Carla Mörschbächer

MÓDULOS SIMPLES DE ÁLGEBRAS DE HOPF PONTUADAS SOBRE O DIHEDRAL $\mathbb{D}_m$

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Doutora em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Orientadora: Prof. Drª. Virgínia Silva Rodrigues
Coorientadora: Prof. Drª. Luz Adriana Mejía Castaño

Florianópolis
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Mörschbächer, Carla
MÓDULOS SIMPLES DE ÁLGEBRAS DE HOPF PONTUADAS SOBRE O DIHEDRAL Dm / Carla Mörschbächer ; orientador, Virgínia Silva Rodrigues, coorientador, Luz Adriana Mejía Castaño, 2019.
157 p.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Álgebras de Hopf pontuadas. 3. Módulos simples. 4. Grupo Dihedral. 5. Anel de Grothendieck. I. Silva Rodrigues, Virgínia . II. Mejía Castaño, Luz Adriana. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. IV. Título.

Carla Mörschbächer

MÓDULOS SIMPLES DE ÁLGEBRAS DE HOPF PONTUADAS SOBRE O DIHEDRAL $\mathbb{D}_m$

Esta Tese foi julgada adequada para a obtenção do Título de "Doutora", e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Florianópolis, 8 de julho 2019.

Prof. Marcelo Sobottka, Dr.
Coordenador
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Comissão Examinadora:

Prof$^{\underline{a}}$. Virgínia Silva Rodrigues, Dr$^{\underline{a}}$.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Orientadora

Prof. Abdelmoubine Amar Henni, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Prof. Alveri Alves Sant'Ana, Dr.
Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS

Prof$^{\underline{a}}$. Bojana Femić, Dr$^{\underline{a}}$.
Universidad de la República (Participação por videoconferência)

Prof. Sérgio Tadao Martins, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Às minhas filhas Catherine e Victória.

Agradecimentos

Às minhas filhas Victória e Catherine, por terem tornado a minha vida muito mais bela e por ressignificarem a palavra tempo. Por me fazerem refletir sobre tudo e aproveitar melhor cada segundo.

Ao meu esposo Ivan, pelo apoio e paciência. Por ter aberto mão, temporariamente, de seus sonhos para que eu pudesse realizar os meus.

Aos meus pais Pedro Canísio e Jacinta, pela paciência e compreensão, pois no decorrer do doutorado não foi possível dedicar toda a atenção que sempre mereceram.

Aos meus irmãos, Diego e Cristiane, pela compreensão e apoio. Obrigada por sempre poder contar com vocês.

À Luísa, que em suas alegres visitas nunca mediu esforços para nos ajudar em tudo que foi possível, inclusive no abstract.

À todos os demais familiares, pelo apoio e torcida.

À Kelly, por cuidar com tanto carinho de minhas filhas. Obrigada também pela torcida e orações.

À Professora Drª. Virgínia Silva Rodrigues, pela orientação, por todos os seminários e pela correção desta tese de doutorado. Obrigada por todo o tempo despendido e dedicação.

À Professora Drª. Luz Adriana Mejía Castaño, pela coorientação e por todos os e-mails enviados com sugestões. Obrigada também pela leitura e correção deste trabalho.

À Banca examinadora, pela leitura, sugestões e críticas, que possibilitaram o aprimoramento deste trabalho.

Aos meus amigos, em especial à Alessandra, que tornou os três anos de estadia em Florianópolis muito mais leves. À Sara, pela amizade e por disponibilizar seus arquivos tex.

Aos amigos do Instituto Federal Catarinense-Campus Camboriú, por toda a compreensão, apoio e gentilezas.

À todos os professores do ensino fundamental, médio, graduação, mestrado e doutorado, por toda a dedicação e conhecimentos compartilhados.

À Elisa, por toda sua dedicação ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

Ao Instituto Federal Catarinense-Campus Camboriú, pelo afastamento concedido para a realização deste trabalho.

Ao Programa de Bolsas Universitárias de Santa Catarina -UNIEDU, pelo apoio financeiro.

Resumo

A classificação das álgebras de Hopf pontuadas finito dimensionais sobre $\mathbb{D}_m$, em que $m = 2n = 4t$ e $t \geq 3$, foi concluída em [12], para o caso em que $\Bbbk$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero. A menos de isomorfismo, tais álgebras são: 1) $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, com $I = \{(i,k)\} \in \mathcal{J}$ e $k \neq n$; 2) $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, com $L \in \mathcal{L}$; 3) $A_I(\lambda, \gamma)$ com $|I| > 1$ ou $I = \{(i,n)\}$ e $\gamma = 0$ e 4) $B_{I,L}(\lambda, \gamma, \theta, \mu)$ com $(I, L) \in \mathcal{K}, |I| > 0$ e $|L| > 0$. Os conjuntos $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{K}$ são provenientes do método de classificação utilizado e são tais que as álgebras de Nichols $\mathcal{B}(M_I)$, $\mathcal{B}(M_L)$ e $\mathcal{B}(M_{I,L})$, esta última associada às álgebras do item 4, possuem dimensão finita e λ, γ, θ e μ são famílias de elementos de $\Bbbk$. Neste trabalho, damos contribuições a cerca da teoria de representação destas álgebras. Calculamos conjuntos completos de módulos simples e não isomorfos sobre as álgebras descritas nos dois primeiros itens e para $A_I(0,0)$, em que $I \in \mathcal{J}$. Além disso, estudamos os $A_I(\lambda, \gamma)$-módulos e os classificamos efetivamente quanto ao fato de ser simples ou não, para o caso em que $\gamma = 0$ e I é um conjunto específico.

Palavras-chave: Álgebras de Hopf pontuadas, Módulos simples, Grupo Dihedral, Anel de Grothendieck.

Abstract

The classification of finite dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{D}_m$, $m = 2n = 4t$ and $t \geq 3$, was completed in [12], for the case where $\Bbbk$ is an algebraically closed field of characteristic zero. Unless isomorphism are such algebras: 1) $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, with $I = \{(i,k)\} \in \mathcal{J}$ and $k \neq n$; 2) $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, with $L \in \mathcal{L}$; 3) $A_I(\lambda,\gamma)$ with $|I| > 1$ ou $I = \{(i,n)\}$ and $\gamma = 0$ and 4) $B_{I,L}(\lambda,\gamma,\theta,\mu)$ with $(I,L) \in \mathcal{K}, |I| > 0$ and $|L| > 0$. The sets $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$ and $\mathcal{K}$ are from the classification method used and are such that the Nichols' algebras $\mathcal{B}(M_I)$, $\mathcal{B}(M_L)$ and $\mathcal{B}(M_{I,L})$, these last one associated to the algebras of item 4, are finite dimensional and λ, γ, θ and μ are elements families of $\Bbbk$. This work contributes to the theory of representation of these algebras. Calculated complete sets of simple and non-isomorphic modules on the algebras described in the first two items and for $A_I(0,0)$, wherein $I \in \mathcal{J}$. In addition, it was studied the $A_I(\lambda,\gamma)$ - modules and classify them effectively as being simple or not, for the case where $\gamma = 0$ and I is a specific set.

Keywords: Pointed Hopf algebras, Simple modules, Dihedral Group, Grothendieck ring.

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O problema de classificação de álgebras de Hopf sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero tem sido bastante estudado. Resultados significativos têm sido obtidos para as álgebras de Hopf, cujas subcoálgebras simples tem dimensão um, ou seja, as pontuadas. Neste caso, se $G(H)$ é o grupo dos elementos grouplikes da álgebra de Hopf H então seu coradical é a álgebra de grupo $\Bbbk G(H)$.

Um método de classificação de álgebras de Hopf pontuadas que se destaca é o método de levantamento, introduzido em [6]. Neste artigo, os autores realizam a classificação das álgebras de Hopf pontuadas quando o grupo dos elementos grouplikes é abeliano e possui uma restrição na dimensão do grupo. No caso em que o grupo não é abeliano, o problema está em aberto e contribuições têm sido feitas para grupos específicos, por exemplo, em [2], [12], [14] e [13].

Seja $\mathbb{D}_m$ o grupo dihedral de ordem $2m$. A classificação de álgebras de Hopf pontuadas e finito dimensionais tais que $G(H) = \mathbb{D}_m$, em que $m = 2n = 4t$ e $t \geq 3$, foi concluída em [12], para o caso em que $\Bbbk$ é um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Por ([12], Theorem B), a menos de isomorfismo, tais álgebras são:

(a) $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ com $I = \{(i,k)\} \in \mathcal{J}, k \neq n$;

(b) $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ com $L \in \mathcal{L}$;

(c) $A_I(\lambda, \gamma)$ com $I \in \mathcal{J}, |I| > 1$, ou $I = \{(i,n)\}$ e $\gamma = 0$;

(d) $B_{I,L}(\lambda, \gamma, \theta, \mu)$ com $(I, L) \in \mathcal{K}, |I| > 0$ e $|L| > 0$.

As álgebras descritas nos itens (a) e (b) são bosonizações, onde os objetos $\mathcal{B}(M_I)$ e $\mathcal{B}(M_L)$ são álgebras de Nichols finito dimensionais na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$. Para as definições de módulo de Yetter-Drinfeld, álgebra de Nichols e bosonização veja ([26], Section 11.6, Section 15.5). Os conjuntos $\mathcal{J}$, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{K}$, citados acima, são provenientes do método de classificação utilizado e são tais que as álgebras de Nichols $\mathcal{B}(M_I)$, $\mathcal{B}(M_L)$ e $\mathcal{B}(M_{I,L})$, esta última relacionada às álgebras do item (d), possuem dimensão finita ([12], Theorem A). Para as álgebras dos itens (c) e (d), os autores apresentam conjuntos de geradores e relações, em que λ, γ, θ e μ são famílias de elementos de $\Bbbk$ satisfazendo algumas relações ([12], Definition 3.9, Definition 3.11).

Este resultado foi a principal motivação para a realização deste trabalho. Nosso objetivo inicial era calcular o anel de Grothendieck da categoria de H-módulos à esquerda finito dimensionais, para todas as álgebras de Hopf H descritas nos itens (a), (b), (c) e (d) acima. Nesse sentido, observamos que o conceito de grupo de Grothendieck de categorias com certas particularidades é um tema altamente desenvolvido e bastante estudado por muitos autores. Quando $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana $\Bbbk$-linear, onde os objetos possuem comprimento finito, o grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$, $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, é um grupo abeliano livre gerado por classes de isomorfismos de objetos simples. Ainda pensando em categorias $\mathcal{C}$ (que generalizam a estrutura monóide), as chamadas categorias monoidais, acrescidas de certas "condições de finitude" o grupo $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, torna-se um anel, chamado anel de Grothendieck de $\mathcal{C}$.

Deste modo, torna-se necessário calcular os módulos simples sobre as álgebras apresentadas anteriormente. Iniciamos estudando os módulos simples sobre as álgebras dos itens (a) e (b). Nestes cálculos, a referência [14] foi muito útil, pois o autor também calcula módulos simples sobre álgebras que são bosonizações de álgebras de Nichols com álgebras de grupo. Tentamos, sem sucesso, verificar as hipóteses das álgebras dadas em [14] para as álgebras dadas em (a) e (b), porém conseguimos fazer uma adaptação da prova realizada em [14].

Considerando uma álgebra de Hopf H, o anel de Grothendieck de H é definido como o anel de Grothendieck da categoria de H-comódulos à esquerda (à direita) finito dimensionais e é estudado, por exemplo, em [17] e em [21]. Neste último, podemos observar que os anéis de Grothendieck são ferramentas importantes para a resolução de certos problemas como a verificação de uma conjectura de Kaplansky.

A partir desta definição, nos propomos a calcular o anel de Grothendieck da categoria de H-comódulos à direita finito dimensionais, em que H é cada uma das álgebras (a), (b), (c) e (d), citadas acima. Resolvemos este problema para uma álgebra de Hopf pontuada finito dimensional qualquer. Para tanto, usamos a bijeção existente entre as subcoálgebras simples de uma coálgebra C e as classes de isomorfismos de C-comódulos simples, veja ([20], 1.6 Lemma). Como tal resolução não apresentou uma complexidade considerável, optamos por incluí-la no Capítulo 1, na seção em que tratamos da teoria de anéis de Grothendieck.

Com relação às álgebras descritas no item (c) acima, observamos que para $\lambda \equiv 0 \equiv \gamma$ temos $A_I(0,0) \simeq \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ ([12], Lemma 3.16). Assim, o problema de calcular $A_I(0,0)$-módulos simples é resolvido do mesmo modo que para as álgebras descritas nos itens (a) e (b). Estudamos também os $A_I(\lambda,\gamma)$-módulos no caso específico em que $I = \{(i,n)\}$ e $\gamma = 0$, para cada $1 \leq i \leq n-1$, i ímpar. Nesse caso, em [12], a álgebra é denotada por $A_{i,n}(\lambda)$. Esta álgebra não é uma bosonização como as anteriores e portanto tornou-se necessário buscar outras formas de calcular os módulos sobre ela. Estudamos referências que fazem estudos similares, por exemplo [14], onde o autor calcula todos os módulos simples sobre uma álgebra de Hopf pontuada H tal que $G(H) = \mathbb{S}_3$. Em [13], são construídos alguns módulos simples sobre algumas álgebras de Hopf pontuadas sobre $\mathbb{S}_4$. Na referência [29], são calculados os módulos simples sobre uma álgebra de Hopf pontuada sobre $\mathbb{Z}_n$ tal que a característica do corpo é positiva.

Observamos que a álgebra de Hopf $A_{i,n}(\lambda)$ é pontuada e seu coradical é a álgebra de grupo $\Bbbk\mathbb{D}_m$ ([12], Theorem A). Deste modo, a ideia chave para estudarmos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos é enxergá-los como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, pois a álgebra $\Bbbk\mathbb{D}_m$ é semissimples e os $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples são bem conhecidos na literatura, veja, por exemplo ([25], Section 5.3). Isto é, dado um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo M, temos que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ (M com a ação restrita à $\Bbbk\mathbb{D}_m$) é isomorfo a um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo simples ou é isomorfo uma soma direta de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples. Concentramos nossa atenção na classificação dos $A_{i,n}(\lambda)$-módulos quanto ao fato de ser ou não simples e tal classificação tornou-se o objetivo principal desta tese de doutorado. Também nos preocupamos em caracterizar os objetos simples encontrados a fim de, no futuro, calcularmos o anel de Grothendieck associado.

Alertamos que, em todo este trabalho, $\Bbbk$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

O trabalho está organizado como segue. No primeiro capítulo recordamos resultados básicos como álgebras de Hopf pontuadas, teoria de representações de grupos e de álgebras e anéis de Grothendieck. Além disso, como as nossas álgebras são levantamentos de álgebras de Nichols finito dimensionais na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$, apresentamos resumidamente a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, em que H é uma álgebra de Hopf. Definimos uma álgebra de Nichols nesta categoria, para o caso em que

H possui antípoda bijetora e finalizamos com o conceito de bosonização.

Na seção em que tratamos de anéis de Grothendieck, calculamos dois exemplos. Um deles é o anel de Grothendieck da categoria de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos à esquerda finito dimensionais. Este exemplo será importante para caracterizarmos os anéis de Grothendieck calculados no Capítulo 3. Observamos ainda, que a teoria de representação de álgebras possui um papel fundamental neste trabalho, pois muitas vezes é mais conveniente enxergar um A-módulo como uma representação.

Em [12], as álgebras $A_I(\lambda,\gamma)$ e $A_{i,n}(\lambda)$ são caracterizadas por seus geradores e relações. Como $A_I(0,0)\simeq\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ então também temos os geradores e relações de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, para qualquer I. Já os geradores de $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ não são apresentados explicitamente em [12] e então calculamos os mesmos no Capítulo 2. A fim de deixar o trabalho padronizado, também calculamos os geradores da álgebra $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Para tanto, gastamos um tempo entendendo os objetos M_I e M_L, que são somas de objetos simples na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$. A partir destes objetos construímos as álgebras de Nichols $\mathcal{B}(M_I)$ e $\mathcal{B}(M_L)$ e finalmente obtemos os geradores e relações das respectivas bosonizações. Mostramos explicitamente um isomorfismo entre as álgebras de Hopf $A_I(0,0)$ e $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

No Capítulo 3, calculamos um conjunto completo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples não isomorfos e o anel de Grothendieck da categoria ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$. Mostramos que este anel é isomorfo ao anel de Grothendieck da categoria ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$ e consequentemente obtemos as regras de fusão de $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$, isto é, todas as relações da forma $[S_i][S_j]=\sum_{k\in I}\alpha_k[S_k]$, em que $\{[S_k],k\in I\}$ é um conjunto de classes de isomorfismos de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples. Fazemos o mesmo para a álgebra de Hopf $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, usando os geradores calculados no capítulo anterior.

No quarto capítulo estudamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos. Por ser o capítulo principal da tese, explicamos a seguir um pouco de cada seção. Seja

$$\mathcal{S}=\{M_{\chi_1},M_{\chi_2},M_{\chi_3},M_{\chi_4},M_{\rho_l},1\leq l\leq n-1\},$$

um conjunto completo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples e não isomorfos, em que $m=2n=4t$. Nesta notação, estamos considerando $l\in\mathbb{N}$ e omitimos esta informação adiante. Para o que segue, ω é uma raiz m-ésima primitiva da unidade.

Na Seção 4.1, mostramos que há exatamente um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples M tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}=M_{\chi_j}$, para cada $j\in\{1,2,3,4\}$. Se $1\leq l\leq$

$n-1$ e $\omega^{2li}=1$ então também existe apenas um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples M tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}=M_{\rho_l}$. Agora, para $l=\frac{n}{2}$ existem quatro $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples não isomorfos tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}=M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$. Se $\omega^{2li}\neq 1$ e $l\neq\frac{n}{2}$ então não existe um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq M_{\rho_l}$.

Na Seção 4.2, mostramos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{\jmath=1}^{s}M_{\chi_{\imath_\jmath}}$, em que $\imath_\jmath\in\{1,2,3,4\}$ e $s\geq 2$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Na Seção 4.3, provamos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{\jmath=1}^{s}M_{\chi_{\imath_\jmath}}\bigoplus\oplus_{k=1}^{r}M_{\rho_{l_k}}$, em que $\imath_\jmath\in\{1,2,3,4\}, 1\leq l_k\leq n-1$ e $r,s\geq 1$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Na Seção 4.4, estudamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{j=1}^{r}M_{\rho_{l_j}}$, em que $1\leq l_j\leq n-1$ e $r\geq 2$. Mais precisamente, analisamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M divididos nos seguintes casos:

(i) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{k=1}^{r}M_{\rho_{l_k}}$ e $\omega^{2l_ki}=1$, para todo $1\leq k\leq r$;

(ii) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{k=1}^{r}M_{\rho_{l_k}}$ e $l_k=\frac{n}{2}$, para todo $1\leq k\leq r$;

(iii) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{k=1}^{r}M_{\rho_{l_k}}\bigoplus\oplus_{k=1}^{s}M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$, em que $r,s\geq 1$ e $\omega^{2l_ki}=1$, para todo $1\leq k\leq r$;

(iv) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{j=1}^{r}M_{\rho_{l_j}}\bigoplus\oplus_{k=1}^{s}M_{\rho_{l_k}}$, em que $r,s\geq 1$, $[\omega^{2l_ji}\neq 1$ e $l_j\neq\frac{n}{2}]$ e $[\omega^{2l_ki}=1$ ou $l_k=\frac{n}{2}]$, para quaisquer $1\leq j\leq r$ e $1\leq k\leq s$;

(v) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{k=1}^{r}M_{\rho_{l_k}}$ e $[\omega^{2l_ki}\neq 1$ e $l_k\neq\frac{n}{2}]$, para todo $1\leq k\leq r$.

Mostramos que não existem $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples satisfazendo as condições dos itens (i), (iii) e (iv). No caso (ii), mostramos que não existem $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples para $r\geq 5$.

Resolvemos o caso (v) para $r=2$, $r=3$ e $r>4$. Para $r=2$, encontramos as restrições necessárias para M ser simples. Para $r=3$, mostramos que não existe um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo nestas condições. Para $r=4$ não foi possível resolvermos. Para $r>4$, mostramos que se existir um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo, então o mesmo não é simples.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Neste capítulo, com o objetivo de deixar o trabalho o mais autocontido possível, escrevemos conceitos conhecidos que são necessários posteriormente.

1.1 Álgebras de Hopf pontuadas

As álgebras de Hopf pontuadas são usadas no decorrer de todo o trabalho. Por este motivo, de acordo com as referências [19], [9] e [26], iniciamos relembrando este conceito e alguns resultados relacionados. Assumimos conhecidos ao leitor os conceitos de coálgebras e biálgebras.

Para o que segue, consideramos $\Bbbk$ um corpo e (C, Δ, ε) uma $\Bbbk$-coálgebra. Usando a notação de Sweedler e omitindo o somatório, escrevemos $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, para todo $c \in C$.

Definição 1.1.1 *Um elemento $c \in C$ tal que $\Delta(c) = c \otimes c$ é chamado elemento grouplike. O conjunto de todos os elementos grouplikes de C é denotado por $G(C)$.*

Definição 1.1.2 *Um elemento $x \in C$ tal que $\Delta(x) = x \otimes g + h \otimes x$, em que $g, h \in G(H)$, é chamado (g, h)-primitivo ou skew-primitivo.*

Se C é uma biálgebra então Δ é um morfismo de álgebras e consequentemente $1 \in G(C)$. Os elementos $(1, 1)$-primitivos são denominados primitivos e o conjunto de todos os elementos primitivos de C é denotado por $P(C)$.

Definição 1.1.3 *O coradical de C, denotado por C_0, é a soma de todas as subcoálgebras simples de C.*

Definição 1.1.4 *Dizemos que C é uma coálgebra pontuada se toda subcoálgebra simples de C possui dimensão 1.*

No próximo lema são caracterizadas as subcoálgebras de dimensão 1 de uma coálgebra. Este resultado, além de ser utilizado na Proposição 1.1.6, também é importante na Subseção 1.3.4.

Lema 1.1.5 ([9], Proposition 5.5.1, (i),(ii)) *Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra. Então são válidas as afirmações.*
(i) *Todo coideal à direita (à esquerda) de C de dimensão 1 é gerado por elementos grouplikes.*
(ii) *Existe uma correspondência bijetora entre $G(C)$ e o conjunto dos morfismos de coálgebra de $\Bbbk$ para C. Deste modo, toda subcoálgebra de dimensão 1 de C é da forma $\Bbbk g$, para algum $g \in G(C)$.*

Demonstração: (ii) Se $\alpha : \Bbbk \to C$ é um morfismo de coálgebras então $g = \alpha(1) \in G(C)$. Além disso, se $g \in G(C)$ então a função $f : \Bbbk \to C$, tal que $f(1) = g$, é um morfismo de coálgebras. ∎

A proposição a seguir oferece outra caracterização para as coálgebras pontuadas.

Proposição 1.1.6 ([19], Section 5.1) *C é uma coálgebra pontuada se, e somente se, o coradical C_0 é coálgebra de grupo $\Bbbk G(C)$.*

Demonstração: Sejam C uma coálgebra pontuada e C' uma subcoálgebra simples de C. Como C é pontuada, segue que C' tem dimensão 1, e assim, pelo item (ii) do Lema 1.1.5, obtemos $C' = \Bbbk g$, para algum $g \in G(C)$. Consequentemente, $C_0 \subseteq \Bbbk G(C)$.

Por outro lado, dados $g \in G(C)$ e $k \in \Bbbk$, temos que $\Delta(kg) = kg \otimes g \in \Bbbk g \otimes \Bbbk g$. Logo, $\Bbbk g$ é uma subcoálgebra simples de C. Deste modo, $\Bbbk G(C) \subseteq C_0$. ∎

Na sequência relembramos os conceitos de álgebras de Hopf e álgebras de Hopf pontuadas.

Definição 1.1.7 ([19], Definition 1.4.1) *Sejam A uma álgebra e C uma coálgebra. Então $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ é uma álgebra com o produto de convolução $(f * g)(c) = m(f \otimes g)(\Delta c)$, para quaisquer $f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ e $c \in C$. A unidade de $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ é $\mu\varepsilon$.*

Definição 1.1.8 ([19], Definition 1.5.1) *Uma álgebra de Hopf sobre $\Bbbk$ é uma biálgebra H sobre $\Bbbk$ tal que a função identidade I_H possui uma inversa S em relação ao produto de convolução, denominada antípoda, na álgebra $End_{\Bbbk}(H)$.*

Exemplo 1.1.9 ([19], Exemple 1.5.3) *Se G é um grupo então a álgebra de grupo $\Bbbk G$ é uma álgebra de Hopf. De fato, basta definirmos $S(g) = g^{-1}$, para todo $g \in G$. Além disso, se H é uma álgebra de Hopf então $G(H)$ é um grupo com o produto induzido por H.*

Definição 1.1.10 ([26], Definition 5.1.13) *Uma biálgebra pontuada é uma biálgebra tal que sua estrutura de coálgebra é pontuada.*

Deste modo, uma álgebra de Hopf pontuada é uma álgebra de Hopf tal que sua estrutura de coálgebra é pontuada. Se H é uma álgebra de Hopf pontuada então $G(H)$ é um grupo e assim, $H_0 = \Bbbk G(H)$ é uma álgebra de Hopf, veja o exemplo acima. Na literatura, as álgebras de Hopf pontuadas H tais que $G(H) = G$ são chamadas de álgebras de Hopf pontuadas sobre G.

