \dots \cup g^{i_n}\mathbb{Z}_p$$

um vértice com $(n + 1)p$ elementos, com $n \in \{1, 2, \dots, p-2\}$, e $i_r < i_{r+1}$. Então tal vértice pertence à componente conexa com $n + 1$ vértices. Logo,

$$X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p \sim X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}^p \sim X_{i_1-i_2, p-i_2, \dots, i_n-i_2}^p \sim X_{i_1-i_n, i_2-i_n, \dots, p-i_n}^p,$$

pois,

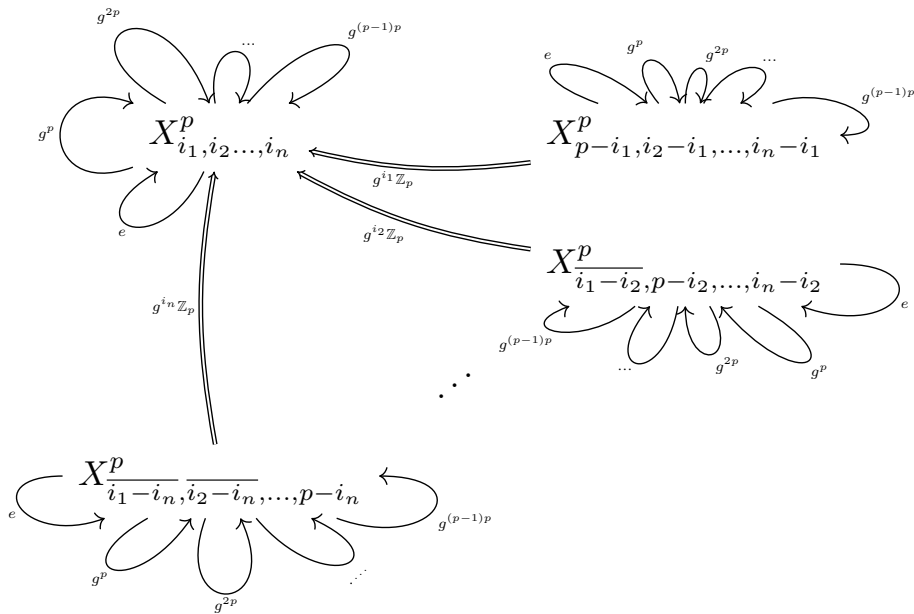
$$\begin{aligned} X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p &= g^{i_1} X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}^p \\ &= g^{i_2} X_{i_1-i_2, p-i_2, \dots, i_n-i_2}^p \\ &\vdots \\ &= g^{i_n} X_{i_1-i_n, i_2-i_n, \dots, p-i_n}^p \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade consideramos como no caso de grupos simples, o vértice base (primeiro vértice) $X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p$, sendo lexicograficamente o menor de todos os vértices da componente conexa que o contém. Veja que temos $\frac{\binom{p-1}{n}}{n+1}$ módulos simples diferentes não isomorfos associados a vértices com $(n+1)p$ elementos e isotropia não trivial \mathbb{Z}_p , ou $\frac{\binom{p-1}{n}}{n+1}$ componentes conexas diferentes com $n+1$ vértices e isotropia \mathbb{Z}_p .

A representação associada ao vértice $X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p$ será denotada por

$$M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p}^p.$$

E a componente conexa que contém o nosso vértice base fica do tipo



Vale a mesma observação sobre as p flechas quando escrevo $g^k \mathbb{Z}_p$. Veja também que, como o segundo vértice é $X_{p-i_1, i_2-i_1, \dots, i_n-i_1}^p$, depende da escolha do vértice base, construção semelhante ao caso do grupo simples no primeiro caso.

Porém, tal representação independe da escolha da ordem dos vértices, seja qual for o vértice base ou o resto, pois como falado anteriormente, as representação resultam ser “as mesmas”.

Por outro lado, como estamos no caso de grupo de isotropia \mathbb{Z}_p , segue que

$$M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p} = M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_p} V_{\nu_r},$$

que denotaremos por

$$M_{(X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p, \nu_r)},$$

em que ν_r , como mencionado anteriormente, estão associadas às raízes da unidade, com $r \in \{1, \dots, p-1\}$.

