Exame de Qualificação - Análise Numérica

Data: 13/09/2024

1. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A$ uma matriz $m \times n$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$. Defina o funcional:

$$\varphi(x) = \|Ax - y\|^2.$$

   (a) Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

      i. $\varphi(\hat{x}) \leq \varphi(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

      ii. $A\hat{x} = P(y)$;

      iii. $A^T A\hat{x} = A^T y$;

      iv. $\nabla\varphi(\hat{x}) = 0$.

   Aqui, $P\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ denota a projeção ortogonal sobre a imagem de $A$. Ainda, $A^T$ é a transposta de $A$.

   (b) Classifique as afirmações a seguir em verdadeiras ou falsas. Se for verdadeira, prove-a, e se for falsa, apresente um contra-exemplo.

      b1. O funcional $\varphi$ admite pelo menos um minimizador;

      b2. O funcional $\varphi$ admite no máximo um minimizador.

   (c) Determine a pseudo inversa de $A$ supondo que posto$(A) = n$.

   (d) Determine a pseudo inversa da matriz $A = [1, \ldots, 1] \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

2. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A$ uma matriz $n \times n$ simétrica e definida positiva e $b \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Mostre que o vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é solução do sistema linear

$$Ax = b,$$

   se e somente se, ele minimiza o funcional

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle.$$

   (b) Seja $\mathcal{B} = \{p_0, \ldots, p_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de vetores não nulos e $A-$conjugados, isto é, $\langle Ap_i, p_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Mostre que $\mathcal{B}$ é uma base para o $\mathbb{R}^n$.

   (c) Considere o seguinte algoritmo:

```
Entrada: matriz A, vetor b, vetor x_0 ∈ ℝ^n e conjunto A−conjugado {p_0, ..., p_{n-1}}.

Saída: vetor x_n ∈ ℝ^n.

k ← 0

Enquanto k < n faça

    r_k ← A x_k − b

    α_k ← −⟨r_k, p_k⟩ / ⟨A p_k, p_k⟩

    x_{k+1} ← x_k + α_k p_k

    k ← k + 1

Fim (Enquanto)
```

Mostre que para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, o vetor $x_{k+1}$ minimiza o funcional $\varphi$ no conjunto $\{x_k + \alpha p_k : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d) Prove que $Ax_n = b$. (Sugestão: Para todo $k$, tem-se que $x_k - x_0 = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j p_j$. A única solução $x^\star$ de $Ax = b$ pode ser escrita na forma $x^\star - x_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_j p_j$. Mostre que $\alpha_k = \sigma_k$ para todo $k$.)

3. Considere o problema de convecção-difusão

$$
\begin{aligned}
v_t + a v_x &= \nu v_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0 && (1)\\
v(x,0) &= f(x), \quad x \in [0,1] && (2)\\
v(0,t) &= g_0(t), \quad t \geq 0 && (3)\\
v(1,t) &= g_1(t), \quad t \geq 0, && (4)
\end{aligned}
$$

sendo $a$ e $\nu$ constantes reais positivas. Admita que $g_0(0) = f(0)$ e que $g_1(0) = f(1)$. Propõe-se o seguinte esquema numérico para aproximação de (1):

$$V_k^{n+1} = V_k^n - R\delta_-(V_k^n) + r\delta^2(V_k^n), \tag{5}$$

com $r = \nu \Delta t/(\Delta x)^2$, $R = a\Delta t/\Delta x$, $\delta_-(V_k^n) = V_k^n - V_{k-1}^n$, $\delta^2(V_k^n) = V_{k+1}^n - 2V_k^n + V_{k-1}^n$.

a. No contexto da aproximação numérica de (1), faça uma análise de consistência para o esquema numérico (5).

b. Discuta a estabilidade desse esquema, utilizando análise de Von Neumann.

c. Escreva como um todo o esquema numérico para aproximação de (1)-(4) e a ele aplique adequadamente o Teorema de Lax.

4. Para o problema de Cauchy

$$u' = f(u), \quad t > t_0 \tag{6}$$

$$u(t_0) = u_0, \tag{7}$$

considere o seguinte método de aproximação de passos múltiplos:

$$3U^{n+2} - 4U^{n+1} + U^n = 2\Delta t f(U^{n+2}). \tag{8}$$

a. Apresente um método de predição-correção para (8), de forma que o passo preditor tenha mesma ordem que (8).

b. Defina zero-estabilidade para um esquema de passos múltiplos para aproximação de (6)-(7) e mostre que (8) é zero-estável.

5. Descreva com detalhes o método da potência inversa. Mostre como ele pode ser utilizado para encontrar o autovalor de uma matriz $A$ mais próximo de um dado número $\alpha$.