Lembramos alguns fatos sobre espaços graduados que são necessários neste e no próximo capítulo.

Definição 1.1.11 *Seja S um conjunto não vazio. Um $\Bbbk$-espaço vetorial V é S-graduado se $V = \oplus_{s \in S} V(s)$, em que $V(s)$ é $\Bbbk$-subespaço vetorial de V, para cada $s \in S$. Um subespaço S-graduado de V é um subespaço W de V tal que $W = \oplus_{s \in S}(V(s) \cap W)$.*

Definição 1.1.12 *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é uma álgebra graduada se $A = \oplus_{n \geq 0} A(n)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial graduado, $A(n)A(m) \subseteq A(n+m)$, para quaisquer $n, m \geq 0$ e $1 \in A(0)$.*

Definição 1.1.13 *Seja C uma coálgebra. Dizemos que C é uma coálgebra graduada se $C = \oplus_{n \geq 0} C(n)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial graduado, $\Delta(C(n)) \subseteq \sum_{i=0}^{n} C(n-i) \otimes C(i)$, para cada $n \geq 0$ e $\varepsilon(C(n)) = 0$, para cada $n \neq 0$.*

Um ideal à esquerda (respectivamente ideal à direita, ideal) graduado de uma álgebra graduada é um ideal à esquerda (respectivamente ideal à direita, ideal) que é $\Bbbk$-subespaço vetorial graduado.

Uma biálgebra (respectivamente álgebra de Hopf) graduada é um $\Bbbk$-espaço vetorial graduado cuja graduação o torna uma álgebra graduada e uma coálgebra graduada.

O lema a seguir é útil no próximo capítulo.

Lema 1.1.14 ([26], Exercise 4.4.9 (a)) *Sejam $A = \oplus_{n \geq 0} A(n)$ uma álgebra graduada e V um $\Bbbk$-subespaço vetorial graduado de A. Então $I = < V >$, o ideal gerado por V, é um ideal graduado de A.*

Demonstração: Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em ([23], Proposição 1.13). ■

1.2 Representações de grupos e de álgebras

1.2.1 Representações de grupos

Nessa subseção, de acordo com as referências [8] e [11] relembramos algumas definições e resultados que são úteis para a próxima subseção e também para o Capítulo 2.

Consideramos G um grupo com notação multiplicativa e denotamos por $GL(M)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis de um $\Bbbk$-espaço vetorial M.

Definição 1.2.1 ([11], pg. 59) *Seja G um grupo. Uma representação de G é um par (M, T), em que M é um $\Bbbk$-espaço vetorial e $T : G \to GL(M)$ é um homomorfismo de grupos.*

É comum na literatura uma representação ser simplesmente denotada por T ou M, ao invés do par (M, T). Quando M é um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita dizemos que a representação é finito dimensional. Nesse caso, se $\dim_{\Bbbk} M = n$ então dizemos que a representação T tem grau ou dimensão n. Naturalmente que, neste caso, os operadores $T(g) : M \to M$, para todo $g \in G$, podem ser representados por uma matriz invertível $n \times n$ em relação à uma dada base β fixada de M, $[T(g)]_\beta$, sendo esta sua representação matricial. Todavia ao longo deste trabalho, escreveremos simplesmente $T(g)$ para denotar sua respectiva matriz em relação a tal base β fixada de M, o contexto não permitirá confusão quanto ao uso de tal notação.

Para o que segue consideramos G um grupo finito e representações finito dimensionais.

Definição 1.2.2 ([8], (9.1) Definition) *Sejam $T_1 : G \to GL(M_1)$ e $T_2 : G \to GL(M_2)$ duas representações de G. Dizemos que T_1 e T_2 são representações equivalentes se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $S : M_1 \to M_2$ tal que $T_2(g)S = ST_1(g)$, para todo $g \in G$.*

Sejam G um grupo finito e $T : G \to GL(M)$ uma representação de G. Um G-subespaço de M é um subespaço vetorial N de M tal que $T(g)(N) \subseteq N$, para todo $g \in G$ ([8], pg. 38). Assim, $\{0\}$ e M são G-subespaços triviais de M.

Definição 1.2.3 ([8], (10.2) Definition) *Uma representação $T : G \to GL(M)$ tal que $M \neq 0$ é denominada irredutível se os únicos G-subespaços de M são $\{0\}$ e M. Caso contrário, T é redutível.*

Na sequência introduzimos uma das ferramentas mais importantes no estudo de representações de um grupo.

Definição 1.2.4 ([11], Section 4.2) *Seja $T : G \to GL(M)$ uma representação de dimensão finita de G. Então o caracter de T é a função $\mu_T : G \to \Bbbk$ definida por $\mu_T(g) = tr(T(g))$, em que tr é o traço de $T(g)$.*

Quando conveniente também denotamos o caracter por μ_M invés de μ_T.

Proposição 1.2.5 ([11], Corollary 4.2.4) *Seja $\Bbbk$ um corpo de característica zero. Então qualquer representação de G é totalmente determinada por seu caracter, ou seja, se $\mu_M = \mu_N$ então $T : G \to GL(M)$ e $F : G \to GL(N)$ são representações equivalentes.*

O resultado a seguir é útil para calcularmos um conjunto completo de representações irredutíveis não equivalentes de um específico grupo dihedral G, tal grupo é a mola mestra deste trabalho, abaixo especificamos melhor tal G.

Proposição 1.2.6 ([11], Corollary 4.2.2.) *O número de classes de isomorfismos de representações irredutíveis de um grupo G é igual o número de classes de conjugações de G (se $|G| \neq 0$ em $\Bbbk$).*

Seja m um inteiro positivo, $m \geq 3$. Expressamos o grupo dihedral de ordem $2m$ em termos de seus geradores e relações por

$$\mathbb{D}_m =< g, h : g^2 = 1 = h^m, gh = h^{-1}g > .$$

Neste trabalho, $m = 4t$ com $t \geq 3$ e $n = \frac{m}{2} = 2t$ e portanto, m e n são ambos pares, pois trabalharemos com as álgebras de Hopf pontuadas sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ com m nessas condições. Tais álgebras foram totalmente classificadas em [12], onde o fato de m ser par é relevante. A teoria de representação de $\mathbb{D}_m$ para m par, é diferente da teoria de representações para m ímpar. Para o que segue, sugerimos [12].

É sabido da literatura que o dihedral $\mathbb{D}_m$ explicitado acima possui 4 representações de dimensão 1 e $n-1$ representações de dimensão 2. Dessa maneira, os espaços vetoriais M em questão são isomorfos a $\Bbbk$, no caso das representações de dimensão 1 e isomorfos a $\Bbbk^2$, no caso das de dimensão 2.

Denotamos por χ_j, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, as representações de dimensão 1 de $\mathbb{D}_m$ que são dadas na tabela abaixo. Uma referência é ([25], Section 5.3).

Tabela 1.1: Representações de grau 1 de $\mathbb{D}_m$

	1	h^n	$h^b,\ \ 1 \leq b \leq n-1$	g	gh
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^n = 1$	$(-1)^b$	1	-1
χ_4	1	$(-1)^n = 1$	$(-1)^b$	-1	1

Seja ω uma raiz m-ésima primitiva de 1. As representações de grau 2 de $\mathbb{D}_m$ são denotadas por ρ_l, para cada $1 \leq l \leq n-1$, e dadas matricialmente por

$$\rho_l(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \rho_l(h) = \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}$$

em relação à uma base $\beta = \{v_1, v_2\}$ fixada de $\Bbbk^2$. Para $1 \leq l \leq n-1$, $a \in \{0,1\}$ e $b \in \{0, \cdots, m-1\}$, temos

$$\rho_l(g^a h^b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}^b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^a \begin{pmatrix} \omega^{bl} & 0 \\ 0 & \omega^{-bl} \end{pmatrix}.$$

Observemos que as representações ρ_l podem ser definidas para qualquer $0 \leq l \leq m-1$. Todavia, são consideradas apenas para $1 \leq l \leq n-1$, devido aos fatos seguintes.

(i) As representações ρ_k e ρ_{m-k} são equivalentes, para $1 \leq k \leq n-1$. De fato, denotando por μ_k e μ_{m-k} os caracteres de ρ_k e ρ_{m-k}, respectivamente, temos

$$\mu_k(h^b) = \omega^{kb} + \omega^{-kb} = \mu_{m-k}(h^b)$$

e

$$\mu_k(gh^b) = 0 = \mu_{m-k}(gh^b),$$

para todo $b \in \{0, \cdots, m-1\}$. Assim, pela Proposição 1.2.5, ρ_k e ρ_{m-k} são equivalentes, para $1 \leq k \leq n-1$.

(ii) As representações ρ_n e $\chi_3 \oplus \chi_4$ são equivalentes. De fato, denotando por μ_n o caracter de ρ_n, temos

$$\mu_n(h^b) = \omega^{nb} + \omega^{-nb} = 2 = \chi_3(h^b) + \chi_4(h^b), \text{ para } b \text{ par},$$

$$\mu_n(h^b) = \omega^{nb} + \omega^{-nb} = -2 = \chi_3(h^b) + \chi_4(h^b), \text{ para } b \text{ ímpar}$$

e

$$\mu_n(gh^b) = 0 = \chi_3(gh^b) + \chi_4(gh^b), \quad 0 \leq b \leq m-1.$$

(iii) As representações ρ_0 e $\chi_1 \oplus \chi_2$ são equivalentes. De fato, seja μ_0 o caracter de ρ_0 então, para todo $b \in \{0, \cdots, m-1\}$, temos

$$\mu_0(h^b) = \omega^0 + \omega^{-0} = 2 = \chi_1(h^b) + \chi_2(h^b)$$

e

$$\mu_0(gh^b) = 0 = \chi_1(gh^b) + \chi_2(gh^b).$$

Antes de passarmos ao próximo resultado observamos que, para todo $1 \leq l \leq n-1$,

$$\rho_l(g)(v_1) = v_2 \ \text{ e } \ \rho_l(g)(v_2) = v_1 \tag{1.1}$$

e também que

$$\rho_l(h)(v_1) = \omega^l v_1 \ \text{ e } \ \rho_l(h)(v_2) = \omega^{-l} v_2. \tag{1.2}$$

Proposição 1.2.7 *As representações $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$ formam um conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes de $\mathbb{D}_m$.*

Demonstração: As representações χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 são irredutíveis, pois possuem dimensão um.

Seja $1 \leq l \leq n-1$. Mostremos que ρ_l é irredutível. Suponhamos que ρ_l seja redutível, então existe um $\Bbbk$-subespaço não trivial U de $\Bbbk^2$ tal que $\rho_l(\mathbb{D}_m)(U) \subseteq U$. Claramente, o $\Bbbk$-subespaço U possui dimensão um e assim, existe $u \in U$ não-nulo tal que $U = \Bbbk u$.

Escrevemos $u = av_1 + bv_2$. Como $\rho_l(g)(u) \in U$, segue que existe $\gamma \in \Bbbk$ tal que $\rho_l(g)(u) = \gamma u$ e portanto, matricialmente temos

$$\rho_l(g)(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

em que $[u]_\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ é o vetor coordenada de u.

Cálculos simples nos dão que $a = b\gamma$ e $b = a\gamma$ e assim, $a(1-\gamma^2) = 0$. Portanto, $a = 0$ ou $\gamma^2 = 1$. Se $a = 0$ então $b = 0$ e isso implica que $u = 0$, absurdo. Logo, $\gamma = 1$ ou -1.

Se $\gamma = 1$ então $a = b$ e como $\rho_l(h)(u) \in U$, segue que $\rho_l(h)(u) = \gamma' u$, para algum $\gamma' \in \Bbbk$. Matricialmente, temos

$$\begin{pmatrix} \omega^l a \\ \omega^{-l} a \end{pmatrix} = \gamma' \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

e isso implica que $\omega^l = \omega^{-l}$, ou seja, $\omega^{2l} = 1$, o que é um absurdo, pois $2l < 2n = m$ e m é o menor inteiro positivo tal que $\omega^m = 1$.

Se $\gamma = -1$ então $b = -a$ e como $\rho_l(h)(u) \in U$, segue que $\rho_l(h)(u) = \gamma'' u$, para algum $\gamma'' \in \Bbbk$. De maneira inteiramente análoga ao anterior, chegaremos ao mesmo absurdo.

Portanto, $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$ é um conjunto de representações irredutíveis de $\mathbb{D}_m$. Mostremos que tais representações não são duas a duas equivalentes.

Como as representações χ_j, $1 \leq j \leq 4$ possuem dimensão um, as mesmas não são equivalentes às representações $\rho_l, 1 \leq l \leq n-1$, pois estas últimas possuem dimensão dois.

Sejam $1 \leq l_1 < l_2 \leq n-1$ e suponhamos, por absurdo, que ρ_{l_1} e ρ_{l_2} sejam representações equivalentes. Então existe um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais $S : \Bbbk^2 \to \Bbbk^2$ tal que $(S\rho_{l_1}(s))(v) = (\rho_{l_2}(s)S)(v)$, para quaisquer $s \in G$ e $v \in \Bbbk^2$. Em particular, para $s = h$ e $v = v_1$, temos por um lado que

$$(S\rho_{l_1}(h))(v_1) = S(\rho_{l_1}(h)(v_1)) = S(\omega^{l_1} v_1) = \omega^{l_1} S(v_1),$$

em que a segunda igualdade segue de (1.2).

Por outro lado, escrevendo $S(v_1) = av_1 + bv_2$ em função da base β de $\Bbbk^2$, temos que

$$\begin{array}{rcl}
(\rho_{l_2}(h)S)(v_1) & = & \rho_{l_2}(h)(S(v_1)) \\
 & = & \rho_{l_2}(h)(av_1 + bv_2) \\
 & = & a(\rho_{l_2}(h)(v_1)) + b(\rho_{l_2}(h)(v_2)) \\
 & = & a\omega^{l_2} v_1 + b\omega^{-l_2} v_2,
\end{array}$$

em que a última igualdade segue de (1.2). Mas

$$\omega^{l_1} S(v_1) = \omega^{l_1}(av_1 + bv_2) = a\omega^{l_2} v_1 + b\omega^{-l_2} v_2$$

e assim, $a(\omega^{l_1} - \omega^{l_2}) = 0$ e $b(\omega^{l_1} - \omega^{-l_2}) = 0$. Além disso, $S(v_1) \neq 0$, pois S é um isomorfismo e com isso, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se $a = 0$ então $b \neq 0$ e portanto, $\omega^{l_1} = \omega^{-l_2}$ e isso implica que $\omega^{l_1 + l_2} = 1$, o que é absurdo, pois $l_1 + l_2 < m$ e m é o menor inteiro positivo tal que $\omega^m = 1$. Se $b = 0$ então $a \neq 0$ e $\omega^{l_1} = \omega^{l_2}$, um absurdo, pois $1 \leq l_1 < l_2 \leq n-1$ e portanto, $\omega^{l_1} \neq \omega^{l_2}$.

Finalmente, vejamos que as representações χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 não são duas a duas equivalentes.

Sejam $k, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, $k \neq t$. Suponhamos, por absurdo, que χ_k e χ_t sejam representações equivalentes. Então existe um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais $S : \Bbbk \to \Bbbk$ com $S(1) = \alpha$, para algum $\alpha \neq 0$

e $(S\chi_k(s))(r) = (\chi_t(s)S)(r)$, para quaisquer $s \in G$ e $r \in \Bbbk$. Em particular, para $r = 1$, temos

$$\begin{array}{rcl}(S\chi_k(s))(1) & = & S(\chi_k(s)(1)) \\ & = & \chi_k(s)(1)S(1) \\ & = & \chi_k(s)(1)\alpha \\ & = & \alpha\chi_k(s)(1)\end{array}$$

e também

$$\begin{array}{rcl}(\chi_t(s)S)(1) & = & \chi_t(s)(S(1)) \\ & = & S(1)\chi_t(s)(1) \\ & = & \alpha\chi_t(s)(1).\end{array}$$

Como $\alpha \neq 0$, $\chi_k(s)(1) = \chi_t(s)(1)$ e como $\{1\}$ é uma base de $\Bbbk$, segue que $\chi_k(s) = \chi_t(s)$, para todo $s \in G$. Logo, $\chi_k = \chi_t$, absurdo, pois como $k \neq t$, $\chi_k \neq \chi_t$. Concluímos que as representações χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 não são duas a duas equivalentes.

Sendo m par, a quantidade de classes de conjugação de $\mathbb{D}_m$ é igual a $n+3$. Pela proposição anterior, segue que que $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$ é um conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes de $\mathbb{D}_m$. ■

A partir de duas representações podemos obter novas representações. A seguir, recordamos a soma direta e o produto tensorial de representações, respectivamente.

Definição 1.2.8 ([27], pg. 4) *Sejam $\rho : G \to GL(V)$ e $\sigma : G \to GL(W)$ representações de G. Definimos a representação soma direta $\rho \oplus \sigma : G \to GL(V \oplus W)$ por $(\rho \oplus \sigma)(g)(v, w) = (\rho(g)(v), \sigma(g)(w))$, para quaisquer $g \in G$ e $(v, w) \in V \oplus W$.*

Definição 1.2.9 ([27], pg. 4) *Sejam $\rho : G \to GL(V)$ e $\sigma : G \to GL(W)$ representações de G. Definimos a representação produto tensorial $\rho \otimes \sigma : G \to GL(V \otimes W)$ por $(\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) = \rho(g)(v) \otimes \sigma(g)(w)$, para quaisquer $g \in G$ e $v \otimes w \in V \otimes W$.*

1.2.2 Representações de álgebras

Nessa subseção recordamos algumas definições e resultados principais úteis aos capítulos posteriores, utilizamos as bibliografias [8], [11] e [22]. Embora trabalhemos com álgebras finito dimensionais, alguns dos resultados e definições apresentados valem independentemente da dimensão, como por exemplo, a definição de representação de álgebra.

Definição 1.2.10 ([11], Definition 2.3.1.) *Seja A uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{k}$. Uma representação de A é um par (M, T), em que M é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial e $T : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(M)$ é um homomorfismo de $\mathbb{k}$-álgebras.*

Algumas vezes escrevemos apenas T ou M para nos referirmos à uma representação. A $\mathbb{k}$-álgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{k}}(M)$ é chamada álgebra de endomorfismos do $\mathbb{k}$-espaço vetorial M cujo elemento unidade é a identidade I_M. Se a dimensão de M é finita, dizemos que a representação é finito dimensional. Mais especificamente, se $\dim_{\mathbb{k}} M = n$, a representação diz-se de grau ou dimensão n.

Proposição 1.2.11 ([22], Seção 1.3) *Seja A uma $\mathbb{k}$-álgebra. Então as representações de A estão em correspondência biunívoca com os A-módulos à esquerda.*

Demonstração: Se $T : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(M)$ é uma representação de A, então M é um A-módulo à esquerda com a ação $am := T(a)(m)$, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$.

Reciprocamente, se M é um A-módulo à esquerda, então é fácil ver que M é um $\mathbb{k}$-espaço vetorial (pois A é uma $\mathbb{k}$-álgebra). Para cada $a \in A$, definimos $T(a)(m) := am$, para todo $m \in M$, decorrendo então que T é um morfismo de álgebras. Logo, o par (M, T) é uma representação de A. Notemos que se λ é outra representação associada à estrutura de A-módulo de M, isto é, $\lambda(a)(m) = T(a)(m)$, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$, então $T = \lambda$ e temos uma bijeção. ■

Em particular, fixada uma $\mathbb{k}$-álgebra A, as representações finito dimensionais de A estão em correspondência biunívoca com os A-módulos à esquerda finito dimensionais.

Nesse trabalho, todos A-módulos são considerados à esquerda, assim a palavra esquerda será omitida. A próxima definição será muito usada, uma vez que nossas representações são todas finito dimensionais e por isso caracterizadas por matrizes.

Definição 1.2.12 ([8], (10.17) Definition) *Sejam $T : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(M)$ uma representação finito dimensional de A de grau n, isto é, $\dim_{\mathbb{k}} M = n$ e β uma base de M sobre $\mathbb{k}$. Para cada $a \in A$, seja $\mathbf{T}(a) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{k})$ a matriz de $T(a)$ em relação à base β. Então $\mathbf{T} : A \to \mathbb{M}_n(\mathbb{k})$, em que $a \mapsto \mathbf{T}(a)$, é chamada representação matricial de T (ou M).*

Dada uma representação (M, T) de grau n e tendo em vista a definição acima, a ação dada na Proposição 1.2.11 é representada matricialmente por $[T(a)(m)]_\beta = [T(a)]_\beta [m]_\beta$, em que β é uma base de M e

$[m]_\beta$ é o vetor coordenada de m em relação à base β. Em muitos dos cálculos desse trabalho faremos uso desse fato, sem qualquer menção ao mesmo.

Definição 1.2.13 ([8], (10.12) Definition) *Sejam $T_1 : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M_1)$ e $T_2 : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M_2)$ duas representações de A. Dizemos que T_1 e T_2 são representações equivalentes se existe um isomorfismo de espaços vetoriais $S : M_1 \to M_2$ tal que $T_2(a)S = ST_1(a)$, para todo $a \in A$.*

De acordo com ([11], pg. 5), uma subrepresentação de uma representação T de A, $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$, é um subespaço vetorial N de M tal que $T(a)(N) \subseteq N$, para todo $a \in A$. Naturalmente que $\{0\}$ e M são subrepresentações de A.

Uma representação de A, $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$, é irredutível se não existe um subespaço vetorial não trivial N de M tal que $T(a)(N) \subseteq N$, para todo $a \in A$. Caso contrário, é redutível. Equivalentemente, uma representação de A é irredutível se as únicas subrepresentações de A são $\{0\}$ e M.

Para o que segue, sugerimos ([22], seções 5.5 e 5.6), onde tanto a álgebra quanto as representações são finito dimensionais. Dada uma representação T, usamos a notação $M_T = M$ para denotarmos a estrutura de A-módulo do espaço vetorial M associado, cuja ação é dada pela Proposição 1.2.11. Lembramos que um A-módulo M é denominado simples se seus únicos submódulos são 0 e M.

Proposição 1.2.14 *Seja $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ uma representação de A. Então M_T é um A-módulo simples se, e somente se, a representação T é irredutível.*

Demonstração: Suponhamos, por hipótese, que T seja irredutível. Seja N um A-submódulo de M_T e como A é uma $\Bbbk$-álgebra, N torna-se um $\Bbbk$-espaço vetorial. Por outro lado, pela ação referida acima, restrita a N, temos que $T(a)(N) = aN \subseteq N$, para todo $a \in A$. Assim, $N = 0$ ou $N = M(= M_T)$, pois T é irredutível. Logo, M_T é um A-módulo simples.

Agora, mostremos que T é irredutível. Seja N um subespaço vetorial de M tal que $T(a)(N) \subseteq N$, para todo $a \in A$. Obviamente que N é um A-módulo com a ação, $an = T(a)(n) \in N$, para quaisquer $a \in A$ e $n \in N$, que é a ação referida acima, restrita a N. Logo, N torna-se um A-submódulo de M_T e sendo esse simples, segue que $N = 0$ ou $N = M_T(= M)$. Portanto, T é irredutível. ■

Proposição 1.2.15 *Sejam $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ e $F : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M')$ representações de uma álgebra A. Os A-módulos M_T e M'_F são isomorfos se, e somente se, T e F são equivalentes.*

Demonstração: Suponhamos que os A-módulos M_T e M'_F sejam isomorfos e consideremos $S : M_T \to M'_F$ o tal isomorfismo de A-módulos. Temos que

$$S(T(a)(m)) = S(am) = aS(m) = F(a)(S(m)) = (F(a)S)(m),$$

para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$, ou seja, T e F são equivalentes.

Agora, suponhamos que T e F sejam equivalentes. Então existe um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais $S : M \to M'$ tal que $ST(a) = F(a)S$, para todo $a \in A$. Mostremos que S é um morfismo de A-módulos. Sejam $a \in A$ e $m \in M$. Então

$$S(am) = S(T(a)(m)) = F(a)(S(m)) = aS(m).$$

Portanto, os A-módulos M_T e M'_F são isomorfos. ■

Definição 1.2.16 *Sejam A uma álgebra e $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(P), S : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(N)$ duas representações de A. Então $T \oplus S : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(P \oplus N)$, em que*

$$(T \oplus S)(a)(p, n) = (T(a)(p), T(a)(n)),$$

para quaisquer $a \in A, p \in P$ e $n \in N$, é uma representação de A, denominada soma direta.

Definição 1.2.17 *Sejam A uma biálgebra e $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(P), S : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(N)$ duas representações de A. Então $T \otimes S : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(P \otimes_{\Bbbk} N)$, em que*

$$(T \otimes S)(a)(p \otimes n) = T(a_1)(p) \otimes S(a_2)(n),$$

onde $\Delta(a) = a_1 \otimes a_2$, é uma representação de A, denominada produto tensorial.