Por último, para A vértice de $\Gamma(G)$, o produto $M_{(X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p, \nu_r)} \boxtimes M_A$ é diferente de zero se A é da forma $X_{j_1, j_2, \dots, j_n}^p$ e $X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p \sim X_{j_1, j_2, \dots, j_n}^p$, ou seja, se A está na mesma componente. Logo,

$$M_{(X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p, \nu_r)} \boxtimes M_{(X_{j_1, j_2, \dots, j_n}^p, \nu_s)} = M_{(X_{i_1, i_2, \dots, i_n}^p, \nu_k)}$$

em que $\nu_k(g^t) = \nu_r(g^t) \cdot \nu_s(g^t)$.

iii) Componentes conexas não triviais com grupo de isotropia $H = \{e\}$. Como $(G : H) = p^2$, $c_{p^2}(\{e\}) = 0$ e $c_1(\{e\}) = 1$ (esta última se refere à única componente conexa trivial com 1-vértice e grupo de isotropia $\{e\}$, considerada em *i*)), então basta considerar $m \in \{2, \dots, p^2 - 1\}$.

A quantidade dessas componentes fica determinada pela regra

$$c_m(\{e\}) = \frac{1}{m} \left(\binom{p^2 - 1}{m - 1} - m \left(\sum_{p|m} \frac{c_m(\mathbb{Z}_p)}{p} \right) \right),$$

Repare que nem sempre $p \mid m$, logo temos dois casos a ser considerados:

*) Quando m não é múltiplo de p , isto é, $p \nmid m$, temos

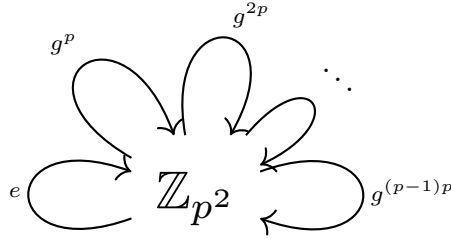
$$c_m(\{e\}) = \frac{1}{m} \left(\binom{p^2 - 1}{m - 1} \right).$$

**) Quando m é um múltiplo de p , isto é $m = tp$, com $1 \leq t \leq p-1$ um inteiro positivo, então temos

$$c_m(\{e\}) = \frac{1}{m} \left(\binom{p^2 - 1}{m - 1} - t c_t(\mathbb{Z}_p) \right).$$

Em quaisquer desses dois casos, procedemos como no caso de grupos simples e denotamos o módulo simples associado a cada uma dessas componentes por M_{X_i} se tem 2-vértices, $M_{X_{i,j}}$ se tem 3-vértices, \dots , $M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}$, se tem $n+1$ -vértices. Note que nenhum desses vértices vai ser uma reunião de classes laterais do subgrupo \mathbb{Z}_p , pois tais vértices têm grupo de isotropia \mathbb{Z}_p .

iv) As representações associadas à componente conexa



Temos $M_{(\mathbb{Z}_{p^2}, \rho_i)} = M_{\mathbb{Z}_{p^2}} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_{p^2}} U_{\rho_i}$, com $i \in \{1, \dots, p^2\}$, as representações associadas a \mathbb{Z}_{p^2} .

Exemplo B.2. Seja $G = \mathbb{Z}_9$, aqui temos o subgrupo não trivial \mathbb{Z}_3 . Lembrando da decomposição

$$\mathbb{k}\Gamma(G) = \sum_{\substack{H \leq G \\ 1 \leq m \leq (G:H)}} c_m(H) M_m(\mathbb{k}H),$$

os coeficientes $c_m(H)$ são dados por: $c_m(H) = \frac{1}{m} \cdot \left(\binom{(G:H)-1}{m-1} - m \sum_{\substack{H < B \leq G \\ (B:H)|m}} \frac{c_{\frac{m}{(B:H)}}(B)}{(B:H)} \right)$. Com

esta fórmula, não é difícil provar que $c_1(\{e\}) = 1$ e $c_1(\mathbb{Z}_9) = 1$, que se referem às (únicas) componentes conexas com 1-vértice e grupos de isotropia $\{e\}$ e \mathbb{Z}_9 , respectivamente. Assim,

