Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise-2020/01

1. Seja X um conjunto não-vazio e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X. Seja μ uma medida finita definida em $\mathcal{A}$ e ν uma medida finita com sinal definida em $\mathcal{A}$. Denote por $|\nu|$ a medida que corresponde à variação total de ν. Prove que as seguintes afirmações a) e b) são equivalentes:

   a. Para cada $E \in \mathcal{A}$, $|\nu|(E) \leq \mu(E)$.

   b. $\nu \ll \mu$ e, além disso, $\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| \leq 1$ em quase toda parte de X com relação à medida μ.

2. Sejam

$$l^1 = \left\{ x = \left\{ x_1, x_2, ..., x_j, ... \right\} \;\middle|\; \sum_j |x_j| < +\infty \right\}$$
$$l^\infty = \left\{ x = \left\{ x_1, x_2, ..., x_j, ... \right\} \;\middle|\; \sup_j |x_j| < +\infty \right\}$$

   espaços de Banach munidos com normas

$$||x||_{l^1} = \sum_j |x_j| \quad \text{e} \quad ||x||_{l^\infty} = \sup_j |x_j|$$

   respectivamente.

   - Verifique que o espaço dual $(l^1)^*$ é isométrico a l^∞ .
   - Seja X - um espaço de Banach. Demonstre que caso X^* é separável, então X tem que ser separável também.
   - Usando este resultado demonstre então que l^1 não é reflexivo.

3. Sejam X um conjunto não-vazio, $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra em X e μ uma medida definida em $\mathcal{A}$. Considere a seguinte notação:

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{A}) = \{f : X \to \mathbb{R} : \; f \text{ é } \mathcal{A} - \text{mensurável}\},$$

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f : X \to \mathbb{R} : \; f \text{ é integrável em } X \text{ com respeito à medida } \mu\};$$

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad \text{representa convergência em medida.}$$

a. Mostre que se uma sequência $\{f_n\}$ de $\mathcal{M}(X, \mathcal{A})$ é tal que $f_n \xrightarrow{\mu} f$, para alguma $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A})$, então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_k} \to f$ em quase toda parte de X com relação à medida μ.

b. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ tal que existe $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ de forma que $|f_n| \leq g$ em quase toda parte de X com respeito à medida μ, para cada n. Mostre que se $f_n \xrightarrow{\mu} f$ então $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ e verifica-se

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0.$$

4. Seja X um espaço de Banach complexo e seja $T : X \to X$ um operador linear.

   - Define espectro, espectro pontual, espectro residual e espectro contínuo do operador T.
   - Seja $X = C[0, 1]$ - espaço de Banach de funções contínuas em intervalo $[0, 1]$ que tomam valores complexos e seja $T : C[0, 1] \to C[0, 1]$ o operador de multiplicação

     $$Tx(t) = tx(t) \quad \forall x \in C[0, 1].$$

     Encontre espectro pontual, espectro residual e espectro contínuo do operador T.