Proposição 1.2.18 *Sejam A uma biálgebra, $T : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(P), S : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(N)$ duas representações de A. Então $M_T \otimes M_S = M_{T \otimes S}$ e $M_T \oplus M_S = M_{T \oplus S}$ como A-módulos.*

Demonstração: Notemos que $M_T \otimes M_S = P \otimes N = M_{T \otimes S}$, como $\Bbbk$-espaços vetoriais.

Sejam $a \in A, p \in P$ e $n \in N$. Como A é uma biálgebra e M_T, M_S são A-módulos com as ações definidas pelas representações T e S, respectivamente, temos que a estrutura de A-módulo de $M_T \otimes M_S$ é

$$\begin{aligned} a \cdot (p \otimes n) &= a_1 p \otimes a_2 n \\ &= T(a_1)(p) \otimes S(a_2)(n). \end{aligned}$$

Por outro lado, a estrutura de A-módulo de $M_{T \otimes S}$ é

$$\begin{aligned} a \cdot (p \otimes n) &= (T \otimes S)(a)(p \otimes n) \\ &= T(a_1)(p) \otimes S(a_2)(n), \end{aligned}$$

em que a última igualdade segue pela definição anterior. Portanto, $M_T \otimes M_S = M_{T \otimes S}$ como A-módulos.

Analogamente, como $\Bbbk$-espaços vetoriais, $M_T \oplus M_S = P \oplus N = M_{T \oplus S}$. A ação de A em $M_T \oplus M_S$ é definida por

$$a \cdot (p, n) = (ap, an) = (T(a)(p), T(a)(n)).$$

A ação de A em $M_{T \oplus S} = P \oplus N$ é dada da seguinte forma

$$a \cdot (p, n) = (T \oplus S)(a)(p, n) = (T(a)(p), T(a)(n)).$$

Portanto, os A-módulos $M_T \oplus M_S$ e $M_{T \oplus S}$ são iguais. ■

Voltamos nossa atenção para as relações entre as representações das álgebras de grupo $\Bbbk G$ e as representações do grupo finito G que possuem relevância no Capítulo 4.

Proposição 1.2.19 ([8], pg. 45) *Existe uma bijeção entre as representações de um grupo finito G e da álgebra de grupo $\Bbbk G$.*

Demonstração: Se $T : G \to \mathrm{GL}(M)$ é uma representação de G então é possível estender T para uma representação de $\Bbbk G$, $\overline{T} : \Bbbk G \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$, definindo $\overline{T}(\sum k_g g) = \sum k_g T(g)$.

Além disso, T estende-se de maneira única a $\overline{T}$. De fato, suponhamos uma representação $\rho : \Bbbk G \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ que seja uma outra extensão de T, ou seja, $\rho|_G = T$. Então

$$\overline{T}(\sum k_g g) = \sum k_g T(g) = \sum k_g \rho|_G(g) = \rho(\sum k_g g).$$

Portanto, $\overline{T} = \rho$.

Seja agora $\overline{F} : \Bbbk G \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ uma representação de $\Bbbk G$. Consideramos a restrição $F = \overline{F}|_G$. Notemos que $F(g) \in \mathrm{GL}(M)$, pois

$$F(g)F(g^{-1}) = \overline{F}(g)\overline{F}(g^{-1}) = \overline{F}(gg^{-1}) = \overline{F}(1_G) = I_M.$$

Analogamente, $F(g^{-1})F(g) = I_M$. Logo, $F(g)$ é invertível para cada $g \in G$, ou seja, F é uma representação de G. ■

O próximo resultado segue do fato de que os $\Bbbk G$-submódulos de M são precisamente os G-subespaços de M, veja ([8], pg. 48).

Proposição 1.2.20 *Se $T : G \to \mathrm{GL}(M)$ é uma representação irredutível de G então $\overline{T}$ é uma representação irredutível de $\Bbbk G$. Ainda, se $\overline{F}$ é uma representação irredutível de $\Bbbk G$ então $\overline{F}|_G$ é uma representação irredutível de G.*

Lema 1.2.21 *Sejam A uma álgebra e $B \subseteq A$ uma subálgebra. Sejam $\rho : B \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ e $\tau : B \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(N)$ representações irredutíveis e não equivalentes de B tais que seja possível estendê-las para representações $\overline{\rho} : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ e $\overline{\tau} : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(N)$ de A. Então $\overline{\rho}$ e $\overline{\tau}$ são representações irredutíveis e não equivalentes de A.*

Demonstração: Suponhamos que $\overline{\rho}$ não seja irredutível. Então existe um $\Bbbk$-subespaço vetorial não trivial M' de M tal que $\overline{\rho}(a)(M') \subseteq M'$, para todo $a \in A$. Em particular, $\rho(b)(M') = \overline{\rho}(b)(M') \subseteq M'$, para todo $b \in B$. Isto contradiz o fato de ρ ser irredutível. Logo, $\overline{\rho}$ é irredutível. A mesma análise vale para $\overline{\tau}$.

Suponhamos que $\overline{\rho} : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M)$ e $\overline{\tau} : A \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(N)$ sejam equivalentes. Então existe um isomorfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais $S : M \to N$ tal que $S(\overline{\rho}(a)(m)) = \overline{\tau}(a)(S(m))$, para quaisquer $a \in A$ e $m \in M$ e, em particular, para todo $b \in B$, $S(\overline{\rho}(b)(m)) = \overline{\tau}(b)(S(m))$. Consequentemente, $S(\rho(b)(m)) = \tau(b)(S(m))$, para quaisquer $b \in B$ e $m \in M$. Isso nos diz que ρ e τ são representações equivalentes de B, o que é absurdo. Portanto, $\overline{\rho}$ e $\overline{\tau}$ são representações não equivalentes. ■

Observação 1.2.22 Sabemos que $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$ é um conjunto completo de representações irredutíveis de $\mathbb{D}_m$.

Pela Proposição 1.2.19, χ_j $(j = 1,2,3,4)$ e ρ_l $(1 \leq l \leq n-1)$ estendem-se de modo único, respectivamente, para ${\chi_j}'$ $(j = 1,2,3,4)$ e para ${\rho_l}'$ $(1 \leq l \leq n-1)$. Além disso, pela proposição acima as mesmas são todas irredutíveis e não equivalentes entre si. Logo,

$$\{{\chi_1}', {\chi_2}', {\chi_3}', {\chi_4}', {\rho_l}', 1 \leq l \leq n-1\}$$

é um conjunto completo de representações irredutíveis de $\Bbbk\mathbb{D}_m$.

No decorrer do trabalho as representações irredutíveis de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ serão denotadas pelo conjunto $S = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$. Para fixarmos notação

$$\mathcal{S} = \{M_{\chi_1}, M_{\chi_2}, M_{\chi_3}, M_{\chi_4}, M_{\rho_l}, 1 \leq l \leq n-1\},$$

é o conjunto de todos os $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples não isomorfos finito dimensionais associados às representações irredutíveis, não equivalentes e finito dimensionais de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ ditas acima.

Observação 1.2.23 Se M e N são espaços vetoriais isomorfos, as $\Bbbk$-álgebras $\mathrm{End}_\Bbbk(M) \overset{f}{\simeq} \mathrm{End}_\Bbbk(N)$ são isomorfas. Portanto, se (M,T) é uma representação da $\Bbbk$-álgebra A, então (N, fT) é uma representação de A. O caso particular em que $\dim_\Bbbk M = n = \dim_\Bbbk N$, nos dá os isomorfismos de $\Bbbk$-álgebras $\mathrm{End}_\Bbbk(M) \simeq \mathbb{M}_n(\Bbbk) \simeq \mathrm{End}_\Bbbk(N)$.

Tal fato aplica-se em particular para as representações irredutíveis χ_j, $j \in \{1,2,3,4\}$, de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ de dimensão 1. Temos que $M_{\chi_j} \simeq \Bbbk$ como espaços vetoriais. Daí, as álgebras $\mathrm{End}_\Bbbk(M_{\chi_j})$ e $\mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk)$ são isomorfas. É sabido, além disso, que $\mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk)$ e $\Bbbk$ também são álgebras isomorfas.

Tendo isso em mente, as representações χ_j de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ serão escritas como $\chi_j : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \Bbbk$ e não faremos nenhuma menção quanto a isso.

O mesmo comentário para as representações irredutíveis ρ_l de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ de dimensão 2, para todo $1 \leq l \leq n-1$. Os $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos irredutíveis M_{ρ_l} são isomorfos a $\Bbbk^2$ como espaços vetoriais e como tal, no último capítulo, a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ é usada como base dos $M'_{\rho_l}s$, para todo $1 \leq l \leq n-1$. A diferença entre os $M'_{\rho_l}s$ é dada pela ação descrita na igualdade (1.2).

É possível definir o caracter para álgebras.

Definição 1.2.24 ([11], Section 3.6) *Sejam A uma $\Bbbk$-álgebra e $T : A \to \mathrm{End}_\Bbbk(V)$ uma representação de dimensão finita de A. Então o caracter de T é a função linear $\mu_T : A \to \Bbbk$ definida por $\mu_T(a) = tr(T(a))$.*

O caracter de um A-módulo M, denotado por μ_M, é o caracter da representação $T : A \to \mathrm{End}_\Bbbk(M)$, em que T é representação associada à M, como explicado na Proposição 1.2.11. O teorema a seguir também pode ser traduzido em termos de representações de A. Lembremos que um A-módulo é denominado semissimples se é uma soma direta de módulos simples ([22], Section 2.3).

Teorema 1.2.25 ([15], Theorem (7.19)) *Sejam $\Bbbk$ um corpo de característica 0 e A uma $\Bbbk$-álgebra. Se M e M' são A-módulos finito dimensionais e semissimples tais que $\mu_M = \mu_{M'}$ então M e M' são A-módulos isomorfos.*

Para a próxima definição seja L uma extensão do corpo $\Bbbk$, A uma $\Bbbk$-álgebra e V um A-módulo finito dimensional. Denotamos por A^L a

L-álgebra $A \otimes L$ e por V^L o A^L-módulo $V \otimes L$. Para mais detalhes, veja ([8], Section 29).

Definição 1.2.26 ([8], Definition (29.12)) *Sejam A uma $\mathbb{k}$-álgebra e V um A-módulo simples finito dimensional. Chamamos V de absolutamente simples se V^L é um A^L-módulo simples para cada extensão L de $\mathbb{k}$.*

Teorema 1.2.27 ([8], Corollary (29.15)) *Sejam V um A-módulo simples, em que A é uma $\mathbb{k}$-álgebra e L o fecho algébrico de $\mathbb{k}$. Se V^L é simples então V é absolutamente simples. Em particular, para álgebras sobre corpos algebricamente fechados, todo módulo simples é absolutamente simples.*

Teorema 1.2.28 ([15], Theorem (7.20)) *Sejam M e M' módulos sobre uma $\mathbb{k}$-álgebra A, com M absolutamente simples sobre A. Suponhamos que $\dim_{\mathbb{k}} M = \dim_{\mathbb{k}} M'$ ou M' é simples. Então $\mu_M = \mu_{M'}$ se, e somente se, $M \simeq M'$.*

Finalizamos essa subseção com três resultados que serão úteis mais adiante. O primeiro no Capítulo 3 e os demais no Capítulo 4.

Proposição 1.2.29 ([15], Proposition (4.6)) *Seja A um anel. Então A e $\dfrac{A}{rad(A)}$ possuem os mesmos módulos simples à esquerda.*

Proposição 1.2.30 ([22], Section 2.5, Lemma a) *Sejam A uma álgebra e $\{N_i\}_{i\in I}$ uma família de A-módulos simples. Então todo submódulo de $M = \oplus_{i\in I} N_i$ é isomorfo a um módulo da forma $\oplus_{i\in J} N_i$, em que $J \subseteq I$.*

Proposição 1.2.31 ([11], Theorem 4.1.1 (i) - Maschke) *Sejam G um grupo finito e $\mathbb{k}$ um corpo cuja característica não divide a ordem de G. Então a álgebra $\mathbb{k}G$ é semissimples.*

1.3 Anéis de Grothendieck

Iniciamos esta seção escrevendo algumas noções sobre categorias que são necessárias para a definição de grupo e de anel de Grothendieck na Subseção 1.3.2. Na sequência, calculamos o anel de Grothendieck da categoria ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$, em que $m = 2n$. Este exemplo é utilizado no Capítulo 3, para caracterizar outros anéis de Grothendieck. Finalizamos a seção calculando o anel de Grothendieck da categoria $\mathfrak{m}^H$, em que H é uma álgebra de Hopf pontuada finito dimensional.

1.3.1 Noções básicas de categorias monoidais e localmente finitas

Consideramos conhecidos os conceitos básicos de categoria abeliana, categoria $\Bbbk$-linear, categoria monoidal e rígida, de acordo com as referências [10] e [18], assim como, os conceitos de sequências exatas e funtores exatos. No entanto, o produto tensorial da categoria monoidal é essencial para descrevermos o produto no anel de Grothendieck e, por este motivo, iniciamos relembramos a definição de uma categoria monoidal.

Definição 1.3.1 *Uma categoria monoidal é uma coleção* $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$*, em que* $\mathcal{C}$ *é uma categoria,* $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *é um bifuntor, denominado produto tensorial,* $\mathbf{1}$ *é um objeto em* $\mathcal{C}$*,* a, l *e* r *são isomorfismos naturais entre os funtores* $((-\otimes-)\otimes-)$ *e* $(-\otimes(-\otimes-))$*,* $\mathbf{1}\otimes-$ *e* $I_{\mathcal{C}}$*,* $-\otimes\mathbf{1}$ *e* $I_{\mathcal{C}}$*, respectivamente, tais que, para quaisquer objetos* $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$*, valem os axiomas do pentágono e do triângulo, ou seja*

$$a_{X,Y,Z\otimes W}\, a_{X\otimes Y,Z,W} = (I_X \otimes a_{Y,Z,W})\, a_{X,Y\otimes Z,W}(a_{X,Y,Z} \otimes I_W)$$

e

$$(I_X \otimes l_Y)a_{X,\mathbf{1},Y} = r_X \otimes I_Y.$$

Exemplo 1.3.2 ([18], Ejemplo 3.1.1 (5)) Se H é uma biálgebra sobre um corpo $\Bbbk$ então a categoria ${}_H\mathfrak{m}$, dos H-módulos à esquerda finito dimensionais, é monoidal. O produto tensorial é o produto tensorial sobre o corpo $\Bbbk$. Se $V, W \in {}_H\mathfrak{m}$ então a ação em $V \otimes W$ é definida por

$$h(v \otimes w) = h_1 v \otimes h_2 w,$$

para quaisquer $h \in H, v \in V$ e $w \in W$.

De modo similar, a categoria $\mathfrak{m}_H$, dos H-módulos à direita finito dimensionais, é monoidal. Se $V, W \in \mathfrak{m}_H$ então a ação em $V \otimes W$ é definida como segue.

$$(v \otimes w)h = vh_1 \otimes wh_2,$$

para quaisquer $h \in H, v \in V$ e $w \in W$.

No exemplo a seguir e no decorrer do texto, usamos a notação de Sweedler para comódulos, isto é, se (V, ρ) é um C-comódulo à esquerda então denotamos $\rho(v) = v_{(-1)} \otimes v_{(0)}$, para qualquer $v \in V$. Se (V, ρ) é um C-comódulo à direita então denotamos $\rho(v) = v_{(0)} \otimes v_{(1)}$, para qualquer $v \in V$.

Exemplo 1.3.3 ([26], Chapter 11) Se H é uma biálgebra sobre um corpo $\Bbbk$ então a categoria ${}^H\mathfrak{m}$, dos H-comódulos à esquerda finito dimensionais, é monoidal. O produto tensorial é o produto tensorial sobre o corpo $\Bbbk$. Se $V, W \in {}^H\mathfrak{m}$ então a coação em $V \otimes W$ é definida por

$$\rho(v \otimes w) = v_{(-1)}w_{(-1)} \otimes v_{(0)} \otimes w_{(0)},$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

De modo similar, a categoria $\mathfrak{m}^H$, dos H-comódulos à direita finito dimensionais, é monoidal. Se $V, W \in \mathfrak{m}^H$ então a coação em $V \otimes W$ é definida por

$$\rho(v \otimes w) = v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes v_{(1)}w_{(1)},$$

para quaisquer $v \in V$ e $w \in W$.

Exemplo 1.3.4 Por ([10], Corollary 5.3.7), se H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora então a categoria ${}_H\mathfrak{m}$ é rígida. O mesmo para a categoria $\mathfrak{m}^H$. Por ([26], Corollary 7.6.4), as álgebras de Hopf pontuadas possuem antípoda bijetora. Portanto, se H é uma álgebra de Hopf pontuada então as categorias ${}_H\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{m}^H$ são rígidas.

As definições e resultados a seguir caracterizam as categorias necessárias para a definição de um grupo de Grothendieck, na próxima subseção.

Definição 1.3.5 ([10], Definition 1.5.1) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Um objeto X em $\mathcal{C}$ é simples se é diferente de zero e, além disso, 0 e X são seus únicos subobjetos. Um objeto X em $\mathcal{C}$ é semissimples se é uma soma direta de objetos simples. A categoria $\mathcal{C}$ é uma categoria semissimples se todo objeto de $\mathcal{C}$ é semissimples.*

Definição 1.3.6 ([10], Definition 1.5.3) *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e X um objeto de $\mathcal{C}$. Dizemos que X tem comprimento finito se existe uma filtração*

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{n-1} \subseteq X_n = X$$

tal que $\dfrac{X_i}{X_{i-1}}$, denominado fator de composição, é um objeto simples para todo i. Essa filtração é denominada série de Jordan-Hölder. Dizemos que uma série de Jordan-Hölder contém um objeto simples Y com multiplicidade m, se a quantidade de valores i tais que $\dfrac{X_i}{X_{i-1}}$ é isomorfo a Y é igual a m. Denotamos por $[X : Y]$ a multiplicidade de Y na série de Jordan-Hölder de X.

Teorema 1.3.7 ([10], Theorem 1.5.4) *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Seja X em $\mathcal{C}$ um objeto com comprimento finito. Então qualquer filtração de X pode ser estendida a uma série de Jordan-Hölder e quaisquer duas séries de Jordan-Hölder de X contém os mesmos fatores de composição e com a mesma multiplicidade.*

Devido o teorema anterior, podemos definir o comprimento de uma série de Jordan-Hölder.

Definição 1.3.8 ([10], Definition 1.5.5) *O comprimento de um objeto X é o comprimento da sua série de Jordan-Hölder (se ela existir).*

Definição 1.3.9 ([10], Definition 1.8.1) *Uma categoria abeliana e $\Bbbk$-linear $\mathcal{C}$ é dita localmente finita se*
(i) *O $\Bbbk$-espaço vetorial* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ *possui dimensão finita, para quaisquer dois objetos X, Y em $\mathcal{C}$.*
(ii) *Todo objeto em $\mathcal{C}$ possui comprimento finito.*

Exemplo 1.3.10 ([10], pg. 10) Seja A uma álgebra sobre um corpo $\Bbbk$. A categoria ${}_A\mathfrak{m}$ é localmente finita.

Exemplo 1.3.11 ([10], Proposition 1.9.5) Seja C uma coálgebra sobre um corpo $\Bbbk$. A categoria $\mathfrak{m}^C$ é localmente finita.

1.3.2 Anéis de Grothendieck

Nesta subseção, apresentamos a definição de grupo de Grothendieck para uma categoria abeliana $\Bbbk$-linear cujos objetos possuam comprimento finito. A menos que se diga o contrário, é considerado uma categoria com estas características. Adicionalmente, em categorias que também forem monoidais e rígidas, por meio do produto tensorial, é possível definir um produto associativo no grupo de Grothendieck, tornando-o um anel.

Para o que segue, sugerimos a referência [10]. Consideramos $\{S_i\}_{i\in I}$ um conjunto de representantes das classes de objetos simples em $\mathcal{C}$.

Definição 1.3.12 *([10], Definition 1.5.8) O grupo de Grothendieck de $\mathcal{C}$, denotado por $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, é o grupo abeliano livre gerado pelas classes de isomorfismos $[S_i]$ de objetos simples em $\mathcal{C}$. Para cada objeto X em $\mathcal{C}$ associamos $[X] \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$ dada pela fórmula*

$$[X] = \sum_i [X : S_i][S_i],$$

em que $[X : S_i]$ é a multiplicidade de S_i na série de Jordan-Hölder de X.

Observação 1.3.13 Sejam X, Y objetos simples em $\mathcal{C}$ tais que $[X] = [S_k]$ e $[Y] = [S_j]$ para alguns $k, j \in I$, isto é $X \simeq S_k$ e $Y \simeq S_j$. Então $X \oplus Y \simeq S_k \oplus S_j$ e portanto $[X \oplus Y : S_i] = [S_k \oplus S_j : S_i]$, para cada $i \in I$, pois uma série de Jordan-Hölder de $X \oplus Y$ induz uma série de Jordan-Hölder de $S_k \oplus S_j$, devido o isomorfismo. Consequentemente, $[X \oplus Y] = [S_k \oplus S_j]$. Por outro lado, os fatores de composição de $S_k \oplus S_j$ são S_k e S_j e os fatores de composição de $X \oplus Y$ são X e Y. Deste modo,

$$[X] + [Y] = [X \oplus Y] = [S_k \oplus S_j] = [S_k] + [S_j].$$

Portanto, a soma definida acima está bem definida. Isso finaliza a observação.

A proposição a seguir esclarece como elementos quaisquer do grupo de Grothendieck se relacionam. Iniciamos enunciando um lema, cuja demonstração detalhada pode ser encontrada em ([24], Proposição 1.3.11).

Lema 1.3.14 *Se $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ é uma sequência exata curta em uma categoria localmente finita então os fatores de composição de Y são exatamente os fatores de composição de X e de Z, a menos de isomorfismo.*

Proposição 1.3.15 *Se $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ é uma sequência exata curta em $\mathcal{C}$ então $[Y] = [X] + [Z]$ em $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.*

Demonstração: Sejam $[X] = \sum_i [X : S_i][S_i]$ e $[Z] = \sum_k [Z : S_k][S_k]$. Pelo Lema 1.3.14, segue que

$$[Y] = \sum_i [X : S_i][S_i] + \sum_k [Z : S_k][S_k] = [X] + [Z].$$

■

Corolário 1.3.16 *Sejam $X, Y \in \mathcal{C}$. Então $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$ em $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.*

Demonstração: Lembramos que $0 \to X \to X \oplus Y \to Y \to 0$ é uma sequência exata curta em $\mathcal{C}$ e assim, pela proposição anterior, segue que $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$ em $\mathcal{G}(\mathcal{C})$. ■

Corolário 1.3.17 *Sejam $X, Y \in \mathcal{C}$ tais que $X \simeq Y$. Então $[X] = [Y]$ em $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.*

Demonstração: A sequência $0 \to X \to Y \to 0 \to 0$ é exata curta em $\mathcal{C}$, logo $[Y] = [X]$ em $\mathcal{G}(\mathcal{C})$. ■

Adicionalmente, se $\mathcal{C}$ for uma categoria monoidal então é possível dar uma estrutura de anel à $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

Teorema 1.3.18 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, $\Bbbk$-linear, monoidal e rígida tal que todo objeto tem comprimento finito. Então a relação*

$$[S_i][S_j] = [S_i \otimes S_j] = \sum_{k \in I} [(S_i \otimes S_j) : S_k][S_k], i, j \in I,$$

define uma multiplicação associativa em $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

Observação 1.3.19 No teorema acima a igualdade

$$[S_i \otimes S_j] = \sum_{k \in I} [(S_i \otimes S_j) : S_k][S_k], i, j \in I,$$

é relevante, pois o produto deve continuar compatível com a Definição 1.3.12.

Demonstração: Mostremos que o produto está bem definido. Sejam $X, Y \in \mathcal{C}$ objetos simples tais que $X \simeq S_i$ e $Y \simeq S_j$, para algum $i \in I$ e algum $j \in I$. Então as sequências

$$0 \to 0 \to S_i \to X \to 0, \quad 0 \to S_j \to Y \to 0 \to 0$$

são exatas curtas em $\mathcal{C}$. Isto implica que as sequências

$$0 \to 0 \to S_i \otimes S_j \to X \otimes S_j \to 0$$

e

$$0 \to X \otimes S_j \to X \otimes Y \to 0 \to 0$$

são exatas, pois estamos supondo $\mathcal{C}$ uma categoria rígida e neste caso o produto tensorial é biexato ([18], Observación 3.4.5). Consequentemente, pela Proposição 1.3.15,

$$[S_i \otimes S_j] = [X \otimes Y].$$

Agora, mostremos que o produto é associativo.