- Quando $H = \{e\}$, $1 \leq m \leq 9$, e $c_1(\{e\}) = 1$,
- Quando $H = \mathbb{Z}_3$, $1 \leq m \leq 3$, pois se $m = 3$,

$$c_3(\mathbb{Z}_3) = \frac{1}{3} \cdot \left(\binom{3-1}{3-1} - 3 \left(\frac{c_1(\mathbb{Z}_9)}{3} \right) \right) = 0 \Rightarrow c_3(\mathbb{Z}_3) = 0.$$

- Quando $H = \mathbb{Z}_9$, $m = 1$ e $c_1(\mathbb{Z}_9) = 1$.

Temos então,

- As componentes conexas triviais, logo os módulos simples associados a elas, a saber, $M_{\{e\}}$ e $M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_i)}$, com $1 \leq i \leq 9$;

$$M_{\{e\}} \cong M_{\{e\}} \otimes \mathbb{k}, \quad M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_i)} = M_{\mathbb{Z}_9} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_9} V_{\rho_i},$$

em que os V_{ρ_i} 's tem a ver com as representações irredutíveis de \mathbb{Z}_9 , determinadas por aquelas $\rho_i : \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{k}^*$. Assim, os únicos produtos possíveis são da forma

$$M_{\{e\}} \boxtimes M_{\{e\}} = M_{\{e\}}, \quad M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_i)} \boxtimes M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_j)} = M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_k)}.$$

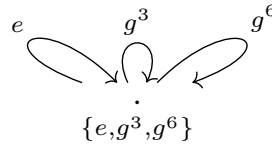
em que $\rho_k(g^t) = \rho_i(g^t)\rho_j(g^t)$. O produto $M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_i)} \boxtimes M_{(\mathbb{Z}_9, \rho_j)}$ pode ser identificado com a operação em \mathbb{Z}_9 .

- As componentes conexas não triviais com grupo de isotropia \mathbb{Z}_3 . São $c_m(\mathbb{Z}_3)$ -componentes conexas com m -vértices e $1 \leq m \leq 2$:

1) Quando $m = 1$,

$$c_1(\mathbb{Z}_3) = \frac{1}{1} \binom{3-1}{1-1} = \binom{2}{0} = 1$$

ou seja, 1 componente conexa com 1-vértice e grupo de isotropia \mathbb{Z}_3 . A saber,



em que $\{e, g^3, g^6\} \cong \mathbb{Z}_3$ e,

$$M_{\mathbb{Z}_3} \cong M_{\mathbb{Z}_3} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_3} U_{\nu_i} = M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_i)},$$

onde U_{ν_i} 's tem a ver com as representações irredutíveis de $\mathbb{k}\mathbb{Z}_3$. Logo,

$$\begin{array}{l} \pi_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)} : G \longrightarrow \text{End}(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}), \\ e \longmapsto 1 \\ g, g^2 \longmapsto 0 \\ g^3 \longmapsto 1 \\ g^4, g^5 \longmapsto 0 \\ g^6 \longmapsto 1 \\ g^7, g^8 \longmapsto 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \pi_{(\mathbb{Z}_3, \nu_2)} : G \longrightarrow \text{End}(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}), \\ e \longmapsto 1 \\ g, g^2 \longmapsto 0 \\ g^3 \longmapsto \omega \\ g^4, g^5 \longmapsto 0 \\ g^6 \longmapsto \omega^2 \\ g^7, g^8 \longmapsto 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \pi_{(\mathbb{Z}_3, \nu_3)} : G \longrightarrow \text{End}(\mathbb{k} \otimes \mathbb{k}), \\ e \longmapsto 1 \\ g, g^2 \longmapsto 0 \\ g^3 \longmapsto \omega^2 \\ g^4, g^5 \longmapsto 0 \\ g^6 \longmapsto \omega \\ g^7, g^8 \longmapsto 0 \end{array}$$

em que $\omega = e^{\frac{2k\pi i}{3}}$. Portanto, o produto

$$M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_i)} \boxtimes M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_j)} = M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_k)},$$

