Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de qualificação em Álgebra
Data: 26/03/2024
Nome: ______________________________

Questão 1 Sejam R um anel com 1, e M um R-módulo. Um elemento $m \in M$ é dito de torção, se existe $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $rm = 0$. Considere o conjunto dos elementos de torção:

$$\mathrm{Tor}(M) = \{m \in M \mid m \text{ é de torção}\}.$$

(a) Se R é um domínio de integridade, prove que $\mathrm{Tor}(M)$ é um submódulo de M.

(b) Dê um exemplo de um anel R e um R-módulo M tal que $\mathrm{Tor}(M)$ não seja submódulo de M.

(c) Se R tem divisores de zero, mostre que $\mathrm{Tor}(M)$ contém elementos não-nulos.

(d) Se R é um domínio de ideais principais e M é um R-módulo finitamente gerado, mostre que $M = \mathrm{Tor}(M) \oplus F$, onde F é um R-módulo livre de posto finito.

Questão 2

(a) Prove que um R-módulo M é injetivo se, e somente se, para todo ideal $I \trianglelefteq R$, todo homomorfismo $\phi : I \to M$ de R-módulos se estende a um homomorfismo $\phi : R \to M$.

(b) Considere o anel $R = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ e os módulos $M_1 = R$ e $M_2 = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, onde d é tal que $m = da$ e $mdc(d, a) > 1$. Mostre que M_1 é injetivo e M_2 não é injetivo.

(c) Seja R um domínio de ideais principais. Prove que um R-módulo M é injetivo se, e somente se, M é divisível; isto é, existe $r \in R \setminus \{0\}$ tal que $rM = M$.

(d) Conclua que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo.

Questão 3 Considere R anel qualquer com unidade. Prove os itens abaixo.

(a) Um R-módulo à esquerda M é semissimples se, e somente se, toda sequência exata curta de R-módulos à esquerda

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

cinde.

(b) Prove que se L é um R-módulo à esquerda livre, então a sequência exata curta de R-módulos à esquerda

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} T \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$$

cinde. A recíproca é falsa, encontre um contra-exemplo.

(c) Seja

$$\begin{tikzcd}
& \text{(i) } M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_2"] & 0 \\
\text{(ii) } N_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "\beta_0"] & N_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "\beta_1"] & N_2 \arrow[d, "\beta_2"] & \\
\text{(iii) } P_0 \arrow[r, "h_0"] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & P_2 & \\
0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

um diagrama comutativo, isto é, $\alpha_2 \circ f_1 \overset{(1)}{=} g_1 \circ \alpha_1$, $\beta_1 \circ g_0 \overset{(2)}{=} h_0 \circ \beta_0$ e $\beta_2 \circ g_1 \overset{(3)}{=} h_1 \circ \beta_1$. Se as sequências dadas pelas colunas e as sequências (i) e (ii) são exatas, então prove que a sequência (iii) é exata.

Questão 4 Faça as questões abaixo.

(a) Sejam R um anel com unidade e M um R-módulo à direita. Mostre que $M \otimes_R R$ e M são isomorfos como R-módulos à direita.

(b) Dê um exemplo mostrando que se α e β são homomorfismos injetores de grupos abelianos (ou $\mathbb{Z}$-módulos), não necessariamente $\alpha \otimes \beta$ é homomorfismo injetor de grupos abelianos.

(c) Se R é um anel comutativo e M e N são R-módulos. Então $M \otimes_R N$ e $N \otimes_R M$ são isomorfos como R-módulos.