Sejam $i, j, p \in I$. Como o funtor $\_ \otimes S_p$ é exato, os fatores de composição de $(S_i \otimes S_j) \otimes S_p$ são os fatores de composição de $S_k \otimes S_p$, em que S_k é fator de composição de $S_i \otimes S_j$. Assim, para cada $l \in I$,

$$[(S_i \otimes S_j) \otimes S_p : S_l] = \sum_{k \in I} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k \otimes S_p : S_l] \tag{1.3}$$

Analogamente, o funtor $S_i \otimes \_$ é exato e os fatores de composição de $S_i \otimes (S_j \otimes S_p)$ são os fatores de composição de $S_i \otimes S_r$, em que S_r é fator de composição de $S_j \otimes S_p$. Assim, para cada $l \in I$,

$$[S_i \otimes (S_j \otimes S_p) : S_l] = \sum_{r \in I} [S_j \otimes S_p : S_r][S_i \otimes S_r : S_l] \tag{1.4}$$

O produto tensorial é associativo, ou seja, $(S_i \otimes S_j) \otimes S_p \simeq S_i \otimes (S_j \otimes S_p)$. Logo, para cada $l \in I$, $[(S_i \otimes S_j) \otimes S_p : S_l] = [S_i \otimes (S_j \otimes S_p) : S_l]$. Deste modo, para quaisquer $i, j, p \in I$, temos

$$\begin{array}{rcl}
([S_i][S_j])[S_p] & = & \sum_{k \in I} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k][S_p] \\
& = & \sum_{k,l \in I} [S_i \otimes S_j : S_k][S_k \otimes S_p : S_l][S_l] \\
& \overset{(1.3)}{=} & \sum_{k,l \in I} [(S_i \otimes S_j) \otimes S_p : S_l][S_l] \\
& = & \sum_{k,l \in I} [S_i \otimes (S_j \otimes S_p) : S_l][S_l] \\
& \overset{(1.4)}{=} & \sum_{k,l \in I} [S_j \otimes S_p : S_r][S_i \otimes S_r : S_l][S_l] \\
& = & [S_i] \sum_{k,l \in I} [S_j \otimes S_p : S_r][S_r] \\
& = & [S_i]([S_j][S_p]).
\end{array}$$

■

Na sequência calculamos dois exemplos de anéis de Grothendieck. Um deles é o anel de Grothendieck da categoria de representações da álgebra de grupo $\Bbbk\mathbb{D}_m$, em que m é par. O outro é o anel de Grothendieck da categoria dos comódulos finito dimensionais de uma álgebra de Hopf pontuada finito dimensional.

1.3.3 Anel de Grothendieck de ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$

Nesta subseção, calculamos o anel de Grothendieck da categoria ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$, em que $m = 2n$. Optamos em calcular apenas o caso em que m é par, pois o utilizamos para caracterizar outros anéis de Grothendieck no Capítulo 3, onde as álgebras consideradas são álgebras de Hopf pontuadas sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ com m par, mais especificamente, $m = 4t, t \geq 3$. A restrição de que m seja um número par é relevante, pois para m ímpar, a teoria de representações para $\Bbbk\mathbb{D}_m$, apesar de bem conhecida na literatura, é diferente. Veja, por exemplo, ([25], Section 5.3).

Pelo Exemplo 1.3.10, ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$ é localmente finita e assim, pela definição 1.3.12, $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelo conjunto das classes de isomorfismos de objetos simples. Observamos que em ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$ os objetos simples são os $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples.

A Observação 1.2.22 nos diz que

$$\mathcal{S} = \{M_{\chi_1}, M_{\chi_2}, M_{\chi_3}, M_{\chi_4}, M_{\rho_l}, 1 \leq l \leq n-1\}$$

é o conjunto de todos os $\Bbbk\mathbb{D}$-módulos simples não isomorfos finito dimensionais. Então, $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelo conjunto

$$T = \{[M_{\chi_1}], [M_{\chi_2}], [M_{\chi_3}], [M_{\chi_4}], [M_{\rho_l}], 1 \leq l \leq n-1\}.$$

Pelos Exemplos 1.3.2 e 1.3.4, ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$ é uma categoria monoidal e rígida, respectivamente. Logo, $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ é um anel com o produto definido como no Teorema 1.3.18, ou seja,

$$[M_\mu][M_\tau] = [M_\mu \otimes M_\tau] = [M_{\mu\otimes\tau}],$$

em que $M_\mu, M_\tau \in \mathcal{S}$. A seguir, calculamos as regras de fusão deste anel de Grothendieck. Para uma apresentação mais clara e efetiva dos resultados, fixamos a seguinte notação. Aqui é bom ter em mente a Tabela 1.1.

$$\chi_{0,0} := \chi_1, \chi_{1,0} := \chi_2, \chi_{0,1} := \chi_3, \chi_{1,1} := \chi_4.$$

Deste modo,

$$\chi_{\varepsilon,\delta}(g^a h^b) = (-1)^{a\varepsilon}(-1)^{b\delta},$$

em que $\varepsilon, \delta, a \in \{0, 1\}$ e $b \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Lembramos que duas representações ρ, τ são equivalentes se existem bases α e β de M_ρ e de M_τ, respectivamente, nas quais $[\rho(t)]_\alpha = [\tau(t)]_\beta$, para todo $t \in \Bbbk\mathbb{D}_m$.

Proposição 1.3.20 *Valem as seguintes regras de fusão no conjunto* $S = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$.

Se $\varepsilon, \delta, \overline{\varepsilon}, \overline{\delta} \in \{0,1\} = \mathbb{Z}_2$ *então*

$$\chi_{\varepsilon,\delta} \otimes \chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}} \simeq \chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}.$$

Se $l, t \in \{1, \cdots, n-1\}$ *então*

$$\rho_l \otimes \chi_{0,0} \simeq \rho_l \simeq \rho_l \otimes \chi_{1,0},$$

$$\rho_l \otimes \chi_{0,1} \simeq \rho_{n-l} \simeq \rho_l \otimes \chi_{1,1},$$

$$\rho_l \otimes \rho_t \simeq \begin{cases} \rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t}, & l \neq t \ e \ l+t \neq n, \\ \chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t}, & l \neq t \ e \ l+t = n, \\ \rho_{2l} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0}, & l = t \ e \ 2l \neq n, \\ \chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0}, & l = t \ e \ 2l = n. \end{cases}$$

Demonstração: Sejam $\varepsilon, \delta, \overline{\varepsilon}, \overline{\delta}, a \in \{0,1\}$ e $b \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Consideramos $\chi_{\varepsilon,\delta} \otimes \chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk \otimes \Bbbk)$ e notemos que

$$\begin{aligned} (\chi_{\varepsilon,\delta} \otimes \chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}})(g^a h^b)(r \otimes s) &= \chi_{\varepsilon,\delta}(g^a h^b)(r) \otimes \chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}}(g^a h^b)(s) \\ &= (-1)^{a\varepsilon}(-1)^{b\delta} r \otimes (-1)^{a\overline{\varepsilon}}(-1)^{b\overline{\delta}} s \\ &= (-1)^{a(\varepsilon+\overline{\varepsilon})}(-1)^{b(\delta+\overline{\delta})} r \otimes s \\ &= \chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}(g^a h^b)(r \otimes s), \end{aligned}$$

para quaisquer $r, s \in \Bbbk$. Logo, $\chi_{\varepsilon,\delta} \otimes \chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}} \simeq \chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}$.

Seja $l \in \{1, \cdots, n-1\}$. Lembramos que o caracter de ρ_l satisfaz $\mu_{\rho_l}(h^b) = \omega^{lb} + \omega^{-lb}$ e $\mu_{\rho_l}(gh^b) = 0$. Consideremos a representação

$$\rho_l \otimes \chi_{1,0} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2 \otimes \Bbbk).$$

Seja $\beta = \{v_1, v_2\}$ uma base de $\Bbbk^2 = M_{\rho_l}$, como na Subseção 1.2.1, então $\varrho = \{v_1 \otimes 1, v_2 \otimes 1\}$ é uma base de $\Bbbk^2 \otimes \Bbbk$ e

$$[(\rho_l \otimes \chi_{1,0})(h^b)]_{\varrho} = \begin{pmatrix} \omega^{lb} & 0 \\ 0 & \omega^{-lb} \end{pmatrix},$$
$$[(\rho_l \otimes \chi_{1,0})(gh^b)]_{\varrho} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-lb} \\ -\omega^{lb} & 0 \end{pmatrix}.$$

As igualdades anteriores seguem de:

$$\begin{aligned} (\rho_l \otimes \chi_{1,0})(h^b)(v_1 \otimes 1) &= \rho_l(h^b)(v_1) \otimes \chi_{1,0}(h^b)(1) \\ &= \omega^{lb} v_1 \otimes (-1)^0(-1)^0 = \omega^{lb}(v_1 \otimes 1), \\ (\rho_l \otimes \chi_{1,0})(h^b)(v_2 \otimes 1) &= \rho_l(h^b)(v_2) \otimes \chi_{1,0}(h^b)(1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega^{-lb}(v_2 \otimes 1),\\
(\rho_l \otimes \chi_{1,0})(gh^b)(v_1 \otimes 1) &= \rho_l(gh^b)(v_1) \otimes \chi_{1,0}(gh^b)(1)\\
&= \omega^{lb} v_2 \otimes (-1)^1(-1)^0 = -\omega^{lb}(v_2 \otimes 1),\\
(\rho_l \otimes \chi_{1,0})(gh^b)(v_2 \otimes 1) &= \rho_l(gh^b)(v_2) \otimes \chi_{1,0}(gh^b)(1)\\
&= -\omega^{-lb}(v_1 \otimes 1).
\end{aligned}
$$

Assim, usando os caracteres, $\mu_{\rho_l \otimes \chi_{1,0}}(h^b) = \omega^{lb} + \omega^{-lb} = \mu_{\rho_l}(h^b)$ e $\mu_{\rho_l \otimes \chi_{1,0}}(gh^b) = 0 = \mu_{\rho_l}(gh^b)$. Portanto, pelo Teorema 1.2.25, $\rho_l \otimes \chi_{1,0} \simeq \rho_l$. De forma análoga, temos $\rho_l \otimes \chi_{0,0} \simeq \rho_l$.

Consideramos $\rho_l \otimes \chi_{0,1}$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
(\rho_l \otimes \chi_{0,1})(h^b)(v_1 \otimes 1) &= \rho_l(h^b)(v_1) \otimes \chi_{0,1}(h^b)(1)\\
&= \omega^{lb} v_1 \otimes (-1)^0(-1)^b = \omega^{lb+nb}(v_1 \otimes 1),\\
(\rho_l \otimes \chi_{0,1})(h^b)(v_2 \otimes 1) &= \rho_l(h^b)(v_2) \otimes \chi_{0,1}(h^b)(1)\\
&= \omega^{-lb} v_2 \otimes (-1)^0(-1)^b = \omega^{-lb+nb}(v_2 \otimes 1),\\
(\rho_l \otimes \chi_{0,1})(gh^b)(v_1 \otimes 1) &= \rho_l(gh^b)(v_1) \otimes \chi_{0,1}(gh^b)(1)\\
&= \omega^{lb} v_2 \otimes (-1)^0(-1)^b = \omega^{lb+nb}(v_2 \otimes 1),\\
(\rho_l \otimes \chi_{0,1})(gh^b)(v_2 \otimes 1) &= \rho_l(gh^b)(v_2) \otimes \chi_{0,1}(gh^b)(1)\\
&= \omega^{-lb} v_1 \otimes (-1)^0(-1)^b = \omega^{-lb+nb}(v_1 \otimes 1),
\end{aligned}
$$

assim

$$
\begin{aligned}
[(\rho_l \otimes \chi_{0,1})(h^b)]_\varrho &= \begin{pmatrix} \omega^{lb+nb} & 0 \\ 0 & \omega^{nb-lb} \end{pmatrix},\\
[(\rho_l \otimes \chi_{0,1})(gh^b)]_\varrho &= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-lb+nb} \\ \omega^{nb+lb} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Usando os caracteres,

$$
\begin{aligned}
\mu_{\rho_l \otimes \chi_{0,1}}(h^b) &= \omega^{lb+nb} + \omega^{nb-lb} = \omega^{(l+n)b} + \omega^{(n-l)b}\\
&= \omega^{-(-l+n)b} + \omega^{(n-l)b} = \mu_{\rho_{n-l}}(h^b),\\
\mu_{\rho_l \otimes \chi_{0,1}}(gh^b) &= 0 = \mu_{\rho_{n-l}}(gh^b),
\end{aligned}
$$

então, pelo Teorema 1.2.25, $\rho_l \otimes \chi_{0,1} \simeq \rho_{n-l}$. De forma análoga, $\rho_{n-l} \simeq \rho_l \otimes \chi_{1,1}$.

Sejam $l, t \in \{1, \cdots, n-1\}$. Consideramos $\rho_l \otimes \rho_t : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2 \otimes \Bbbk^2)$ e fixamos $\alpha = \{v_1 \otimes v_1, v_1 \otimes v_2, v_2 \otimes v_1, v_2 \otimes v_2\}$ uma base de $\Bbbk^2 \otimes \Bbbk^2$. Então, fazendo um cálculo direto, obtemos

$$[(\rho_l \otimes \rho_t)(h^b)]_\alpha = \begin{pmatrix} \omega^{(l+t)b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{(l-t)b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{(-l+t)b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-(l+t)b} \end{pmatrix}$$

e

$$[(\rho_l \otimes \rho_t)(gh^b)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^{-(l+t)b} \\ 0 & 0 & \omega^{(-l+t)b} & 0 \\ 0 & \omega^{(l-t)b} & 0 & 0 \\ \omega^{(l+t)b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podem ocorrer os casos descritos abaixo.

1) $l \neq t$, $l+t \neq n$. Seja $\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk^2 \oplus \Bbbk^2)$ e $\gamma = \{(v_1, 0), (0, v_1), (0, v_2), (v_2, 0)\}$ uma base de $\Bbbk^2 \oplus \Bbbk^2$. Então

$$\begin{aligned}
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(v_1, 0) &= (\rho_{l+t}(h^b)(v_1), \rho_{l-t}(h^b)(0)) \\
&= (\omega^{(l+t)b} v_1, 0), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(0, v_1) &= (\rho_{l+t}(h^b)(0), \rho_{l-t}(h^b)(v_1)) \\
&= (0, \omega^{(l-t)b} v_1), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(0, v_2) &= (\rho_{l+t}(h^b)(0), \rho_{l-t}(h^b)(v_2)) \\
&= (0, \omega^{-(l-t)b} v_2), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(v_2, 0) &= (\rho_{l+t}(h^b)(v_2), \rho_{l-t}(h^b)(0)) \\
&= (\omega^{-(l+t)b} v_2, 0), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(v_1, 0) &= (\rho_{l+t}(gh^b)(v_1), \rho_{l-t}(gh^b)(0)) \\
&= (\omega^{(l+t)b} v_2, 0), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(0, v_1) &= (\rho_{l+t}(gh^b)(0), \rho_{l-t}(gh^b)(v_1)) \\
&= (0, \omega^{(l-t)b} v_2), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(0, v_2) &= (\rho_{l+t}(gh^b)(0), \rho_{l-t}(gh^b)(v_2)) \\
&= (0, \omega^{-(l-t)b} v_1), \\
(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(v_2, 0) &= (\rho_{l+t}(gh^b)(v_2), \rho_{l-t}(gh^b)(0)) \\
&= (\omega^{-(l+t)b} v_1, 0).
\end{aligned}$$

Logo,

$$[(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(h^b)]_\gamma = \begin{pmatrix} \omega^{(l+t)b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{(l-t)b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-(l-t)b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-(l+t)b} \end{pmatrix}$$

e

$$[(\rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)]_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^{-(l+t)b} \\ 0 & 0 & \omega^{-(l-t)b} & 0 \\ 0 & \omega^{(l-t)b} & 0 & 0 \\ \omega^{(l+t)b} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\rho_l \otimes \rho_t \simeq \rho_{l+t} \oplus \rho_{l-t}$.

2) $l \neq t$, $l+t=n$. Sejam $\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk \oplus \Bbbk \oplus \Bbbk^2)$ e $\eta = \{(1,0,0),(0,0,v_1),(0,0,v_2),(0,1,0)\}$ uma base de $\Bbbk \oplus \Bbbk \oplus \Bbbk^2$. Então

$$\begin{aligned}
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(1,0,0) &= (\chi_{0,1}(h^b)(1),0,0) \\
&= ((-1)^b,0,0), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(0,0,v_1) &= (0,0,\rho_{l-t}(h^b)(v_1)) \\
&= (0,0,\omega^{(l-t)b}v_1), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(0,0,v_2) &= (0,0,\rho_{l-t}(h^b)(v_2)) \\
&= (0,0,\omega^{(-l+t)b}v_2), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(h^b)(0,1,0) &= (0,\chi_{1,1}(h^b)(1),0) \\
&= (0,(-1)^b,0), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(1,0,0) &= (\chi_{0,1}(gh^b)(1),0,0) \\
&= ((-1)^b,0,0), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(0,0,v_1) &= (0,0,\rho_{l-t}(gh^b)(v_1)) \\
&= (0,0,\omega^{(l-t)b}v_2), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(0,0,v_2) &= (0,0,\rho_{l-t}(gh^b)(v_2)) \\
&= (0,0,\omega^{(-l+t)b}v_1), \\
(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)(0,1,0) &= (0,\chi_{1,1}(gh^b)(1),0) \\
&= (0,(-1)^{b+1},0)
\end{aligned}$$

e assim,

$$[(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(h^b)]_\eta = \begin{pmatrix} (-1)^b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{(l-t)b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{(-l+t)b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^b \end{pmatrix},$$

$$[(\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t})(gh^b)]_\eta = \begin{pmatrix} (-1)^b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{(-l+t)b} & 0 \\ 0 & \omega^{(l-t)b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{b+1} \end{pmatrix}.$$

Notemos que, $\mu_{\rho_l \otimes \rho_t}(gh^b) = 0 = \mu_{\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t}}(gh^b)$ e

$$\begin{aligned} \mu_{\rho_l \otimes \rho_t}(h^b) &= \omega^{(l+t)b} + \omega^{(l-t)b} + \omega^{(-l+t)b} + \omega^{-(l+t)b} \\ &= \omega^{nb} + \omega^{(l-t)b} + \omega^{(-l+t)b} + \omega^{-nb} \\ &= (-1)^b + \omega^{(l-t)b} + \omega^{(-l+t)b} + (-1)^b \\ &= \mu_{\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t}}(h^b), \end{aligned}$$

na segunda igualdade usamos o fato de que $l + t = n$. Portanto, pelo Teorema 1.2.25, $\rho_l \otimes \rho_t \simeq \chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \rho_{l-t}$.

3) $l = t$, $2l \neq n$. Seja $\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk^4)$, então

$$\begin{aligned} (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(h^b)(1,0,0) &= (\chi_{0,0}(h^b)(1), 0, 0) \\ &= (1, 0, 0), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(h^b)(0,0,v_1) &= (0, 0, \rho_{2l}(h^b)(v_1)) \\ &= (0, 0, \omega^{2lb} v_1), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(h^b)(0,0,v_2) &= (0, 0, \rho_{2l}(h^b)(v_2)) \\ &= (0, 0, \omega^{-2lb} v_2), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(h^b)(0,1,0) &= (0, \chi_{1,0}(h^b)(1), 0) \\ &= (0, 1, 0), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(gh^b)(1,0,0) &= (\chi_{0,0}(gh^b)(1), 0, 0) \\ &= (1, 0, 0), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(gh^b)(0,0,v_1) &= (0, 0, \rho_{2l}(gh^b)(v_1)) \\ &= (0, 0, \omega^{2lb} v_2), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(gh^b)(0,0,v_2) &= (0, 0, \rho_{2l}(gh^b)(v_2)) \\ &= (0, 0, \omega^{-2lb} v_1), \\ (\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(gh^b)(0,1,0) &= (0, \chi_{1,0}(gh^b)(1), 0) \\ &= (0, -1, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$[(\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(h^b)]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{2lb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-2lb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$[(\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l})(gh^b)]_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-2lb} & 0 \\ 0 & \omega^{2lb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nesse caso, $\mu_{\rho_l \otimes \rho_t}(gh^b) = 0 = \mu_{\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l}}(gh^b)$ e

$$\begin{aligned} \mu_{\rho_l \otimes \rho_t}(h^b) &= \omega^{(l+t)b} + \omega^{(l-t)b} + \omega^{(-l+t)b} + \omega^{-(l+t)b} \\ &= \omega^{2lb} + \omega^0 + \omega^0 + \omega^{-2lb} \\ &= \omega^{2lb} + 2 + \omega^{-2lb} = \mu_{\chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l}}(h^b), \end{aligned}$$

na segunda igualdade usamos o fato de que $l = t$. Assim, pelo Teorema 1.2.25, $\rho_l \otimes \rho_t \simeq \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} \oplus \rho_{2l}$.

4) $l = t$, $2l = n$. Seja $\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk^4)$ e $\theta = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ uma base de $\Bbbk^4$. Então

$$\begin{aligned} (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(h^b)(1,0,0,0) &= (\chi_{0,1}(h^b)(1), 0, 0, 0) \\ &= ((-1)^b, 0, 0, 0), \\ (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(h^b)(0,1,0,0) &= (0, \chi_{1,1}(h^b)(1), 0, 0) \\ &= (0, (-1)^b, 0, 0), \\ (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(h^b)(0,0,1,0) &= (0, 0, \chi_{0,0}(h^b)(1), 0) \\ &= (0, 0, 1, 0), \\ (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(h^b)(1,0,0,0) &= (0, 0, 0, \chi_{1,0}(h^b)(1)) \\ &= (0, 0, 0, 1), \\ (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(gh^b)(1,0,0,0) &= (\chi_{0,1}(gh^b)(1), 0, 0, 0) \\ &= ((-1)^b, 0, 0, 0), \\ (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(gh^b)(0,1,0,0) &= (0, \chi_{1,1}(gh^b)(1), 0, 0) \\ &= (0, (-1)^{b+1}, 0, 0), \\ (\chi_{0,1} \oplus \chi_{1,1} \oplus \chi_{0,0} \oplus \chi_{1,0})(gh^b)(0,0,1,0) &= (0, 0, \chi_{0,0}(gh^b)(1), 0) \\ &= (0, 0, 1, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\chi_{0,1}\oplus\chi_{1,1}\oplus\chi_{0,0}\oplus\chi_{1,0})(gh^b)(1,0,0,0) &= (0,0,0,\chi_{1,0}(gh^b)(1))\\ &= (0,0,0,-1).\end{aligned}$$

Logo,

$$[(\chi_{0,1}\oplus\chi_{1,1}\oplus\chi_{0,0}\oplus\chi_{1,0})(h^b)]_\theta = \begin{pmatrix} (-1)^b & 0 & 0 & 0\\ 0 & (-1)^b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

e

$$[(\chi_{0,1}\oplus\chi_{1,1}\oplus\chi_{0,0}\oplus\chi_{1,0})(gh^b)]_\theta = \begin{pmatrix} (-1)^b & 0 & 0 & 0\\ 0 & -(-1)^b & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Nesse caso, $\mu_{\rho_l\otimes\rho_t}(gh^b) = 0 = \mu_{\chi_{0,1}\oplus\chi_{1,1}\oplus\chi_{0,0}\oplus\chi_{1,0}}(gh^b)$ e

$$\begin{aligned}\mu_{\rho_l\otimes\rho_t}(h^b) &= \omega^{(l+t)b}+\omega^{(l-t)b}+\omega^{(-l+t)b}+\omega^{-(l+t)b}\\ &= \omega^{2lb}+\omega^0+\omega^0+\omega^{-2lb}\\ &= (-1)^b+2+(-1)^b = \mu_{\chi_{0,1}\oplus\chi_{1,1}\oplus\chi_{0,0}\oplus\chi_{1,0}}(h^b),\end{aligned}$$

na segunda e terceira igualdades usamos os fatos de que $l=t$ e $2l=n$, respectivamente. Logo, pelo Teorema 1.2.25, $\rho_l\otimes\rho_t \simeq \chi_{0,1}\oplus\chi_{1,1}\oplus\chi_{0,0}\oplus\chi_{1,0}$. ■

Corolário 1.3.21 *Valem as seguintes regras de fusão em $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$:*
Se $\varepsilon,\delta,\overline{\varepsilon},\overline{\delta}\in\{0,1\}=\mathbb{Z}_2$ então

$$[M_{\chi_{\varepsilon,\delta}}][M_{\chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}}}] = [M_{\chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}}].$$

Se $l,t\in\{1,\cdots,n-1\}$ então

$$[M_{\rho_l}][M_{\chi_{0,0}}] = [M_{\rho_l}] = [M_{\rho_l}][M_{\chi_{1,0}}],$$

$$[M_{\rho_l}][M_{\chi_{0,1}}] = [M_{\rho_{n-l}}] = [M_{\rho_l}][M_{\chi_{1,1}}],$$

$$[M_{\rho_l}][M_{\rho_t}] = \begin{cases} [M_{\rho_{l+t}}]+[M_{\rho_{l-t}}], l\neq t \text{ e } l+t\neq n,\\ [M_{\chi_{0,1}}]+[M_{\chi_{1,1}}]+[M_{\rho_{l-t}}], l\neq t \text{ e } l+t=n,\\ [M_{\rho_{2l}}]+[M_{\chi_{0,0}}]+[M_{\chi_{1,0}}], l=t \text{ e } 2l\neq n,\\ [M_{\chi_{0,1}}]+[M_{\chi_{1,1}}]+[M_{\chi_{0,0}}]+[M_{\chi_{1,0}}], l=t \text{ e } 2l=n.\end{cases}$$

Demonstração: Usando a definição do produto em $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ e as Proposições 1.3.20 e 1.2.18, temos as igualdades a seguir.