se identifica com a operação em \mathbb{Z}_3 , assim como feito no Exemplo 3.7,

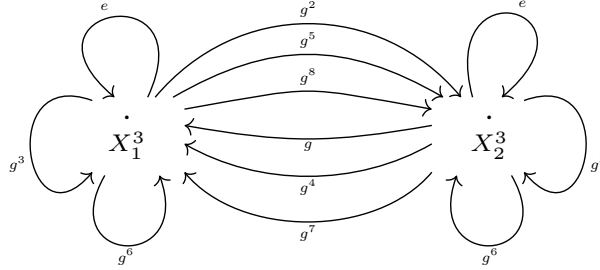
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline * & e & g & g^2 \\ \hline e & e & g & g^2 \\ \hline g & g & g^2 & e \\ \hline g^2 & g^2 & e & g \\ \hline \end{array} \equiv \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \boxtimes & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_2)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_3)} \\ \hline M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_2)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_3)} \\ \hline M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_2)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_2)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_3)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)} \\ \hline M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_3)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_3)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)} & M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_2)} \\ \hline \end{array}$$

Observe que, tal componente e tal produto parece uma “cópia” da componente do grupo inteiro no Exemplo 3.7.

2) Quando $m = 2$,

$$c_2(\mathbb{Z}_3) = \frac{1}{2} \binom{3-1}{2-1} = \frac{1}{2} \binom{2}{1} = 1$$

ou seja, temos apenas 1 componente conexa com 2-vértices e grupo de isotropia \mathbb{Z}_3 . A saber,



sendo $X_1^3 = \mathbb{Z}_3 \cup g\mathbb{Z}_3 = \{e, g, g^3, g^4, g^6, g^7\}$, e $X_2^3 = \mathbb{Z}_3 \cup g^2\mathbb{Z}_3 = \{e, g^2, g^3, g^5, g^6, g^8\}$. Temos também,

$$M_{X_1^3} \cong M_{X_1^3} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_3} U_{\nu_i} = M_{X_2^3} \otimes_{\mathbb{k}\mathbb{Z}_3} U_{\nu_i} \cong M_{X_2^3},$$

$$M_{(X_1^3, \nu_i)} = M_{(X_2^3, \nu_i)}$$

em que os U_{ν_i} 's tem a ver com as representações irredutíveis de $\mathbb{k}\mathbb{Z}_3$ mencionadas anteriormente, com $i \in \{1, 2, 3\}$.

Portanto,

$$M_{(X_1^3, \nu_i)} \boxtimes M_{(X_1^3, \nu_j)} = M_{(X_1^3, \nu_k)},$$

em que os ν_i 's tem a ver com as representações irredutíveis de \mathbb{Z}_3 , e ν_k resulta da regra já mencionada em várias ocasiões.

Aqui também podemos observar que tal componente X_1^3 parece uma “cópia” da componente conexa X_1 no Exemplo 3.7, salvo grupo de isotropia. De fato, o módulo $M_{(X_1^3, \nu_1)}$ em $\mathbb{k}_{par}(\mathbb{Z}_9)\mathcal{M}$ pode ser identificado com o módulo M_{X_1} em $\mathbb{k}_{par}(\mathbb{Z}_3)\mathcal{M}$.

- As componentes conexas não triviais com grupo de isotropia neutro $\{e\}$. São $c_m(\{e\})$ -componentes conexas com m -vértices e $1 \not\leq m \not\leq 9$, pois $c_1(\{e\}) = 1$, e $c_9(\{e\}) = 0$. Assim, temos que

2) São $c_2(\{e\}) = \frac{1}{2} \binom{9-1}{2-1} = \binom{1}{2} \binom{8}{1} = 4$ componentes conexas com 2-vértices.

Logo, $M_{X_1}, M_{X_2}, M_{X_3}, M_{X_4}$, são os módulos simples associados às componentes conexas com 2 vértices. Similar ao caso de grupos simples, M_{X_1} por exemplo, é dado pela aplicação

$$\begin{aligned} \pi_{X_1} : \quad \mathbb{Z}_9 &\longrightarrow M_2(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_2 \\ g &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^8 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^t &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

com $t \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Aqui temos $M_{X_1} = M_{X_8}$. Segue então que

$$M_{X_i} \boxtimes M_{X_j} = \delta_{i,j} M_{X_i},$$

com $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Lembrando que ao tomar os vértices base, são considerados os “lexicograficamente menor”.