Se $\varepsilon, \delta, \overline{\varepsilon}, \overline{\delta} \in \{0,1\} = \mathbb{Z}_2$ então

$$[M_{\chi_{\varepsilon,\delta}}][M_{\chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}}}] = [M_{\chi_{\varepsilon,\delta}} \otimes M_{\chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}}}] = [M_{\chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}}].$$

Se $l, t \in \{1, \cdots, n-1\}$ então

$$\begin{aligned} [M_{\rho_l}][M_{\chi_{0,0}}] &= [M_{\rho_l} \otimes M_{\chi_{0,0}}] = [M_{\rho_l}] \\ &= [M_{\rho_l} \otimes M_{\chi_{1,0}}] = [M_{\rho_l}][M_{\chi_{1,0}}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M_{\rho_l}][M_{\chi_{0,1}}] &= [M_{\rho_l} \otimes M_{\chi_{0,1}}] = [M_{\rho_{n-l}}] \\ &= [M_{\rho_l} \otimes M_{\chi_{1,1}}] = [M_{\rho_l}][M_{\chi_{1,1}}]. \end{aligned}$$

Se $l \neq t$ e $l + t \neq n$ então

$$[M_{\rho_l}][M_{\rho_t}] = [M_{\rho_{l+t}} \oplus M_{\rho_{l-t}}] = [M_{\rho_{l+t}}] + [M_{\rho_{l-t}}].$$

Se $l \neq t$ e $l + t = n$ então

$$\begin{aligned} [M_{\rho_l}][M_{\rho_t}] &= [M_{\chi_{0,1}} \oplus M_{\chi_{1,1}} \oplus M_{\rho_{l-t}}] \\ &= [M_{\chi_{0,1}}] + [M_{\chi_{1,1}}] + [M_{\rho_{l-t}}]. \end{aligned}$$

Se $l = t$ e $2l \neq n$ então

$$\begin{aligned} [M_{\rho_l}][M_{\rho_t}] &= [M_{\rho_{2l}} \oplus M_{\chi_{0,0}} \oplus M_{\chi_{1,0}}] \\ &= [M_{\rho_{2l}}] + [M_{\chi_{0,0}}] + [M_{\chi_{1,0}}]. \end{aligned}$$

Se $l = t$ e $2l = n$ então

$$\begin{aligned} [M_{\rho_l}][M_{\rho_t}] &= [M_{\chi_{0,1}} \oplus M_{\chi_{1,1}} \oplus M_{\chi_{0,0}} \oplus M_{\chi_{1,0}}] \\ &= [M_{\chi_{0,1}}] + [M_{\chi_{1,1}}] + [M_{\chi_{0,0}}] + [M_{\chi_{1,0}}]. \end{aligned}$$

■

1.3.4 Anel de Grothendieck de $\mathfrak{m}^H$

O objetivo nesta subseção é calcularmos o anel de Grothendieck da categoria $\mathfrak{m}^H$, em que H é uma álgebra de Hopf pontuada finito dimensional. Este cálculo surgiu no decorrer do estudo, pois alguns autores, por exemplo [21], definem o anel de Grothendieck de uma álgebra de Hopf H como sendo o anel de Grothendieck da categoria $\mathfrak{m}^H$. No entanto, observamos ao leitor que os resultados aqui obtidos não são pré-requisitos aos demais capítulos do trabalho.

Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra, é conhecido na literatura que existe uma bijeção entre os C-comódulos simples e as subcoálgebras simples de C

([1], Theorem 3.1.4). Tal correspondência foi muito útil para encontrarmos os H-comódulos à direita simples, em que H é uma álgebra de Hopf nas condições citadas acima.

A seguir, usando [1], [9] e [20], esclarecemos como ocorre esta bijeção. Sejam C uma $\Bbbk$-coálgebra e (M, ψ) um C-comódulo à direita finito dimensional. Dada uma base $\{m_i\}_{i=1}^n$ de M, denotamos por $C(M)$ o subespaço de C gerado pelo seguinte conjunto

$$\{c_i \in C : \psi(m) = \sum_i m_i \otimes c_i, \forall m \in M\}.$$

Observamos que $C(M)$ não depende da base escolhida para M e é uma subcoálgebra de C.

Teorema 1.3.22 ([1], Theorem 3.1.4) *Seja C uma $\Bbbk$-coálgebra.*
(i) *Se M é um C-comódulo à direita simples então $C(M)$ é uma $\Bbbk$-coálgebra simples.*
(ii) *Se D é uma $\Bbbk$-subcoálgebra simples de C então existe um C-comódulo à direita simples M tal que $C(M) = D$.*

Demonstração: (i) Por ([9], Exercise 2.5.4), segue que

$$C(M) = (ann_{C^*}(M))^{\perp} = \{c \in C | f(c) = 0, \forall f \in ann_{C^*}(M)\},$$

em que C^* é a álgebra dual de C.

Mostremos que $(ann_{C^*}(M))^{\perp}$ é uma subcoálgebra simples de C. Consideramos M como um C^*-módulo à esquerda. Então $M \simeq \dfrac{C^*}{ann_{C^*}(M)}$. Deste modo, como M é C^*-módulo simples, segue que $ann_{C^*}(M)$ é um ideal maximal de C^*. Agora, por ([1], Theorem 2.3.4), $ann_{C^*}(M)^{\perp}$ é uma subcoálgebra simples de C.

(ii) Sejam D uma $\Bbbk$-subcoálgebra simples de C e M um coideal à direita minimal de D. Então $\Delta M \subseteq M \otimes D \subseteq M \otimes C$.

Afirmamos que M é um C-comódulo à direita simples e $C(M) = D$. De fato, como C é um C-comódulo à direita com a coação definida por meio do coproduto e $\Delta M \subseteq M \otimes C$, obtemos que $(M, \Delta|_M)$ é um C-comódulo à direita.

Suponhamos que $(N, \Delta|_N)$ é um C-subcomódulo à direita de M. Então, $\Delta(N) \subseteq N \otimes D$ e assim, N é um coideal à direita de D e $N \subseteq M$. Como M é um coideal à direita minimal segue que $N = M$. Portanto, M é um C-comódulo à direita simples.

De $\Delta M \subseteq M \otimes D$, segue que $C(M) \subseteq D$. Como D é uma subcoálgebra simples, concluímos que $C(M) = D$. $\blacksquare$

Lema 1.3.23 *Sejam M e N dois C-comódulos à direita simples. Então $C(M) = C(N)$ se, e somente se, N e M são C-comódulos isomorfos.*

Demonstração: Ver ([9], exercise 3.1.3). ■

Teorema 1.3.24 ([20], 1.6 Lemma) *Existe uma correspondência bijetora entre o conjunto das classes de isomorfismos de C-comódulos à direita simples e o conjunto das subcoálgebras simples de C.*

Demonstração: Definimos

$$\phi : \{[M] : M \text{ é } C\text{-comódulo simples}\} \to \{\text{subcoálgebras simples de C}\},$$

tal que $\phi([M]) = C(M)$. Notemos, pelo Teorema 1.3.22 (i) e Lema 1.3.23, que ϕ está bem definido. É injetor e sobrejetor pelo Lema 1.3.23 e Teorema 1.3.22 (ii), respectivamente.

Assim, $\phi^{-1}(D)$ é a classe do coideal à direita minimal de D. ■

A partir de agora, aplicamos os resultados apresentados para calcularmos o anel de Grothendieck da categoria $\mathfrak{m}^H$.

Teorema 1.3.25 *Seja H uma álgebra de Hopf pontuada finito dimensional. Então $\{\Bbbk g, g \in G(H)\}$ é o conjunto de todas as subcoálgebras simples de H.*

Demonstração: Segue diretamente da Proposição 1.1.6. ■

Teorema 1.3.26 *Seja H uma álgebra de Hopf de dimensão finita e pontuada. Então $\{\Bbbk g, g \in G(H)\}$ é um conjunto completo de H-comódulos à direita simples e não isomorfos.*

Demonstração: Seja $g \in G(H)$. Consideramos $\Bbbk g$, uma subcoálgebra simples de H. Notemos que $\Bbbk g$ é coideal minimal de $\Bbbk g$ e consequentemente é um H-comódulo à direita simples com a coação definida por $\rho_g(g) = g \otimes g$.

Sejam $r, s \in G(H)$ e $r \neq s$. Suponhamos que $\Bbbk s \simeq \Bbbk r$ como H-comódulos à direita. Pelo Lema 1.3.23,

$$\Bbbk s = C(\Bbbk s) = C(\Bbbk r) = \Bbbk r.$$

Deste modo, existe $\alpha \in \Bbbk$ tal que $r = \alpha s$. Isto contradiz o fato de que os elementos de $G(C)$ são linearmente independentes. Portanto, $\Bbbk s$ e $\Bbbk r$ são H-comódulos à direita não isomorfos.

Pelos Teoremas 1.3.24 e 1.3.25, segue o resultado. ■

Agora, estando em posse de um conjunto completo de H-comódulos à direita simples e não isomorfos, calculamos o grupo de Grothendieck da categoria $\mathfrak{m}^H$.

Teorema 1.3.27 *$\mathcal{G}(\mathfrak{m}^H)$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelo conjunto*

$$\{[\Bbbk g], g \in G(H)\}.$$

Teorema 1.3.28 *$\mathcal{G}(\mathfrak{m}^H)$ é um anel e vale a seguinte regra de fusão para todo $g, h \in G(H)$*

$$[\Bbbk g][\Bbbk h] = [\Bbbk gh].$$

Demonstração: Consideramos $\varphi : \Bbbk g \otimes \Bbbk h \to \Bbbk gh$, em que $\varphi(ag \otimes bh) = abgh$, para todo $a, b \in \Bbbk$. Observamos que φ é bijetora pois os dois espaços tem a mesma dimensão e φ é sobrejetora.

A coação de $\Bbbk g \otimes \Bbbk h$ é $\rho : \Bbbk g \otimes \Bbbk h \to \Bbbk g \otimes \Bbbk h \otimes H$, em que $\rho(g \otimes h) = g \otimes h \otimes gh$. Assim, para $a, b \in \Bbbk$, temos

$$(\varphi \otimes id)\rho(ag \otimes bh) = (\varphi \otimes id)(ag \otimes bh \otimes gh) = abgh \otimes gh$$

e

$$\rho_{gh}\varphi(ag \otimes bh) = \rho_{gh}(abgh) = abgh \otimes gh.$$

Portanto, φ é um morfismo de H-comódulos.

Finalmente,

$$[\Bbbk g][\Bbbk h] = [\Bbbk g \otimes \Bbbk h] = [\Bbbk gh],$$

em que a primeira igualdade segue da definição e a última segue do fato de que φ é um isomorfismo de H-comódulos. ■

Para o próximo teorema consideramos o anel de grupo $\mathbb{Z}G(H)$.

Teorema 1.3.29 *Os anéis $\mathcal{G}(\mathfrak{m}^H)$ e $\mathbb{Z}G(H)$ são isomorfos.*

Demonstração: Consideramos o homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos $f : \mathbb{Z}G(H) \to \mathcal{G}(\mathfrak{m}^H)$ tal que $f(g) = [\Bbbk g]$, para cada $g \in G(H)$. Notemos que, se $\sum_{g \in G(H)} z_g[\Bbbk g] \in \mathcal{G}(\mathfrak{m}^H)$ então $\sum_{g \in G(H)} z_g g \in \mathbb{Z}G(H)$ e

$$f(\sum_{g \in G(H)} z_g g) = \sum_{g \in G(H)} z_g[\Bbbk g].$$

Isso prova que f é sobrejetora. Sejam $r = \sum_{g \in G(H)} z_g g$ e $r' = \sum_{g \in G(H)} z'_g g \in \mathbb{Z}G(H)$ tais que $f(r) = f(r')$. Então

$$\sum_{g\in G(H)} z_g[\Bbbk g] = \sum_{g\in G(H)} z'_g[\Bbbk g].$$

Consequentemente, $z_g = z'_g$ para todo $g \in G(H)$, pois $\mathcal{G}(\mathfrak{m}^H)$ é grupo abeliano livre gerado pelo conjunto $\{[\Bbbk g], g \in G(H)\}$. Deste modo, $r = r'$ e f é um isomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos.

Mostremos, agora, que f é homomorfismo de anéis.

$$\begin{aligned}
f(rr') &= f((\textstyle\sum_{g\in G(H)} z_g g)(\sum_{h\in G(H)} z_h h))\\
&= f(\textstyle\sum_{gh\in G(H)} z_g z_h gh)\\
&= \textstyle\sum_{gh\in G(H)} z_g z_h [\Bbbk gh]\\
&= (\textstyle\sum_{g\in G(H)} z_g[\Bbbk g])(\sum_{h\in G(H)} z_h[\Bbbk h]) = f(r)f(r').
\end{aligned}$$

■

1.4 Módulos de Yetter-Drinfeld

Nesta seção, apresentamos a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, em que H é uma álgebra de Hopf, pois as álgebras de interesse neste trabalho são todas levantamentos de álgebras de Nichols finito dimensionais da categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, em que $H = \Bbbk\mathbb{D}_m$.

Além disso, lembramos alguns resultados que são úteis e estudamos a caracterização dos objetos simples desta categoria quando H é uma álgebra de grupo. Nas duas últimas subseções, definimos os conceitos de álgebra de Nichols e bosonização, respectivamente.

Um dos motivos pelo qual a categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H é tão relevante na classificação de álgebras de Hopf pontuadas é pelo fato de que $A\#H$ é uma biálgebra se, somente se, A é uma biálgebra nesta categoria ([26], p. xiv).

1.4.1 Noções básicas

As principais referências para esta subseção são [26] e [6]. Consideramos H uma álgebra de Hopf com antípoda S.

Definição 1.4.1 *Um $\Bbbk$-espaço vetorial M é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H se M é simultaneamente um H-módulo* *à esquerda e um H-comódulo à esquerda e satisfaz a seguinte relação de compatibilidade, para quaisquer $h \in H$ e $m \in M$*

$$(h \cdot m)_{(-1)} \otimes (h \cdot m)_{(0)} = \rho(h \cdot m) = h_1 m_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot m_0.$$

Observamos que todo $\Bbbk$-espaço vetorial V é um módulo de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H, basta definirmos $hv = \varepsilon(h)v$ e $\rho(v) = 1 \otimes v$, para quaisquer $h \in H$ e $v \in V$.

Denotamos por ${}^H_H\mathcal{YD}$ a categoria em que os objetos são módulos de Yetter-Drinfeld à esquerda sobre H e os morfismos são aqueles que são simultaneamente morfismos de H-módulos e de H-comódulos. Nesse trabalho, todos os módulos de Yetter-Drinfeld sobre H são considerados à esquerda, assim a palavra esquerda será omitida. Quando não houver confusão também será omitida a álgebra de Hopf.

Dizemos que $N \subseteq M$ é um submódulo de Yetter-Drinfeld de M se N é, simultaneamente, um H-submódulo e um H-subcomódulo de M.

Se $M_1, \cdots, M_s$ são objetos em ${}^H_H\mathcal{YD}$, então $M_1 \otimes \cdots \otimes M_s$ é um objeto em ${}^H_H\mathcal{YD}$ com a ação e a coação definidas de modo usual, isto é

$$h(m_1 \otimes m_2 \otimes \cdots \otimes m_s) = h_1 m_1 \otimes h_2 m_2 \otimes \cdots \otimes h_s m_s \quad \text{e}$$

$$\rho(m_1 \otimes m_2 \cdots \otimes m_s) = m_{1(-1)} \cdots \otimes m_{s(-1)} \otimes (m_{1(0)} \otimes m_{2(0)} \cdots \otimes m_{s(0)}).$$

Assim, concluímos que $({}^H_H\mathcal{YD}, \otimes, \Bbbk, a, l, r)$, em que a, l e r são os isomorfismos canônicos, é uma categoria monoidal.

Além disso, se H é uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e R e S são duas álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$ então o módulo de Yetter-Drinfeld $R \otimes S$ possui uma estrutura de álgebra, como enunciamos no teorema a seguir.

Teorema 1.4.2 ([26], pg. 369) *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora, R e S álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$. Então $R \otimes S$ possui uma estrutura de álgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, em que o produto é definido da seguinte forma: se $r, r' \in R, s, s' \in S$, então $(r \otimes s)(r' \otimes s') = r(s_{(-1)}r') \otimes s_{(0)}s'$. Nesse caso, denotamos $R \otimes S$ por $R \underline{\otimes} S$.*

As próximas definições são importantes na subseção seguinte. Seja H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora.

Definição 1.4.3 ([6], Definition 1.7) *Uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma coleção $(B, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ em que (B, m, η) e (B, Δ, ε) são, respectivamente, uma álgebra e uma coálgebra em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $\Delta : B \to B \underline{\otimes} B$ e $\varepsilon : B \to \Bbbk$ são morfismos de álgebras.*

Definição 1.4.4 *Uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ é uma biálgebra trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$ que possui uma antípoda.*

No exemplo a seguir, tratamos da semissimplicidade da categoria ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$, em que G é um grupo finito e $\Bbbk$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero. A categoria ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ é semissimples e uma família completa de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$, simples e não isomorfos é bem conhecida na literatura. Usamos tal família no próximo capítulo e, por este motivo, a descrevemos neste exemplo. Para maiores detalhes sugerimos as referências ([3], Section 3.1), ([12], pg. 72) e ([8], pg. 74).

Exemplo 1.4.5 Iniciamos fixando algumas notações. Dado $\sigma \in G$, denotamos sua classe de conjugação em G por $\mathcal{O}_\sigma = \{x\sigma x^{-1}, x \in G\}$ e o grupo dos centralizadores de σ em G por $C_G(\sigma) = \{x \in G, x\sigma = \sigma x\}$. Sejam ϑ um conjunto que contém um representante de cada classe de conjugação de G e $\widehat{C_G(\sigma)}$ um conjunto de representantes das classes de representações irredutíveis e não isomorfas do grupo $C_G(\sigma)$.

Para $\sigma \in G$ e $(\rho, V) \in \widehat{C_G(\sigma)}$, definimos

$$M(\mathcal{O}_\sigma, \rho) := \Bbbk G \otimes_{\Bbbk C_G(\sigma)} V.$$

Então $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ é um módulo de Yetter-Drinfeld com a ação e a coação definidas, respectivamente, por

$$h \cdot (x \otimes v) = hx \otimes v \ \text{ (ação induzida)},$$

e

$$\delta(x \otimes v) = x\sigma x^{-1} \otimes (x \otimes v),$$

em que $h, x \in G, v \in V$. Os objetos $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ são simples em ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ e todo objeto simples em ${}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$ é isomorfo a $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$, para únicos $\sigma \in \vartheta$ e $\rho \in \widehat{C_G(\sigma)}$ ([3], Proposition 3.1.2).

A seguir apresentamos outra caracterização para os módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$ que são simples. Para o que segue sugerimos ([12], pg. 72) e ([8], pg. 74). Sejam $\sigma \in \vartheta$, $\mathcal{O}_\sigma = \{\sigma_1 = \sigma, \sigma_2, \cdots, \sigma_n\}$ uma numeração de sua classe de conjugação e $g_i \in G$ tal que $g_i \sigma g_i^{-1} = \sigma_i$, para cada $1 \leq i \leq n$. Então,

$$G = g_1 C_G(\sigma) \cup g_2 C_G(\sigma) \cup \cdots \cup g_n C_G(\sigma), n = [G : C_G(\sigma)]$$

donde cada elemento de G é expresso como um produto $g_i \gamma$, para únicos $1 \leq i \leq n$ e $\gamma \in C_G(\sigma)$. Uma consequência é que todo elemento de $\Bbbk G$

se escreve de forma única como $\sum_{i=1}^{n} g_i\gamma_i$, em que $\gamma_i \in \Bbbk C_G(\sigma)$. Assim,

$$\Bbbk G = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i \Bbbk C_G(\sigma)$$

é um $C_G(\sigma)$-módulo livre à direita com base $\{g_1, \cdots, g_n\}$ e

$$\Bbbk G \otimes_{\Bbbk C_G(\sigma)} V = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i \Bbbk C_G(\sigma) \otimes_{\Bbbk C_G(\sigma)} V.$$

Agora, usando que $g_i\gamma_i \otimes v = g_i \otimes \gamma_i \cdot v$, para quaisquer $\gamma_i \in \Bbbk C_G(\sigma)$ e $v \in V$, escrevemos

$$M(\mathcal{O}_\sigma, \rho) = \bigoplus_{1 \le i \le n} g_i \otimes V. \tag{1.5}$$

As estruturas de $\Bbbk G$-módulo e $\Bbbk G$-comódulo podem ser reescritas da seguinte forma:

$$g \cdot (g_i \otimes v) = g_j \otimes \gamma \cdot v, \quad \delta(g_i \otimes v) = \sigma_i \otimes g_i \otimes v, \tag{1.6}$$

em que $gg_i = g_j\gamma$, para únicos $1 \le j \le n$ e $\gamma \in C_G(\sigma)$.

Ainda, por ([8], pg. 74), se $\{v_1, \cdots, v_r\}$ é uma base para o $\Bbbk$-espaço vetorial V então $\{g_i \otimes v_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le r\}$ é uma base para $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ como $\Bbbk$-espaço vetorial.

Neste trabalho, assim como na referência [12], definimos $M(\mathcal{O}_\sigma, \rho)$ como na igualdade (1.5). Porém, optamos por incluir a primeira caracterização, pois é essencial para entendermos a ação em (1.6).

1.4.2 Álgebras de Nichols

As álgebras de Nichols são ferramentas importantes no estudo de classificação de álgebras de Hopf pontuadas. Deste modo, apresentamos na sequência a definição de tais objetos na categoria dos módulos de Yetter-Drinfeld sobre uma álgebra de Hopf H, com antípoda bijetora. Também, lembramos alguns detalhes de sua construção que são úteis no Capítulo 2. As principais referências para esta subseção são ([26], Section 15.5) e [6].

Definição 1.4.6 ([6], Definition 2.1) *Seja V um módulo de Yetter-Drinfeld sobre H. Uma álgebra de Nichols de V é uma álgebra de Hopf trançada graduada $R = \oplus_{n\ge 0} R(n)$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\Bbbk \cong R(0)$ e $V \cong R(1)$ em ${}^H_H\mathcal{YD}$, $P(R) = R(1)$ e R é gerada como álgebra por $R(1)$.*

O interessante é que dado $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, sempre existe a sua álgebra de Nichols e ela é única a menos de isomorfismo. Na sequência, por meio da observação e do teorema, damos uma ideia da construção da álgebra de Nichols de V.

Observação 1.4.7 Dado $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, consideramos a álgebra tensorial

$$(T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V), m, u, \iota),$$

em que $T^0(V) = \Bbbk, T^1(V) = V, T^n(V) = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$ (n vezes) para cada $n \geq 2$ e $\iota : V \to T(V)$ é a inclusão canônica. Os morfismos $m : T(V) \otimes T(V) \to T(V)$ e $\mu : \Bbbk \to T(V)$ estão definidos como explicado a seguir. Sejam $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T^n(V)$ e $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^m(V)$, então

$$xy = m(x \otimes y) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(V)$$

e

$$\mu(1) = 1 \in T^0(V) = \Bbbk.$$

A partir da propriedade universal da álgebra tensorial obtemos que $T(V)$ possui estrutura de coálgebra definida por

$$\Delta_{T(V)} : T(V) \to T(V) \underline{\otimes} T(V),$$

em que $\Delta_{T(V)}$ é o único morfismo de álgebras em ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\Delta_{T(V)}(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, para cada $v \in V$.

Também, $\varepsilon_{T(V)} : T(V) \to \Bbbk$ é o único morfismo de álgebras na categoria ${}^H_H\mathcal{YD}$ tal que $\varepsilon_{T(V)}(v) = 0$, para cada $v \in V$.

Além disso, $T(V)$ é uma álgebra de Hopf trançada e graduada em ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Para o próximo resultado, consideremos $\mathcal{Q}$ o conjunto dos ideais $I \subseteq T(V)$ tais que
(i) I é um ideal graduado e $I \cap V = 0$.
(ii) I é um coideal, ou seja, $\Delta_{T(V)}(I) \subseteq I \otimes T(V) + T(V) \otimes I$ e $\varepsilon_{T(V)}(I) = 0$.

Sejam, ainda, $I(V) = \sum_{J \in \mathcal{Q}} J$,

$$\widetilde{\mathcal{Q}} = \{I \in \mathcal{Q}, I \text{ é um módulo de Yetter-Drinfeld}\}$$

e $\widetilde{I}(V) = \sum_{J \in \widetilde{\mathcal{Q}}} J$.

Teorema 1.4.8 ([6], Proposition 2.2, (i), (ii) e (iv)) Seja $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$, então
$$\mathcal{B}(V) := \frac{T(V)}{\widetilde{I}(V)} = \bigoplus_{n \geq 0} \frac{T^n(V)}{\widetilde{I}(V)}$$
é uma álgebra de Nichols de V e $I(V) = \widetilde{I}(V)$. Essa é a única álgebra de Nichols de V, a menos de isomorfismo.

1.4.3 Bosonizações

Iniciamos relembrando alguns conceitos preliminares. As principais referências são [26] e [6]. Para o que segue, consideramos H uma biálgebra.

Definição 1.4.9 *Seja A uma álgebra.*
(i) *Dizemos que A é um H-módulo álgebra à esquerda se A é um H-módulo à esquerda tal que*

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \ \ e \ \ h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A,$$

para quaisquer $h \in H$ e $a, b \in A$.
(ii) *Dizemos que A é um H-comódulo álgebra à esquerda se A é um H-comódulo à esquerda tal que*

$$(ab)_{(-1)} \otimes (ab)_{(0)} = a_{(-1)} b_{(-1)} \otimes a_{(0)} b_{(0)} \ \ e \ \ \rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A,$$

para quaisquer $a, b \in A$.

Definição 1.4.10 *Seja C uma coálgebra.*
(i) *Dizemos que C é um H-módulo coálgebra à esquerda se C é um H-módulo à esquerda tal que*

$$(h \cdot c)_1 \otimes (h \cdot c)_2 = h_1 \cdot c_1 \otimes h_2 \cdot c_2 \ \ e \ \ \varepsilon(h \cdot c) = \varepsilon(h)\varepsilon(c),$$

para quaisquer $h \in H$ e $c \in C$.
(ii) *Dizemos que C é um H-comódulo coálgebra à esquerda se C é um H-comódulo à esquerda tal que*

$$(c_1)_{(-1)}(c_2)_{(-1)} \otimes (c_1)_{(0)} \otimes (c_2)_{(0)} = c_{(-1)} \otimes (c_{(0)})_1 \otimes (c_{(0)})_2$$

e $c_{(-1)}\varepsilon(c_{(0)}) = \varepsilon(c) 1_H$, para todo $c \in C$.

Neste trabalho, consideramos as estruturas definidas acima sempre à esquerda, e com este entendimento omitiremos a palavra esquerda. É possível definir um produto e um coproduto no espaço vetorial $A \otimes H$, se A for um H-módulo álgebra e H-comódulo álgebra, respectivamente.

Definição 1.4.11 *Seja A um H-módulo álgebra. Definimos $A\#H = A \otimes H$ como $\Bbbk$-espaço vetorial e a multiplicação*

$$(a\#h)(b\#l) = a(h_1.b)\#h_2 l,$$

para quaisquer $h, l \in H$ e $a, b \in A$. Então $A\#H$ é uma álgebra com unidade $1_A\#1_H$, denominada produto smash de A e H.

Definição 1.4.12 *Seja C um H-comódulo coálgebra. Definimos $C\#H = C \otimes H$ como $\Bbbk$-espaço vetorial, a comultiplicação*

$$\Delta(c\#h) = c_1\#(c_2)_{(-1)}h_1 \otimes (c_2)_{(0)}\#h_2$$

e a counidade

$$\varepsilon(c\#h) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h),$$

para quaisquer $h \in H$ e $c \in C$. Então $C\#H$ é uma coálgebra e é denominada coproduto smash de C e H.

A seguir escrevemos o conceito de bosonização.

Definição 1.4.13 *Sejam H uma álgebra de Hopf com antípoda bijetora e R uma álgebra de Hopf trançada em ${}^H_H\mathcal{YD}$. A bosonização de R por H é a álgebra de Hopf, denotada por $R\#H$, em que as estruturas de álgebra e de coálgebra são dadas pelo produto e coproduto smash, respectivamente. A antípoda é definida por*

$$S : R\#H \to R\#H,$$

em que $S(r\#h) = (1_R\#S_H(r_{(-1)}h))(S_R(r_{(0)})\#1_H)$, para quaisquer $r \in R$ e $h \in H$.

Finalizamos esta subseção com alguns resultados envolvendo o produto smash, úteis na demonstração do Lema 1.4.18, que é essencial no Capítulo 3. Consideramos G um grupo finito.

Proposição 1.4.14 *As álgebras $\Bbbk\#\Bbbk G$ e $\Bbbk G$ são isomorfas.*

Demonstração: Lembramos que $\Bbbk$ é um $\Bbbk G$-módulo à esquerda via

$$(\sum_{g \in G} k_g g) \cdot r = \varepsilon(\sum_{g \in G} k_g g)r = (\sum_{g \in G} k_g)r, \sum_{g \in G} k_g g \in \Bbbk G, r \in \Bbbk.$$

Deste modo, dados $a\# \sum_{g \in G} k_g g, b\# \sum_{h \in G} k_h h \in \Bbbk\#\Bbbk G$, temos

$$
\begin{aligned}
(a\# \textstyle\sum_{g\in G} k_g g)(b\# \sum_{h\in G} k_h h) &= \textstyle\sum_{g,h\in G} k_g k_h (a\# g)(b\# h)\\
&= \textstyle\sum_{g,h\in G} k_g k_h a(gb)\# gh\\
&= \textstyle\sum_{g,h\in G} k_g k_h a(\varepsilon(g)b)\# gh\\
&= \textstyle\sum_{g,h\in G} k_g k_h ab\# gh\\
&= ab\# \textstyle\sum_{g,h\in G} k_g k_h gh.
\end{aligned}
$$

Consideremos o isomorfismo canônico $\phi : \Bbbk \otimes \Bbbk G \to \Bbbk G$ tal que $\phi(r \otimes \sum_{g\in G} k_g g) = \sum_{g\in G} r k_g g$ e mostremos que é um morfismo de álgebras.

Pela conta feita acima, segue que

$$
\begin{aligned}
\phi((a\# \textstyle\sum_{g\in G} k_g g)(b\# \sum_{h\in G} k_h h)) &= \phi(ab\# \textstyle\sum_{g,h\in G} k_g k_h gh)\\
&= \textstyle\sum_{g,h\in G} ab k_g k_h gh.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\phi(a\# \textstyle\sum_{g\in G} k_g g)\phi(b\# \sum_{h\in G} k_h h) &= (\textstyle\sum_{g\in G} a k_g g)(\sum_{h\in G} b k_h h)\\
&= \textstyle\sum_{g,h\in G} ab k_g k_h gh.
\end{aligned}
$$

Portanto, ϕ é um morfismo de álgebras e as álgebras $\Bbbk\#\Bbbk G$ e $\Bbbk G$ são isomorfas. ■

Proposição 1.4.15 ([28], Theorem 2.7) *Seja A uma álgebra com unidade. Então $rad(A\#\Bbbk G) = rad(A)\#\Bbbk G$.*

Proposição 1.4.16 *Seja A um $\Bbbk G$-módulo álgebra com unidade. Como álgebras*

$$\frac{A\#\Bbbk G}{rad(A)\#\Bbbk G} \simeq \frac{A}{rad(A)}\#\Bbbk G.$$

Demonstração: Consideramos a aplicação bilinear a seguir.

$$
\begin{aligned}
\psi \quad : \quad \frac{A}{rad(A)} \times \Bbbk G &\to \frac{A \otimes \Bbbk G}{rad(A) \otimes \Bbbk G}\\
(\overline{b}, \textstyle\sum k_g g) &\mapsto \overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}},
\end{aligned}
$$

em que $\overline{b} = b + rad(A)$ e $\overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}} = b \otimes \sum k_g g + rad(A) \otimes \Bbbk G$.

Afirmação: ψ está bem definida.

De fato, se $(\overline{b}, \sum k_g g) = (\overline{a}, \sum k_g g)$, então $a - b \in rad(A)$. Consequentemente, $\overline{\overline{a - b \otimes \sum k_g g}} = 0$, provando a afirmação.

Deste modo, existe um único morfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais

$$\psi' : \frac{A}{rad(A)} \otimes \Bbbk G \to \frac{A \otimes \Bbbk G}{rad(A) \otimes \Bbbk G}$$

tal que $\psi'(\overline{b} \otimes \sum k_g g) = \overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}}$.

Consideramos a seguinte aplicação bilinear.

$$\begin{array}{rcl} \phi \quad : \quad A \times \Bbbk G & \to & \dfrac{A}{rad(A)} \otimes \Bbbk G \\ (b, \sum k_g g) & \mapsto & \overline{b} \otimes \sum k_g g. \end{array}$$

Então existe um único morfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais

$$\phi' : A \otimes \Bbbk G \ \to \ \frac{A}{rad(A)} \otimes \Bbbk G$$

tal que $\phi'(b \otimes \sum k_g g) = \overline{b} \otimes \sum k_g g$.

Pelo fato de que $rad(A) \otimes \Bbbk G \subseteq ker(\phi')$, segue, pela propriedade universal do quociente, que existe um único morfismo de $\Bbbk$-espaços vetoriais

$$\phi'' : \frac{A \otimes \Bbbk G}{rad(A) \otimes \Bbbk G} \to \frac{A}{rad(A)} \otimes \Bbbk G,$$

tal que $\phi''(\overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}}) = \overline{b} \otimes \sum k_g g$.

Notemos que

$$\phi'' \circ \psi'(\overline{b} \otimes \sum k_g g) = \phi''(\overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}}) = \overline{b} \otimes \sum k_g g$$

e

$$\psi' \circ \phi''(\overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}}) = \psi'(\overline{b} \otimes \sum k_g g) = \overline{\overline{b \otimes \sum k_g g}}.$$

Logo, $\dfrac{A \otimes \Bbbk G}{rad(A) \otimes \Bbbk G}$ e $\dfrac{A}{rad(A)} \otimes \Bbbk G$ são $\Bbbk$-espaços vetoriais isomorfos.

Observemos que $rad(A)$ é um $\Bbbk G$-módulo, pois dados $b \in rad(A)$ e $r \in \Bbbk G$, temos $rb = r(1_A b) = (r1_A)b \in rad(A)$. Ainda, pela Proposição 1.4.15, segue que $rad(A)\#\Bbbk G = rad(A\#\Bbbk G)$ é um ideal de $A\#\Bbbk G$. Consideramos, assim, as álgebras $\dfrac{A}{rad(A)}\#\Bbbk G$ e $\dfrac{A\#\Bbbk G}{rad(A)\#\Bbbk G}$ e mostremos que ψ' é um morfismo de álgebras.

Sejam $(\overline{a}\#\sum k_h h), (\overline{b}\#\sum k_g g) \in \dfrac{A}{rad(A)}\#\Bbbk G$, então

$$\begin{aligned}
\psi'((\overline{a}\#\sum k_h h)(\overline{b}\#\sum k_g g)) &= \textstyle\sum_{h,g\in G} k_h k_g \psi'(\overline{a}(h\overline{b})\#hg) \\
&= \textstyle\sum_{h,g\in G} k_h k_g \psi'(\overline{a(hb)}\#hg) \\
&= \textstyle\sum_{h,g\in G} k_h k_g \overline{\overline{a(hb)\#hg}} \\
&= \textstyle\sum_{h,g\in G} k_h k_g (\overline{\overline{a\#h}})(\overline{\overline{b\#g}}) \\
&= (\overline{\overline{a\#\sum_{h\in G} k_h h}})(\overline{\overline{b\#\sum_{g\in G} k_g g}}) \\
&= \psi'(\overline{a}\#\textstyle\sum k_h h)\psi'(\overline{b}\#\sum k_g g).
\end{aligned}$$

Logo, as álgebras $\dfrac{A\#\Bbbk G}{rad(A)\#\Bbbk G}$ e $\dfrac{A}{rad(A)}\#\Bbbk G$ são isomorfas. ■

Antes de enunciarmos a próxima proposição, lembremos o conceito de álgebra exterior, de acordo com ([16], Chapter XIX).

Sejam M um $\Bbbk$-espaço vetorial e $T(M) = \oplus_{r\geq 0} T^r(M)$ a álgebra tensorial de M. Para cada r, seja a_r o $\Bbbk$-subespaço de $T^r(M)$ gerado pelos elementos da forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$, em que $x_i = x_j$ para algum $i \neq j$. Definimos $\wedge^r(M) := \dfrac{T^r(M)}{a_r}$ e denotamos por $x_1 \wedge \cdots \wedge x_r$ a classe de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ em $\wedge^r(M)$. Se $\dim_{\Bbbk} M = n$ então $\wedge^r(M) = 0$, para todo $r > n$.

Denotamos $\wedge(M) := \oplus_{r=1}^{\infty} \wedge^r(M)$. Com o produto definido a seguir $\wedge(M)$ é denominada álgebra exterior.

$$(x_1 \wedge \cdots \wedge x_r)(y_1 \wedge \cdots \wedge y_r) \rightarrow x_1 \wedge \cdots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_r.$$

Proposição 1.4.17 ([15], Example (4), pg. 60) *Sejam M um $\Bbbk$-espaço vetorial e $A = \wedge(M) = \Bbbk \oplus \wedge^1(M) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(M)$ a álgebra exterior de M. Então, $rad(A) = \wedge^1(M) \oplus \cdots \oplus \wedge^n(M)$ e $\dfrac{A}{rad(A)} \cong \Bbbk$.*

Observamos que se M é $\Bbbk G$-módulo então $\wedge(M)$ é um $\Bbbk G$-módulo álgebra e o isomorfismo acima também é um morfismo de $\Bbbk G$-módulos.

Lema 1.4.18 *Sejam G um grupo finito e M um $\Bbbk G$-módulo, então $\dfrac{\wedge(M)\#\Bbbk G}{rad(\wedge(M)\#\Bbbk G)}$ e $\Bbbk G$ são álgebras isomorfas.*

Demonstração: Observamos que

$$\begin{aligned}
\frac{\wedge(M)\#\Bbbk G}{rad(\wedge(M)\#\Bbbk G)} &= \frac{\wedge(M)\#\Bbbk G}{rad(\wedge(M))\#\Bbbk G} \\
&\cong \frac{\wedge(M)}{rad(\wedge M)}\#\Bbbk G \\
&\cong \Bbbk\#\Bbbk G \\
&\cong \Bbbk G,
\end{aligned}$$

em que a igualdade e os isomorfismos ocorrem devido as Proposições 1.4.15, 1.4.16, 1.4.17 e 1.4.14, respectivamente. ■

Capítulo 2

Álgebras de Hopf pontuadas sobre $\mathbb{D}_m$

Neste capítulo, apresentamos as álgebras de Hopf que motivaram a realização deste trabalho. São as álgebras de Hopf pontuadas finito dimensionais H tais que $G(H) = \mathbb{D}_m$, em que $m = 4t$ e $t \geq 3$. Denotamos $n = \frac{m}{2}$.

Em [12], são classificadas todas as álgebras nestas condições. O método de classificação usado é o levantamento e, como $G(H) = \mathbb{D}_m$, consiste resumidamente nos seguintes passos (para mais detalhes sobre o método de levantamento veja [6]):

(i) Determinar todos os módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ tais que a álgebra de Nichols $\mathcal{B}(V)$ é finito dimensional.

(ii) Para cada V do passo (i), computar todas as álgebras de Hopf H tais que $gr\, H \simeq \mathcal{B}(V)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. A álgebra de Hopf H é denominada levantamento de $\mathcal{B}(V)$ sobre $\mathbb{D}_m$.

(iii) Provar que toda álgebra de Hopf pontuada finito dimensional tal que $G(H) = \mathbb{D}_m$, em que $m = 4t$ e $t \geq 3$, é gerada por elementos grouplikes e skew-primitivos.

Mais precisamente, os autores provam o teorema a seguir.

Teorema 2.0.1 ([12], Theorem B) *Seja H uma álgebra de Hopf pontuada finito dimensional tal que $G(H) = \mathbb{D}_m$. Então H é isomorfa a uma das seguintes álgebras:*

(a) $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ *com* $I = \{(i,k)\} \in \mathcal{J}, k \neq n$;

(b) $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ *com* $L \in \mathcal{L}$;

(c) $A_I(\lambda, \gamma)$ *com* $I \in \mathcal{J}, |I| > 1$, *ou* $I = \{(i, n)\}$ *e* $\gamma = 0$*;*

(d) $B_{I,L}(\lambda, \gamma, \theta, \mu)$ *com* $(I, L) \in \mathcal{K}, |I| > 0$ *e* $|L| > 0$.

Reciprocamente, qualquer álgebra de Hopf nesta lista é um levantamento de uma álgebra de Nichols finito dimensional em ${}^{\Bbbk\mathbb{D}_m}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$.

O objetivo deste capítulo é caracterizarmos por meio dos geradores as álgebras de Hopf pontuadas finito dimensionais dadas nos itens (a) e (b) do Teorema 2.0.1 e dois casos particulares da álgebra do item (c), a saber, $A_I(\lambda, 0)$ com $I = \{(i, n)\}$ e $A_I(0, 0)$ para $I = \{(i, n)\}$ ou $|I| > 1$. Essas são as álgebras que usaremos nos capítulos posteriores e tal caracterização é essencial nos desenvolvimentos que serão realizados.

Os objetos M_I e M_L que aparecem no Teorema 2.0.1, são módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$, cuja álgebra de Nichols possui dimensão finita. São calculados, portanto, no primeiro passo do método de levantamento e são objetos simples ou somas de objetos simples pois, pelo Exemplo 1.4.5, a categoria ${}^{\Bbbk\mathbb{D}_m}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$ é semissimples.

Ainda, pelo exemplo citado, os objetos simples de ${}^{\Bbbk\mathbb{D}_m}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$ são parametrizados por pares $(\mathcal{O}, \rho)$, em que $\mathcal{O}$ é uma classe de conjugação de $\mathbb{D}_m$ e (ρ, V) é uma representação irredutível dos centralizadores de um elemento fixo $\sigma \in \mathcal{O}$. São denotados na literatura por $M(\mathcal{O}, \rho)$.

Uma vez que as classes de conjugações de $\mathbb{D}_m$ são distintas para m par e m ímpar, é conveniente separar o estudo em dois casos. Neste trabalho, assim como em [12], tratamos apenas do caso em que m é par (mais especificamente, $m = 4t$ e $t \geq 3$). Tendo isso em mente, lembramos que as classes de conjugações de $\mathbb{D}_m, m$ par, são:

$$\mathcal{O}_1 = \{1\}, \mathcal{O}_{h^n} = \{h^n\}, \mathcal{O}_{h^i} = \{h^i, h^{-i}\}, \text{ para } 1 \leq i < n,$$

$$\mathcal{O}_g = \{gh^j : j \text{ par}\} \text{ e } \mathcal{O}_{gh} = \{gh^j : j \text{ ímpar}\}.$$

As dimensões das álgebras de Nichols dos módulos de Yetter-Drinfeld que são simples e parametrizados pelas classes de conjugações $\mathcal{O}_{y^n}$ e $\mathcal{O}_{h^i}$, com m par, foram calculadas em ([2], Theorem 3.1 (b)). Os objetos M_I e M_L surgem deste estudo e isto ficará claro nas duas seções seguintes. Em [12], especificamente para $m = 4t$ e $t \geq 3$, os autores completam o estudo, mostrando que os módulos de Yetter-Drinfeld simples parametrizados pelas classes de conjugações $\mathcal{O}_g$ e $\mathcal{O}_{gh}$ possuem álgebras de Nichols com dimensão infinita. Assim, em [12] a classificação das álgebras é realizada com essa restrição em m.

Observamos que para m ímpar não se conhece ainda a dimensão das álgebras de Nichols de todos os módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$. Sabe-se que existe no máximo um simples tal que sua álgebra de Nichols possui dimensão finita ([2], Theorem 3.1 (a)). E mais, por ([4], Theorem 4.8), a menos de isomorfismo essa é a única álgebra de Nichols em ${}^{\Bbbk\mathbb{D}_m}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$ que pode ter dimensão finita.

2.1 Os objetos M_I e $\mathcal{B}(M_I)$

Tendo em vista a caracterização apresentada no Exemplo 1.4.5 para os objetos simples da categoria ${}^{\Bbbk\mathbb{D}_m}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$, consideramos a classe de conjugação $\mathcal{O}_{h^i} = \{h^i, h^{-i}\}$, em que $1 \leq i \leq n-1$. Nesse caso, o grupo dos centralizadores de h^i em $\mathbb{D}_m$, denotado por $C_{\mathbb{D}_m}(h^i)$, é $< h >$, ou seja, um grupo cíclico de ordem m. As representações irredutíveis de $< h >$ são bem conhecidas na literatura (é um grupo cíclico) e são dadas por

$$\mu_k :< h >\to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk),\ 1 \leq k \leq m-1,$$

em que $\mu_k(h) = \omega^k$ e ω é uma raiz m-ésima primitiva da unidade. Então, $M_{i,k} := M(\mathcal{O}_{h^i}, \mu_k)$ é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ que é simples, para quaisquer $1 \leq k \leq m-1$ e $1 \leq i \leq n-1$.

Na sequência, obtemos uma base para o $\Bbbk$-espaço vetorial $M_{i,k}$, em que $1 \leq k \leq m-1$ e $1 \leq i \leq n-1$. Para o que segue, usamos as notações e as definições introduzidas no Exemplo 1.4.5. Sejam $\mathcal{O}_{h^i} = \{h^i, h^{-i}\}$ e $C_{\mathbb{D}_m}(h^i) =< h >$. Notemos que

$$1h^i1^{-1} = h^i \quad \text{e} \quad gh^ig^{-1} = h^{-i}.$$

Assim, $g_1 = 1$, $g_2 = g$ e

$$M_{i,k} = (1 \otimes \Bbbk) \oplus (g \otimes \Bbbk).$$

Seja $\{v\}$ uma base para $\Bbbk$ então $\{a_{i,k} = 1 \otimes v, b_{i,k} = g \otimes v\}$ é uma base para $M_{i,k}$ e $\dim_{\Bbbk} M_{i,k} = 2$. Logo, pelas ação e coação definidas no Exemplo 1.4.5, a estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ do objeto $M_{i,k}$ está totalmente determinada pelas relações calculadas abaixo.

$$\begin{aligned} g \cdot a_{i,k} &= g \cdot (1 \otimes v) \overset{(1)}{=} g \otimes 1 \cdot v \\ &= g \otimes \mu_k(1)(v) = g \otimes v \\ &= b_{i,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \cdot b_{i,k} &= g \cdot (g \otimes v) \overset{(2)}{=} 1 \otimes 1 \cdot v \\ &= 1 \otimes \mu_k(1)(v) = 1 \otimes v \\ &= a_{i,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\cdot a_{i,k} &= h\cdot(1\otimes v) \overset{(3)}{=} 1\otimes h\cdot v\\ &= 1\otimes \mu_k(h)(v) = 1\otimes \omega^k v\\ &= \omega^k a_{i,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\cdot b_{i,k} &= h\cdot(g\otimes v) \overset{(4)}{=} g\otimes h^{-1}\cdot v\\ &= g\otimes \mu_k(h^{-1})(v) = g\otimes \omega^{-k} v\\ &= \omega^{-k} b_{i,k}, \end{aligned}$$

$$\delta(a_{i,k}) = h^i\otimes a_{i,k} \ \text{ e } \ \delta(b_{i,k}) = h^{-i}\otimes b_{i,k}.$$

Em $(1), (2), (3)$ e (4) usamos, respectivamente, as seguintes igualdades em $\mathbb{D}_m$: $g\cdot 1 = g\cdot 1$; $g^2 = 1\cdot 1$; $h\cdot 1 = 1\cdot h$ e $h\cdot g = g\cdot h^{-1}$.

Observação 2.1.1 O objetivo desta observação é caracterizarmos os objetos $M_{i,k}$, em que $1\leq i\leq n-1$ e $1\leq k\leq m-1$, como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos já conhecidos. Para tanto, consideramos as representações ρ_k, da Subseção 1.2.1, definidas para todo $1\leq k\leq m-1$. Vimos que $\rho_n\simeq\chi_3\oplus\chi_4$ e $\rho_k\simeq\rho_{m-k}$, para todo $1\leq k\leq n-1$. Então, devido as Proposições 1.2.15 e 1.2.18, temos $M_{\rho_k}\simeq M_{\rho_{m-k}}$ e $M_{\rho_n}\simeq M_{\chi_3}\oplus M_{\chi_4}$ como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos.

Notemos que $M_{i,k}$ e M_{ρ_k}, para $1\leq k\leq m-1$, são espaços vetoriais isomorfos, ambos possuem dimensão 2. Afirmamos que são $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos isomorfos.

De fato, tendo em mente a base $\beta=\{v_1,v_2\}$ de M_{ρ_k} como na Subseção 1.2.1, consideramos o $\Bbbk$-isomorfismo $f: M_{\rho_k}\to M_{i,k}$, tal que $f(v_1)=a_{i,k}$ e $f(v_2)=b_{i,k}$. Usando as igualdades (1.1) e (1.2) e a estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld de $M_{i,k}$, segue que

$$\begin{aligned} f(g\cdot v_1) &= f(v_2)\\ &= b_{i,k} = g\cdot a_{i,k}\\ &= g\cdot f(v_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(g\cdot v_2) &= f(v_1)\\ &= a_{i,k} = g\cdot b_{i,k}\\ &= g\cdot f(v_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(h\cdot v_1) &= f(\omega^k v_1) = \omega^k f(v_1)\\ &= \omega^k a_{i,k} = h\cdot a_{i,k}\\ &= h\cdot f(v_1) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(h\cdot v_2) &= f(\omega^{-k} v_2) = \omega^{-k} f(v_2)\\ &= \omega^{-k} b_{i,k} = h\cdot b_{i,k}\\ &= h\cdot f(v_2). \end{aligned}$$

Logo, $M_{i,k}$ e M_{ρ_k} são $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos isomorfos, para todo $1 \leq k \leq m-1$. Segue que

$$M_{i,k} \simeq M_{\rho_k}, \text{ para } 1 \leq k \leq n-1,$$

$$M_{i,n} \simeq M_{\rho_n} \simeq M_{\chi_3} \oplus M_{\chi_4}$$

e

$$M_{i,m-k} \simeq M_{\rho_{m-k}} \simeq M_{\rho_k}, \text{ para } 1 \leq k \leq n-1.$$

Como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos $M_{i,k} \simeq M_{i,m-k}$ mas não como módulos de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$, pois, pelo Exemplo 1.4.5, $M_{i,k}$ e $M_{i,m-k}$ são objetos simples e não isomorfos. Isso finaliza a observação.