3) Como 3 é múltiplo de $p = 3$, caímos no caso $c_3(\{e\}) = \frac{1}{3} \left(\binom{9-1}{3-1} - 1c_1(\mathbb{Z}_3) \right) = \binom{1}{3} (28 - 1) = 9$ componentes conexas com 3-vértices. Aqui, as componentes conexas não podem ser reunião de classes laterais de \mathbb{Z}_3 , pois essas componentes tem grupo de isotropia \mathbb{Z}_3 .

Seja por exemplo $X_{1,2} = \{e, g, g^2\}$ o vértice de uma componente conexa, os seus outros dois vértices são obtidos igual foi feito no caso de grupos simples, temos então $X_{8,1}$ e $X_{8,7}$. Logo, como dito anteriormente, essa componente $\Sigma_{X_{1,2}}$ tem por vértice base $X_{1,2}$ (lexicograficamente menor). Ainda, a aplicação que define o módulo $M_{X_{1,2}}$

é dada por

$$\begin{aligned} \pi_{X_{1,2}} : \quad \mathbb{Z}_9 &\longrightarrow M_3(\mathbb{k}), \\ e &\longmapsto I_3 \\ g &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^2 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^7 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ g^8 &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ g^t &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

para $t \in \{3, 4, 5, 6\}$. Aqui temos $M_{X_{1,2}} = M_{X_{8,1}} = M_{X_{8,7}}$, logo

$$M_{X_{1,2}} \boxtimes M_A = 0$$

para qualquer outro vértice que não for nem $X_{8,1}$ ou $X_{8,7}$.

- 4) São $c_4(\{e\}) = \frac{1}{4} \binom{8}{3} = \left(\frac{1}{4}\right) \binom{56}{1} = 14$ componentes conexas com 4-vértices.
- 5) São $c_5(\{e\}) = \frac{1}{5} \binom{8}{4} = 14$ componentes conexas com 5-vértices.
- 6) Como 6 é múltiplo de $p = 3$, temos $c_6(\{e\}) = \frac{1}{6} \left(\binom{8}{5} - 2c_2(\mathbb{Z}_3) \right) = \frac{1}{6} (56 - 2) = 9$ componentes conexas com 6-vértices.
- 7) São $c_7(\{e\}) = \frac{1}{7} \binom{8}{6} = 4$ componentes conexas com 7-vértices.
- 8) São $c_8(\{e\}) = \frac{1}{8} \binom{8}{7} = 1$ componente conexa com 8-vértices.

Observe então que, o produto tensorial no exemplo anterior fica semelhante com a seguinte tabela

\boxtimes	$M_{\{e\}}$	$M_{X_{j_1, j_2, \dots, j_m}}$	$M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_j)}$	$M_{(X_1^3, \nu_j)}$	$M_{(G, \rho_j)}$
$M_{\{e\}}$	$M_{\{e\}}$	0	0	0	0
$M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}$	0	$M_{X_{\dots}}$	0	0	0
$M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_i)}$	0	0	$M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_k)}$	0	0
$M_{(X_1^3, \nu_i)}$	0	0	0	$M_{(X_1^3, \nu_k)}$	0
$M_{(G, \rho_i)}$	0	0	0	0	$M_{(G, \rho_k)}$

onde $X_{\dots} = \llbracket m = n, X_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sim X_{j_1, j_2, \dots, j_m} \rrbracket M_{X_{i_1, i_2, \dots, i_n}}$. Em particular, observe as componentes conexas com grupo de isotropia \mathbb{Z}_3 , e os seus módulos associados a ν_1 , isto é, $M_{(\mathbb{Z}_3, \nu_1)}$ e $M_{(X_1^3, \nu_1)}$, que foi mencionado anteriormente. Com isto, é possível ver que a categoria dos módulos sobre $\mathbb{k}_{par}(\mathbb{Z}_3)$ está imersa na categoria dos módulos sobre $\mathbb{k}_{par}(\mathbb{Z}_9)$.