Agora, de acordo com ([12], Section 2A2), definimos

$$J = \{(i,k) : \omega^{ki} = -1, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq m-1\},$$

com o intuito de estudarmos a dimensão da álgebra de Nichols $\mathcal{B}(M_{i,k})$, para quaisquer $1 \leq k \leq m-1$ e $1 \leq i \leq n-1$.

Por ([2], Theorem 3.1 (b) (ii)), temos $\mathcal{B}(M_{i,k}) \simeq \wedge M_{i,k}$ e $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_{i,k}) = 4$, para cada $(i,k) \in J$. Por outro lado, se $\omega^{ki} \neq -1$ então $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_{i,k}) = \infty$. Para provar que a dimensão é infinita usa-se o fato de que $\mu_k(h^i) \neq -id$.

É possível somar objetos da forma $M_{i,k}$ e ainda obtermos módulos de Yetter-Drinfeld cuja álgebra de Nichols possui dimensão finita. Para tanto, consideramos a relação de equivalência no conjunto J definida por (veja [12], Section 2B1)

$$(i,k) \sim (p,q) \text{ se } \omega^{iq+pk} = 1.$$

Seja $M = M_{i_1,k_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_r,k_r}$ com $(i_s,k_s) \in J$, para cada $1 \leq s \leq r$. Então $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M) < \infty$ se, e somente se, $(i_p,k_p) \sim (i_q,k_q)$, para todo $1 \leq p,q \leq r$. Também, $\mathcal{B}(M) \simeq \wedge M$ e $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M) = 4^r$ ([12], Proposition 2.5).

Definição 2.1.2 ([12], Definition 2.6) *Seja*

$$\mathcal{J} = \left\{ I = \bigcup_{s=1}^{r} \{(i_s,k_s)\} : (i_s,k_s) \in J, (i_s,k_s) \sim (i_p,k_p), 1 \leq s,p \leq r \right\}.$$

Para cada $I \in \mathcal{J}$, definimos $M_I = \oplus_{(i,k)\in I} M_{i,k}$.

Pelo exposto acima, segue que $\mathcal{B}(M_I) \simeq \wedge M_I$ e $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_I) = 4^{|I|}$, para cada $I \in \mathcal{J}$.

Na sequência, caracterizamos a álgebra de Nichols $\mathcal{B}(M_I)$ por meio de seus geradores e relações. Desenvolvemos esses resultados pois são necessários na Seção 2.3.

Teorema 2.1.3 *Sejam $I \in \mathcal{J}$ e $M_I = \oplus_{(i,k)\in I} M_{i,k}$. Então a álgebra de Nichols $\mathcal{B}(M_I)$ é gerada como álgebra pelo conjunto $\{\overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}\}_{(i,k)\in I}$ e sua estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ está totalmente determinada pelas relações a seguir, onde $(i,k) \in I$.*

$$g \cdot \overline{a_{i,k}} = \overline{b_{i,k}}, \quad g \cdot \overline{b_{i,k}} = \overline{a_{i,k}}, \quad h \cdot \overline{a_{i,k}} = \omega^k \overline{a_{i,k}}, \quad h \cdot \overline{b_{i,k}} = \omega^{-k} \overline{b_{i,k}},$$

$$\delta(\overline{a_{i,k}}) = h^i \otimes \overline{a_{i,k}} \text{ e } \delta(\overline{b_{i,k}}) = h^{-i} \otimes \overline{b_{i,k}}.$$

Demonstração: Do Teorema 1.4.8, segue que

$$\mathcal{B}(M_I) = \frac{T(M_I)}{\widetilde{I}(M_I)} = \bigoplus_{n\geq 0} \frac{T^n(M_I)}{\widetilde{I}(M_I)}.$$

A álgebra de Nichols $\mathcal{B}(M_I)$ é gerada como álgebra por $\mathcal{B}(M_I)(1) = M_I + \widetilde{I}(M_I)$, isto é, por elementos em grau 1. Vimos que $\{a_{i,k}, b_{i,k}\}$ é uma base de $M_{i,k}$, para cada $(i,k) \in I$. Assim, $\{a_{i,k}, b_{i,k}\}_{(i,k)\in I}$ é uma base para M_I e consequentemente $\mathcal{B}(M_I)$ é gerada como álgebra por $\{\overline{a_{i,k}} := a_{i,k} + \widetilde{I}(M_I), \overline{b_{i,k}} := b_{i,k} + \widetilde{I}(M_I)\}_{(i,k)\in I}$.

Agora, como $\mathcal{B}(M_I)$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo álgebra e um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-comódulo álgebra, obtemos que sua estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ está totalmente definida pelas relações a seguir, onde $(i,k) \in I$.

$$g \cdot \overline{a_{i,k}} = \overline{g \cdot a_{i,k}} = \overline{b_{i,k}}, \; g \cdot \overline{b_{i,k}} = \overline{g \cdot b_{i,k}} = \overline{a_{i,k}},$$

$$h \cdot \overline{a_{i,k}} = \overline{h \cdot a_{i,k}} = \omega^k \overline{a_{i,k}}, h \cdot \overline{b_{i,k}} = \overline{h \cdot b_{i,k}} = \omega^{-k} \overline{b_{i,k}},$$

$$\delta(\overline{a_{i,k}}) = h^i \otimes \overline{a_{i,k}} \quad \text{e} \quad \delta(\overline{b_{i,k}}) = h^{-i} \otimes \overline{b_{i,k}}.$$

■

Para facilitar a leitura da próxima proposição achamos importante relembrar, na observação a seguir, o produto e o coproduto da álgebra tensorial $T(M_I)$ e o produto da álgebra $T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I)$.

Observação 2.1.4 Consideramos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(M_I) \otimes T(M_I) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & T(M_I) \arrow[d, "\Delta"] \\
(T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I)) \otimes (T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I)) \arrow[r, "\widetilde{m}"'] & T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I)
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Da observação 1.4.7, segue que m está definido como explicado na sequência. Sejam

$$x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T^n(M_I) \ \text{ e } \ y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^m(M_I)$$

então $xy = m(x \otimes y) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m \in T^{n+m}(M_I)$.

Assim, para $x = a_{i,k} \in M_I$, podemos escrever $a_{i,k}a_{i,k} = m(a_{i,k} \otimes a_{i,k}) = a_{i,k} \otimes a_{i,k}$.

Além disso, o coproduto da álgebra tensorial $T(M_I)$, $\Delta_{T(M_I)} : T(M_I) \to T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I)$, é definido de modo que $\Delta_{T(M_I)}$ é o único morfismo de álgebras em ${}^{\Bbbk\mathbb{D}_m}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathcal{YD}$ tal que $\Delta_{T(M_I)}(w) = w \otimes 1 + 1 \otimes w$, para cada $w \in M_I$.

Agora, $\widetilde{m}((r \otimes s) \otimes (r' \otimes s')) = r(s_{(-1)} \cdot r') \otimes s_{(0)}s'$, para quaisquer $r, r', s, s' \in T(M_I)$, de acordo com o Teorema 1.4.2. Os produtos $r(s_{(-1)} \cdot r')$ e $s_{(0)}s'$ são realizados em $T(M_I)$.

Observação 2.1.5 Os elementos $\overline{a_{i,k}}$ e $\overline{b_{i,k}}$, do teorema anterior, são elementos primitivos de $\mathcal{B}(M_I)$, para cada $(i,k) \in I$. De fato, como $\mathcal{B}(M_I) = \frac{T(M_I)}{\widetilde{I}(M_I)}$ e $\Delta_{T(M_I)}(w) = w \otimes 1 + 1 \otimes w$, para cada $w \in M_I$, segue a afirmação.

Proposição 2.1.6 *Sejam $I \in \mathcal{J}$ e $V \subseteq T(M_I)$ o subespaço gerado pelos elementos $a_{p,q} \otimes a_{i,k} + a_{i,k} \otimes a_{p,q}$ e $a_{p,q} \otimes b_{i,k} + b_{i,k} \otimes a_{p,q}$, em que $(i,k), (p,q) \in I$. Se $J_V =< V >\subseteq T(M_I)$ é o ideal gerado por V então J_V é um ideal graduado, um coideal e $J_V \cap M_I = 0$. Além disso, $\overline{a_{p,q} \otimes a_{i,k} + a_{i,k} \otimes a_{p,q}} = 0 = \overline{a_{p,q} \otimes b_{i,k} + b_{i,k} \otimes a_{p,q}}$ em $\mathcal{B}(M_I)$.*

Demonstração: Como $T(M_I)$ é álgebra de Hopf, segue que Δ é morfismo de álgebras. Para as operações a seguir, tenhamos em mente o diagrama $(*)$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
&\Delta(a_{p,q}\otimes a_{i,k}+a_{i,k}\otimes a_{p,q}) = \Delta(a_{p,q}a_{i,k}+a_{i,k}a_{p,q})\\
= \quad & \widetilde{m}(\Delta(a_{p,q})\otimes\Delta(a_{i,k}))+\widetilde{m}(\Delta(a_{i,k})\otimes\Delta(a_{p,q}))\\
= \quad & \widetilde{m}((a_{p,q}\otimes 1+1\otimes a_{p,q})\otimes(a_{i,k}\otimes 1+1\otimes a_{i,k}))\\
& +\widetilde{m}((a_{i,k}\otimes 1+1\otimes a_{i,k})\otimes(a_{p,q}\otimes 1+1\otimes a_{p,q}))\\
\overset{(1)}{=} \quad & a_{p,q}a_{i,k}\otimes 1+a_{p,q}\otimes a_{i,k}+h^{p}\cdot a_{i,k}\otimes a_{p,q}+h^{p}\cdot 1\otimes a_{p,q}a_{i,k}+\\
& +a_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+a_{i,k}\otimes a_{p,q}+h^{i}\cdot a_{p,q}\otimes a_{i,k}+h^{i}\cdot 1\otimes a_{i,k}a_{p,q}\\
\overset{(2)}{=} \quad & a_{p,q}a_{i,k}\otimes 1+a_{p,q}\otimes a_{i,k}+\omega^{kp}a_{i,k}\otimes a_{p,q}+\varepsilon(h^{p})1\otimes a_{p,q}a_{i,k}+\\
& +a_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+a_{i,k}\otimes a_{p,q}+\omega^{iq}a_{p,q}\otimes a_{i,k}+\varepsilon(h^{i})1\otimes a_{i,k}a_{p,q}\\
\overset{(3)}{=} \quad & a_{p,q}a_{i,k}\otimes 1+a_{p,q}\otimes a_{i,k}-a_{i,k}\otimes a_{p,q}+1\otimes a_{p,q}a_{i,k}+\\
& +a_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+a_{i,k}\otimes a_{p,q}-a_{p,q}\otimes a_{i,k}+1\otimes a_{i,k}a_{p,q}\\
= \quad & a_{p,q}a_{i,k}\otimes 1+1\otimes a_{p,q}a_{i,k}+a_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+1\otimes a_{i,k}a_{p,q}\\
= \quad & (a_{p,q}a_{i,k}+a_{i,k}a_{p,q})\otimes 1+1\otimes(a_{p,q}a_{i,k}+a_{i,k}a_{p,q})\\
\in \quad & J_{V}\underline{\otimes}T(M_{i,k})+T(M_{i,k})\underline{\otimes}J_{V}.
\end{aligned}
$$

Na igualdade (1), utilizamos a definição de $\widetilde{m}$ e o fato de que $T(M_I)$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-comódulo álgebra ($\delta(1)=1\otimes 1$). A igualdade (2) segue, pois $T(M_I)$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo álgebra e então $h^i\cdot 1=\varepsilon(h^i)1$. Na igualdade (3), usamos que $\varepsilon(h^i)=1=\varepsilon(h^p)$ e o fato de que $\omega^{pk}=-1=\omega^{iq}$. Esta última igualdade é uma consequência dos pares $(i,k),(p,q)\in I$ ([12], Section 2B1).

Usando as mesmas ferramentas citadas acima, temos que,

$$
\begin{aligned}
\Delta(a_{p,q}\otimes b_{i,k}+b_{i,k}\otimes a_{p,q}) &= \Delta(a_{p,q}b_{i,k}+b_{i,k}a_{p,q})\\
&= \widetilde{m}(\Delta(a_{p,q})\otimes\Delta(b_{i,k}))+\widetilde{m}(\Delta(b_{i,k})\otimes\Delta(a_{p,q}))\\
&= \widetilde{m}((a_{p,q}\otimes 1+1\otimes a_{p,q})\otimes(b_{i,k}\otimes 1+1\otimes b_{i,k}))\\
&\quad +\widetilde{m}((b_{i,k}\otimes 1+1\otimes b_{i,k})\otimes(a_{p,q}\otimes 1+1\otimes a_{p,q}))\\
&= a_{p,q}b_{i,k}\otimes 1+a_{p,q}\otimes b_{i,k}+h^{p}\cdot b_{i,k}\otimes a_{p,q}+h^{p}\cdot 1\otimes a_{p,q}b_{i,k}+\\
&\quad +b_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+b_{i,k}\otimes a_{p,q}+h^{-i}\cdot a_{p,q}\otimes b_{i,k}+h^{-i}\cdot 1\otimes b_{i,k}a_{p,q}\\
&= a_{p,qk}b_{i,k}\otimes 1+a_{p,q}\otimes b_{i,k}+\omega^{-pk}b_{i,k}\otimes a_{p,q}+\varepsilon(h^{p})1\otimes a_{p,q}b_{i,k}+\\
&\quad +b_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+b_{i,k}\otimes a_{p,q}+\omega^{-iq}a_{p,q}\otimes b_{i,k}+\varepsilon(h^{-i})1\otimes b_{i,k}a_{p,q}\\
&= a_{p,q}b_{i,k}\otimes 1+a_{p,q}\otimes b_{i,k}-b_{i,k}\otimes a_{p,q}+1\otimes a_{p,q}b_{i,k}+\\
&\quad +b_{i,k}a_{p,q}\otimes 1+b_{i,k}\otimes a_{p,q}-a_{p,q}\otimes b_{i,k}+1\otimes b_{i,k}a_{p,q}\\
&= (a_{p,q}b_{i,k}+b_{i,k}a_{p,q})\otimes 1+1\otimes(a_{p,q}b_{i,k}+b_{i,k}a_{p,q})\\
&\in J_V\underline{\otimes}T(M_I)+T(M_I)\underline{\otimes}J_V.
\end{aligned}
$$

Diante do exposto, concluímos que $\Delta(V)\subseteq J_V\underline{\otimes}T(M_I)+T(M_I)\underline{\otimes}J_V$.

Seja z um elemento qualquer do ideal J_V então $z=\sum_{j=1}^{t}s_jx_jr_j$, em que $s_j,r_j\in T(M_I)$ e $x_j\in V$, para cada $1\leq j\leq t$. Deste modo,

$$
\begin{aligned}
\Delta(z) &\in (T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I))(J_V\underline{\otimes}T(M_I)+\\
&\quad +T(M_I)\underline{\otimes}J_V)(T(M_I)\underline{\otimes}T(M_I))\\
&\subseteq J_V\underline{\otimes}T(M_I)+T(M_I)\underline{\otimes}J_V,
\end{aligned}
$$

implicando que J_V é um coideal de $T(M_I)$.

Mostremos agora que J_V é um ideal graduado. Claramente V é um subespaço graduado, pois $V\subseteq T^2(M_I)$ e isto implica em $V=\oplus_{n\geq 0}T^n(M_I)\cap V$. Como $J_V=<V>$, segue, pelo Lema 1.1.14, que J_V é um ideal graduado.

Assim, J_V é um ideal graduado, um coideal e $J_V\cap M_I=0$. Consequentemente, $J_V\in\mathcal{Q}$ (ver Observação 1.4.7). Pelo Teorema 1.4.8, sabemos que $\mathcal{B}(M_I)=\frac{T(M_I)}{\widetilde{I}(M_I)}$, em que $\widetilde{I}(M_I)=\sum_{J'\in\mathcal{Q}}J'$. Além disso,

$$a_{p,q}\otimes a_{i,k}+a_{i,k}\otimes a_{p,q}\text{ e }a_{p,q}\otimes b_{i,k}+b_{i,k}\otimes a_{p,q}\in J_V\subseteq\widetilde{I}(M_I).$$

Portanto, em $\mathcal{B}(M_I)$

$$\overline{a_{p,q}\otimes a_{i,k}+a_{i,k}\otimes a_{p,q}}=0=\overline{a_{p,q}\otimes b_{i,k}+b_{i,k}\otimes a_{p,q}}.$$

■

Proposição 2.1.7 *O conjunto* $\{1, \overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}, \overline{a_{i,k}b_{i,k}}\}$ *é uma base do* $\Bbbk$-*espaço vetorial* $\mathcal{B}(M_{i,k})$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.1.3, $\mathcal{B}(M_{i,k})$ é gerada como álgebra pelo conjunto $\{\overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}\}$. Pela proposição anterior, temos que $\overline{a_{i,k}}^2 = 0 = \overline{b_{i,k}}^2$ e $\overline{a_{i,k}}\overline{b_{i,k}} = -\overline{b_{i,k}}\overline{a_{i,k}}$. Logo, $\{1, \overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}, \overline{a_{i,k}b_{i,k}}\}$ gera $\mathcal{B}(M_{i,k})$ como $\Bbbk$-espaço vetorial. Como $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_{i,k}) = 4$, segue que $\{1, \overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}, \overline{a_{i,k}b_{i,k}}\}$ é uma base. ■

2.2 Os objetos M_L e $\mathcal{B}(M_L)$

Esta seção é análoga à anterior e por este motivo omitimos alguns detalhes no seu desenvolvimento. Consideramos a classe de conjugação $\mathcal{O}_{h^n} = \{h^n\}$. Observamos que h^n é um elemento central em $\mathbb{D}_m$ e assim, $C_{\mathbb{D}_m}(h^n) = \mathbb{D}_m$. Como m é par, da Subseção 1.2.1, temos que $\{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}$ é um conjunto completo de representações irredutíveis e não equivalentes de $\mathbb{D}_m$.

Nesse caso, para cada $1 \leq l \leq n-1$, temos que $M_l := M(\mathcal{O}_{h^n}, \rho_l)$ é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ que é simples. O mesmo raciocínio para $M(\mathcal{O}_{h^n}, \chi_k)$, em que $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

A seguir, utilizamos a segunda caracterização dos módulos de Yetter-Drinfeld simples, apresentada no Exemplo 1.4.5, para obtermos uma base para M_l, em que $1 \leq l \leq n-1$, e mostramos como a ação e a coação agem nestes elementos.

Notemos que

$$\mathcal{O}_{h^n} = \{h^n\}, C_{\mathbb{D}_m}(h^n) = \mathbb{D}_m \text{ e } 1h^n1^{-1} = h^n.$$

Logo, pelo Exemplo 1.4.5, $g_1 = 1$ e $M_l = 1 \otimes \Bbbk^2$, em que $(\rho_l, \Bbbk^2)$ é uma representação de $\Bbbk\mathbb{D}_m$.

Seja $\beta = \{v_1, v_2\}$ uma base de $\Bbbk^2$, como na Subseção 1.2.1. Então $\{c_l = 1 \otimes v_1, d_l = 1 \otimes v_2\}$ é uma base para M_l como $\Bbbk$-espaço vetorial. Deste modo, a estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ de M_l está totalmente definida pelas relações a seguir (Exemplo 1.4.5).

$$\begin{aligned} g \cdot c_l &= g \cdot (1 \otimes v_1) = 1 \otimes g \cdot v_1 \\ &= 1 \otimes \rho_l(g)(v_1) = 1 \otimes v_2 = d_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \cdot d_l &= g \cdot (1 \otimes v_2) = 1 \otimes g \cdot v_2 \\ &= 1 \otimes \rho_l(g)(v_2) = 1 \otimes v_1 = c_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h \cdot c_l &= h \cdot (1 \otimes v_1) = 1 \otimes h \cdot v_1 \\ &= 1 \otimes \rho_l(h)(v_1) = 1 \otimes \omega^l v_1 = \omega^l c_l, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h \cdot d_l &= h \cdot (1 \otimes v_2) = 1 \otimes h \cdot v_2 \\
&= 1 \otimes \rho_l(h)(v_2) = 1 \otimes \omega^{-l} v_2 = \omega^{-l} d_l,
\end{aligned}
$$

$$
\delta(c_l) = \delta(1 \otimes v_1) = h^n \otimes (1 \otimes v_1) = h^n \otimes c_l,
$$

$$
\delta(d_l) = \delta(1 \otimes v_2) = h^n(1 \otimes v_2) = h^n \otimes d_l.
$$

Observação 2.2.1 Observamos que M_l e M_{ρ_l} são $\Bbbk$-espaços vetoriais isomorfos, ambos possuem dimensão 2, em que $1 \leq l \leq n-1$. Além disso, afirmamos que são isomorfos como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos.

De fato, tendo em mente a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ de M_{ρ_l} como na Subseção 1.2.1, consideramos o $\Bbbk$-isomorfismo $f : M_{\rho_l} \to M_l$, tal que $f(v_1) = c_l$ e $f(v_2) = d_l$. Usando as igualdades (1.1) e (1.2) e as relações calculadas anteriormente, segue que

$$
\begin{aligned}
f(g \cdot v_1) &= f(v_2) = d_l \\
&= g \cdot c_l = g \cdot f(v_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(g \cdot v_2) &= f(v_1) = c_l \\
&= g \cdot d_l = g \cdot f(v_2),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(h \cdot v_1) &= f(\omega^l v_1) = \omega^l f(v_1) \\
&= \omega^l c_l = h \cdot c_l \\
&= h \cdot f(v_1)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
f(h \cdot v_2) &= f(\omega^{-l} v_2) = \omega^{-l} f(v_2) \\
&= \omega^{-l} d_l = h \cdot d_l \\
&= h \cdot f(v_2).
\end{aligned}
$$

Logo, M_l e M_{ρ_l} são $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos isomorfos.

Além disso, pela Observação 2.1.1, segue que $M_l \simeq M_{i,l}$ como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos mas não como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-comódulos pois, pelo Exemplo 1.4.5, M_l e $M_{i,l}$ são módulos de Yetter-Drinfeld simples e não isomorfos. Isso finaliza a observação.

Na sequência, abordamos a álgebra de Nichols dos objetos simples desta seção. Para cada l ímpar e $1 \leq l \leq n-1$, temos que M_l é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ que é simples e cuja álgebra de Nichols possui dimensão finita. Mais precisamente, $\mathcal{B}(M_l) \simeq \wedge M_l$ e $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_l) = 4$ ([2], Theorem 3.1 (b) (i)).

Para cada l par e $1 \leq l \leq n-1$, temos que M_l é um módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ que é simples e cuja álgebra de Nichols possui dimensão infinita ([2], Theorem 3.1 (b) (i)). A prova baseia-se no fato de que $\rho_l(h^n) \neq -id$. Vale o mesmo raciocínio para os módulos de Yetter-Drinfeld parametrizados pelos pares $(\mathcal{O}_{h^n}, \chi_k)$, em que $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Definição 2.2.2 ([12], Definition 2.9) Seja

$$\mathcal{L} = \left\{ L = \bigcup_{s=1}^{r} \{l_s\} : 1 \leq l_1, \cdots, l_r < n \text{ números ímpares} \right\}$$

e, para cada $L = \{l_1, \cdots, l_r\} \in \mathcal{L}$, definimos $M_L = \oplus_{l \in L} M_l$.

Por ([12], Proposition 2.8), o módulo de Yetter-Drinfeld M_L, definido acima, é tal que $\mathcal{B}(M_L) = \wedge M_L$ e $\dim_{\Bbbk} \mathcal{B}(M_L) = 4^r$.

Nos próximos resultados caracterizaremos a álgebra de Nichols $\mathcal{B}(M_L)$ em termos de seus geradores e relações.

Teorema 2.2.3 *A álgebra de Nichols $\mathcal{B}(M_L)$ é gerada, como álgebra, por $\{\overline{c_l}, \overline{d_l}, l \in L\}$. Sua estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ está totalmente definida pelas relações a seguir, em que $l \in L$.*

$$g \cdot \overline{c_l} = \overline{d_l}, \quad h \cdot \overline{c_l} = \omega^l \overline{c_l}, \quad \delta(\overline{c_l}) = h^n \otimes \overline{c_l},$$

$$g \cdot \overline{d_l} = \overline{c_l}, \quad h \cdot \overline{d_l} = \omega^{-l} \overline{d_l}, \quad \delta(\overline{d_l}) = h^n \otimes \overline{d_l}.$$

Demonstração: Sabemos, pelo Teorema 1.4.8, que

$$\mathcal{B}(M_L) = \frac{T(M_L)}{\widetilde{I}(M_L)} = \oplus_{k \geq 0} \frac{T^k(M_L)}{\widetilde{I}(M_L)}$$

e $\mathcal{B}(M_L)$ é gerada, como álgebra, por $\mathcal{B}(M_L)(1) = \frac{M_L}{\widetilde{I}(M_L)}$. Logo, $\mathcal{B}(M_L)$ é gerada, como álgebra, por $\{\overline{c_l}, \overline{d_l}, l \in L\}$.

Lembramos que $\mathcal{B}(M_L)$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo álgebra e um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-comódulo álgebra. Assim, sua estrutura de módulo de Yetter-Drinfeld está totalmente definida pelas relações a seguir, em que $l \in L$.

$$g \cdot \overline{c_l} = \overline{d_l}, \quad h \cdot \overline{c_l} = \omega^l \overline{c_l}, \quad \delta(\overline{c_l}) = h^n \otimes \overline{c_l},$$

$$g \cdot \overline{d_l} = \overline{c_l}, \quad h \cdot \overline{d_l} = \omega^{-l} \overline{d_l}, \quad \delta(\overline{d_l}) = h^n \otimes \overline{d_l}.$$

■

Analogamente ao que fizemos na Observação 2.1.5, obtemos que $\overline{c_l}, \overline{d_l}$ com $l \in L$, são elementos primitivos em $\mathcal{B}(M_L)$. A proposição a seguir é utilizada na Seção 2.3, onde caracterizaremos a álgebra $\mathcal{B}(M_L) \# \Bbbk\mathbb{D}_m$ por meio de seus geradores.

Proposição 2.2.4 *Sejam $L \in \mathcal{L}$ e $V \subseteq T(M_L)$ o subespaço gerado pelos elementos $c_l \otimes c_r + c_r \otimes c_l, d_l \otimes d_r + d_r \otimes d_l$ e $c_l \otimes d_r + d_r \otimes c_l$, com $l, r \in L$. Se $J =< V >\subseteq T(M_L)$ é o ideal gerado por V então J é um ideal graduado, um coideal e $J \cap M_L = 0$. Além disso, em $\mathcal{B}(M_L)$*

$$\overline{c_l \otimes c_r + c_r \otimes c_l} = \overline{d_l \otimes d_r + d_r \otimes d_l} = \overline{c_l \otimes d_r + d_r \otimes c_l} = 0.$$

Demonstração: Afirmamos que J é um coideal. De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
\Delta(c_l \otimes d_r + d_r \otimes c_l) &= \Delta(c_l d_r + d_r c_l) \\
&= \widetilde{m}(\Delta(c_l) \otimes \Delta(d_r)) + \widetilde{m}(\Delta(d_r) \otimes \Delta(c_l)) \\
&= \widetilde{m}((c_l \otimes 1 + 1 \otimes c_l) \otimes (d_r \otimes 1 + 1 \otimes d_r)) \\
&+ \widetilde{m}((d_r \otimes 1 + 1 \otimes d_r) \otimes (c_l \otimes 1 + 1 \otimes c_l)) \\
&= c_l d_r \otimes 1 + c_l \otimes d_r - d_r \otimes c_l + h^n \cdot 1 \otimes c_l d_r \\
&+ d_r c_l \otimes 1 + d_r \otimes c_l - c_l \otimes d_r + h^n \cdot 1 \otimes d_r c_l \\
&= (c_l d_r - d_r c_l) \otimes 1 + h^n \cdot 1 \otimes (c_l d_r + d_r c_l) \\
&\in J \underline{\otimes} T(M_L) + T(M_L) \underline{\otimes} J.
\end{aligned}$$

De forma análoga mostramos que

$$\Delta(c_l \otimes c_r + c_r \otimes c_l) \text{ e } \Delta(d_l \otimes d_r + d_r \otimes d_l) \in J \underline{\otimes} T(M_L) + T(M_L) \underline{\otimes} J,$$

de onde concluímos que $V \subseteq J \underline{\otimes} T(M_L) + T(M_L) \underline{\otimes} J$. Também, de modo inteiramente análogo ao que fizemos na Proposição 2.1.6, provamos que J é um coideal.

Mostremos agora que J é um ideal graduado. Claramente, V é um subespaço graduado, pois $V = \oplus_{n \geq 0} T^n(M_L) \cap V$. Deste modo, pela Proposição 1.1.14, segue que $J =< V >$ é um ideal graduado.

Assim, J é um ideal graduado, um coideal e $J \cap M_L = 0$. Consequentemente, $J \in \mathcal{Q}$. Logo, como

$$\mathcal{B}(M_L) = \frac{T(M_L)}{\widetilde{I}(M_L)} \text{ e } \widetilde{I}(M_L) = \sum_{J' \in \mathcal{Q}} J',$$

concluímos a seguinte igualdade em $\mathcal{B}(M_L)$

$$\overline{c_l \otimes c_r + c_r \otimes c_l} = \overline{d_l \otimes d_r + d_r \otimes d_l} = \overline{c_l \otimes d_r + d_r \otimes c_l} = 0.$$

■

Proposição 2.2.5 *O conjunto* $\{1, \overline{c_l}, \overline{d_l}, \overline{c_l d_l}\}$ *é uma base do* $\Bbbk$*-espaço vetorial* $\mathcal{B}(M_l)$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2.3, $\mathcal{B}(M_l)$ é gerada como álgebra pelo conjunto $\{\overline{c_l}, \overline{d_l}\}$. Pela proposição anterior, $\overline{c_l}^2 = 0 = \overline{d_l}^2$ e $\overline{c_l}\,\overline{d_l} = -\overline{d_l}\,\overline{c_l}$. Logo, $\{1, \overline{c_l}, \overline{d_l}, \overline{c_l d_l}\}$ é um conjunto gerador $\mathcal{B}(M_l)$. Como $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_l) = 4$, segue que $\{1, \overline{c_l}, \overline{d_l}, \overline{c_l d_l}\}$ é uma base para o $\Bbbk$-espaço vetorial $\mathcal{B}(M_l)$. ∎

2.3 As álgebras $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$

Nesta seção, descrevemos por meio de seus geradores e relações as álgebras de Hopf $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, em que $I \in \mathcal{J}$ e $L \in \mathcal{L}$, respectivamente. Iniciamos caracterizando a álgebra $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Ressaltamos que as seções anteriores são pré-requisitos.

Teorema 2.3.1 *Sejam* $I \in \mathcal{J}$ *e* $\{\overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}\}_{(i,k)\in I}$ *o conjunto dos elementos primitivos que geram* $\mathcal{B}(M_I)$ *como álgebra. Então* $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ *é a álgebra gerada pelo conjunto* $\{1\#g, 1\#h, \overline{a_{i,k}}\#1, \overline{b_{i,k}}\#1\}_{(i,k)\in I}$ *e satisfaz as relações a seguir, para quaisquer* (i,k) *e* $(p,q) \in I$.

$$(1\#g)^2 = 1 = (1\#h)^m,$$

$$(1\#g)(1\#h)(1\#g) = (1\#h)^{m-1},$$

$$(1\#g)(\overline{a_{i,k}}\#1) = (\overline{b_{i,k}}\#1)(1\#g),$$

$$(1\#h)(\overline{a_{i,k}}\#1) = \omega^k(\overline{a_{i,k}}\#1)(1\#h),$$

$$(1\#h)(\overline{b_{i,k}}\#1) = \omega^{-k}(\overline{b_{i,k}}\#1)(1\#h),$$

$$(\overline{a_{p,q}}\#1)(\overline{a_{i,k}}\#1) + (\overline{a_{i,k}}\#1)(\overline{a_{p,q}}\#1) = 0,$$

$$(\overline{a_{p,q}}\#1)(\overline{b_{i,k}}\#1) + (\overline{b_{i,k}}\#1)(\overline{a_{p,q}}\#1) = 0.$$

Demonstração: Mostremos a primeira e a terceira relações do enunciado. A segunda, a quarta e a quinta seguem de forma análoga.

Observamos que

$$\begin{aligned}(1\#g)^2 &= (1\#g)(1\#g) = 1(g \cdot 1)\#g^2\\ &\overset{(\star)}{=} \varepsilon(g)1\#g^2 = 1\#1 = (1\#h)^m\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(1\#g)(\overline{a_{i,k}}\#1) &= 1(g \cdot \overline{a_{i,k}})\#g1\\ &= \overline{b_{i,k}}\#g = (\overline{b_{i,k}}\#1)(1\#g).\end{aligned}$$

A igualdade $(\star)$ é válida, pois $\mathcal{B}(M_I)$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo álgebra.

Pela Proposição 2.1.6,

$$\overline{a_{p,q} \otimes a_{i,k} + a_{i,k} \otimes a_{p,q}} = 0 \text{ e } \overline{a_{p,q} \otimes b_{i,k} + b_{i,k} \otimes a_{p,q}} = 0$$

em $\mathcal{B}(M_I)$. Logo,

$$\begin{aligned}(\overline{a_{p,q}}\#1)(\overline{a_{i,k}}\#1) + (\overline{a_{i,k}}\#1)(\overline{a_{p,q}}\#1) &= (\overline{a_{p,q}}\ \overline{a_{i,k}} + \overline{a_{i,k}}\ \overline{a_{p,q}})\#1 \\ &= \overline{a_{p,q} \otimes a_{i,k} + a_{i,k} \otimes a_{p,q}}\#1 \\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\overline{a_{p,q}}\#1)(\overline{b_{i,k}}\#1) + (\overline{b_{i,k}}\#1)(\overline{a_{p,q}}\#1) &= (\overline{a_{p,q}}\ \overline{b_{i,k}} + \overline{b_{i,k}}\ \overline{a_{p,q}})\#1 \\ &= (\overline{a_{p,q} \otimes b_{i,k} + b_{i,k} \otimes a_{p,q}})\#1 \\ &= 0,\end{aligned}$$

provando as duas últimas relações.

Finalmente, provemos que $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é gerada como álgebra pelo conjunto $\{\overline{a_{i,k}}\#1, \overline{b_{i,k}}\#1, 1\#g, 1\#h\}_{(i,k)\in I}$. Um elemento qualquer de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é uma soma de parcelas da forma

$$\sum_{i=1}^{t} a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\# \sum_{g^a h^b \in \mathbb{D}_m} k_{g^a h^b} g^a h^b,$$

em que $a \in \{0,1\}$, $b \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ e $a_{ji} \in \{\overline{a_{i,k}}, \overline{b_{i,k}}\}_{(i,k)\in I}$, para quaisquer $1 \leq j \leq r$ e $1 \leq i \leq t$. Então, usando a definição de produto smash e o fato de que $\mathcal{B}(M_I)$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo álgebra, temos

$$\sum_{i=1}^{t} a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\# \sum_{g^a h^b \in \mathbb{D}_m} k_{g^a h^b} g^a h^b =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{g^a h^b \in \mathbb{D}_m} k_{g^a h^b} a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\# g^a h^b =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{g^a h^b \in \mathbb{D}_m} k_{g^a h^b} (a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\#1)(1\# g^a h^b) =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{g^a h^b \in \mathbb{D}_m} k_{g^a h^b} (a_{1i}\#1)(a_{2i}\#1)\cdots$$

$$\cdots(a_{ri}\#1)\underbrace{(1\#g)\cdots(1\#g)}_{a \text{ vezes}}\underbrace{(1\#h)\cdots(1\#h)}_{b \text{ vezes}}.$$

■

Observação 2.3.2 *Se $I = \{(i,k)\}$ então o conjunto*

$$\{1\#b, \overline{a_{i,k}}\#b, \overline{b_{i,k}}\#b, \overline{a_{i,k}b_{i,k}}\#b, b \in \mathbb{D}_m\}$$

é uma base para o $\Bbbk$-espaço vetorial $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

De forma inteiramente similar ao teorema anterior provamos o próximo.

Teorema 2.3.3 *Sejam $\overline{c_l}, \overline{d_l}, l \in L$ os elementos primitivos que geram $\mathcal{B}(M_L)$. Então $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é a álgebra gerada por $1\#g, 1\#h, \overline{c_l}\#1$ e $\overline{d_l}\#1$, em que $l \in L$ e satisfaz as relações a seguir, para quaisquer $r, l \in L$.*

$$(1\#g)^2 = 1\#1 = 1\#h^m,$$
$$(1\#g)(1\#h) = (1\#h)^{m-1}(1\#g),$$
$$(\overline{c_l}\#1)(1\#g) = (1\#g)(\overline{d_l}\#1),$$
$$(1\#h)(\overline{d_l}\#1) = \omega^{-l}(\overline{d_l}\#1)(1\#h),$$
$$(1\#h)(\overline{c_l}\#1) = \omega^{l}(\overline{c_l}\#1)(1\#h),$$
$$(\overline{c_l}\#1)(\overline{d_r}\#1) + (\overline{d_r}\#1)(\overline{c_l}\#1) = 0,$$
$$(\overline{c_l}\#1)(\overline{c_r}\#1) + (\overline{c_r}\#1)(\overline{c_l}\#1) = 0,$$
$$(\overline{d_l}\#1)(\overline{d_r}\#1) + (\overline{d_r}\#1)(\overline{d_l}\#1) = 0.$$

Demonstração: Vejamos que $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é gerada como álgebra por $\{\overline{c_l}\#1, \overline{d_l}\#1, 1\#g, 1\#h, l \in L\}$. De fato, um elemento qualquer de $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é uma soma de parcelas da forma

$$\textstyle\sum_{i=1}^{t} a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\# \sum_{g^ah^b\in\mathbb{D}_m} k_{g^ah^b}g^ah^b,$$

em que $a \in \{0,1\}$, $b \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ e $a_{ji} \in \{\overline{c_l}, \overline{d_l}, l \in L\}$, para quaisquer $1 \leq j \leq r$ e $1 \leq i \leq t$. Então,

$$\sum_{i=1}^{t} a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\# \sum_{g^ah^b\in\mathbb{D}_m} k_{g^ah^b}g^ah^b =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{g^ah^b\in\mathbb{D}_m} k_{g^ah^b}a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\#g^ah^b =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{g^ah^b\in\mathbb{D}_m} k_{g^ah^b}(a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ri}\#1)(1\#g^ah^b) =$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\sum_{g^ah^b\in\mathbb{D}_m}k_{g^ah^b}(a_{1i}\#1)(a_{2i}\#1)\cdots$$

$$\cdots(a_{ri}\#1)\underbrace{(1\#g)\cdots(1\#g)}_{a\text{ vezes}}\underbrace{(1\#h)\cdots(1\#h)}_{b\text{ vezes}}.$$

de onde concluímos que $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é gerada como álgebra pelo conjunto $\{\overline{c_l}\#1, \overline{d_l}\#1, 1\#g, 1\#h, l \in L\}$.

As seis primeiras relações seguem apenas fazendo contas, como no teorema anterior. Mostremos a seguir as outras três relações. Pela Proposição 2.2.4, obtemos que

$$\begin{aligned}(\overline{c_l}\#1)(\overline{d_r}\#1)+(\overline{d_r}\#1)(\overline{c_l}\#1) &= \overline{(c_l\otimes d_r+d_r\otimes c_l)}\#1\\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\overline{c_l}\#1)(\overline{c_r}\#1)+(\overline{c_r}\#1)(\overline{c_l}\#1) &= \overline{(c_l\otimes c_r+c_r\otimes c_l)}\#1\\ &= 0\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\overline{d_l}\#1)(\overline{d_r}\#1)+(\overline{d_r}\#1)(\overline{d_l}\#1) &= \overline{(d_l\otimes d_r+d_r\otimes d_l)}\#1\\ &= 0.\end{aligned}$$

■

Observação 2.3.4 *O conjunto* $\{1\#b, \overline{c_l}\#b, \overline{d_l}\#b, \overline{c_l}\,\overline{d_l}\#b, b \in \mathbb{D}_m\}$ *é uma base para o* $\Bbbk$*-espaço vetorial* $\mathcal{B}(M_l)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

2.4 As álgebras $A_I(\lambda,\gamma)$

Nesta seção, estudamos dois casos particulares da álgebra $A_I(\lambda,\gamma)$, a saber $A_I(\lambda,0)$ com $I=\{(i,n)\}$ e $A_I(0,0)$ com $I\in\mathcal{J}$.

Iniciamos definindo a álgebra $A_I(\lambda,\gamma)$ no caso geral e na sequência nos concentramos nos casos particulares. Para o desenvolvimento desta seção consideramos ([12], Sections 3B, 3C). Sejam $I\in\mathcal{J}$,

$$\lambda=(\lambda_{p,q,i,k})_{(p,q),(i,k)\in I}\ \text{ e }\ \gamma=(\gamma_{p,q,i,k})_{(p,q),(i,k)\in I}$$

famílias de elementos do corpo $\Bbbk$ tais que

$$\lambda_{p,m-k,i,k}=\lambda_{i,k,p,m-k}\ \text{ e }\ \gamma_{p,k,i,k}=\gamma_{i,k,p,k}.$$

Definição 2.4.1 ([12], Definition 3.9) *Para $I \in \mathcal{J}$, denotamos por $A_I(\lambda,\gamma)$ a álgebra gerada pelos elementos $g, h, x_{p,q}, y_{p,q}$, em que $(p,q) \in I$, satisfazendo as seguintes relações:*

$$g^2 = 1 = h^m,\ ghg = h^{m-1},$$

$$gx_{p,q} = y_{p,q}g,\ hx_{p,q} = \omega^q x_{p,q}h,\ hy_{p,q} = \omega^{-q} y_{p,q}h,$$

$$x_{p,q}x_{i,k} + x_{i,k}x_{p,q} = \delta_{q,m-k}\lambda_{p,q,i,k}(1 - h^{p+i}),$$

$$x_{p,q}y_{i,k} + y_{i,k}x_{p,q} = \delta_{q,k}\gamma_{p,q,i,k}(1 - h^{p-i}).$$

É possível determinar uma estrutura de álgebra de Hopf em $A_I(\lambda,\gamma)$ definindo

$$\Delta(g) = g \otimes g, \Delta(h) = h \otimes h,$$

$$\Delta(x_{p,q}) = x_{p,q} \otimes 1 + h^p \otimes x_{p,q}$$

e

$$\Delta(y_{p,q}) = y_{p,q} \otimes 1 + h^{-p} \otimes y_{p,q}$$

para qualquer $(p,q) \in I$. Definimos ainda, para qualquer $(p,q) \in I$, $\varepsilon(g) = 1 = \varepsilon(h)$ e $\varepsilon(x_{p,q}) = 0 = \varepsilon(y_{p,q})$,

Notemos que $A_I(\lambda,\gamma)$ é gerada por seus elementos grouplikes e skew-primitivos. Portanto, por ([26], Corollary 5.1.14), é pontuada.

Observação 2.4.2 Se $|I| = 1$ então é suposto $\gamma = 0$ na definição anterior.

2.4.1 $A_I(0,0)$

Nesta subseção, restringimos a Definição 2.4.1 para $\lambda \equiv 0 \equiv \gamma$.

Definição 2.4.3 *Seja $I \in \mathcal{J}$. Então $A_I(0,0)$ é a álgebra gerada pelos elementos $g, h, x_{p,q}, y_{p,q}$, com $(p,q) \in I$, satisfazendo as seguintes relações:*

$$g^2 = 1 = h^m,\ ghg = h^{m-1},$$

$$gx_{p,q} = y_{p,q}g,\ hx_{p,q} = \omega^q x_{p,q}h,\ hy_{p,q} = \omega^{-q} y_{p,q}h,$$

$$x_{p,q}x_{i,k} + x_{i,k}x_{p,q} = 0,\ x_{p,q}y_{i,k} + y_{i,k}x_{p,q} = 0.$$

Usando [12, Lemma 3.16], $A_I(\lambda,\gamma) \simeq \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ se, e somente se, $\lambda \equiv 0 \equiv \gamma$. Assim, as álgebras $A_I(0,0)$ estão caracterizadas em termos das bosonizações $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ estudadas na seção anterior. A seguir especificamos um isomorfismo entre elas.

Proposição 2.4.4 *Seja $I \in \mathfrak{J}$. Consideramos o morfismo de álgebras $f : A_I(0,0) \to \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ tal que $f(g) = 1\#g$, $f(h) = 1\#h$, $f(x_{i,k}) = \overline{a_{i,k}}\#1$ e $f(y_{i,k}) = \overline{b_{i,k}}\#1$. Então f é um isomorfismo de álgebras de Hopf.*

Demonstração: Pelo Teorema 2.3.1 e pela Definição 2.4.3 é imediato que f preserva as relações que definem as duas álgebras e que é um isomorfismo.

Mostremos que f é um morfismo de coálgebras. Notemos que

$$\begin{aligned}
\Delta(f(x_{i,k})) &= \Delta(\overline{a_{i,k}}\#1)\\
&= \overline{a_{i,k}}\#1 \otimes 1\#1 + 1\#h^i \otimes \overline{a_{i,k}}\#1\\
&= (f \otimes f)(x_{i,k} \otimes 1 + h^i \otimes x_{i,k})\\
&= (f \otimes f)\Delta(x_{i,k})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta(f(g)) &= \Delta(1\#g) = 1\#g \otimes 1\#g\\
&= (f \otimes f)(g \otimes g) = (f \otimes f)\Delta(g).
\end{aligned}$$

De forma análoga, $\Delta(f(y_{i,k})) = (f \otimes f)\Delta(y_{i,k})$ e $\Delta(f(h)) = (f \otimes f)\Delta(h)$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\varepsilon(f(x_{i,k})) &= \varepsilon(\overline{a_{i,k}}\#1)\\
&= \varepsilon(\overline{a_{i,k}})\varepsilon(1)\\
&= 0 = \varepsilon(x_{i,k})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\varepsilon(f(g)) &= \varepsilon(1\#g)\\
&= \varepsilon(1)\varepsilon(g)\\
&= 1 = \varepsilon(g).
\end{aligned}$$

De forma análoga, $\varepsilon(f(y_{i,k})) = \varepsilon(y_{i,k})$ e $\varepsilon(f(h)) = \varepsilon(h)$. Agora, como f é morfismo de álgebras, segue que f é um morfismo de coálgebras. Portanto, f é um isomorfismo de álgebras de Hopf. ■

Observação 2.4.5 A proposição anterior é válida para qualquer $I \in \mathfrak{J}$, isto é, para $I = \{(i,k)\}$ como no item (a) do Teorema 2.0.1 e para $I = \{(i,n)\}$ ou $|I| > 1$ como no item (c) do referido teorema.

2.4.2 $A_{i,n}(\lambda)$

Nesta subseção estudamos a álgebra $A_I(\lambda,\gamma)$ para o caso particular em que $I = \{(i,n)\} \in \mathfrak{J}$, $n = \frac{m}{2}$, $m = 4t, t \geq 3$ e $1 \leq i \leq n-1$. Neste caso, é suposto que $\gamma = 0$ e assim, a álgebra $A_I(\lambda,\gamma)$ é denotada por $A_{i,n}(\lambda)$. A seguir, de acordo com ([12], Example 3.10), descrevemos-a.

Definição 2.4.6 *Para $I = \{(i,n)\}$, denotamos por $A_{i,n}(\lambda)$ a álgebra gerada por elementos g, h, x, y satisfazendo as relações a seguir.*

$$g^2 = 1 = h^m,\ ghg = h^{m-1},$$

$$gx = yg,\ hx = -xh,\ hy = -yh,$$
$$x^2 = \lambda(1 - h^{2i}),\ y^2 = \lambda(1 - h^{-2i}),\ xy + yx = 0.$$

Observação 2.4.7 A partir das relações acima, podemos deduzir outras que serão usadas no Capítulo 4.

(i) $xg = gy$. De fato, de $gx = yg$, segue que $gxg = y$, ou seja, $xg = gy$.

(ii) $gxy = yxg$, pois a relação $xy + yx = 0$ implica que $gxy + gyx = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} gxy &= -gyx = -xgx \\ &= -xyg = yxg. \end{aligned}$$

(iii) $hxy = xyh$. De fato, da relação $hx = -xh$, segue que $hxy = -xhy = xyh$.

(iv) $x^2y = yx^2$, pois como $xy + yx = 0$ então $x^2y + xyx = 0$. Assim, $x^2y = -xyx = yx^2$.

Observação 2.4.8 Como $\omega^m = 1$ e por ser $m = 2n$, temos que $1 = (\omega^n)^2$. Chamando $\omega' = \omega^n$, segue que $\omega'^2 = 1$ e como $\Bbbk$ é corpo, temos que $\omega' = 1$ ou -1, mas $\omega' \neq 1$, pois ω é raiz m-ésima primitiva da unidade. Logo, $\omega^n = -1$. Como $(i,n) \in J$, então $\omega^{ni} = -1$, para $1 \leq i \leq n-1$. Portanto, i é ímpar.

Além disso, n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n = -1$. Isso ocorre pois, se houvesse s um inteiro positivo, $s < n$, tal que $\omega^s = -1$, teríamos que $\omega^{2s} = 1$ e daí, $2s = mq$ para algum inteiro positivo q e isso é um absurdo, pois $2s < 2n = m$.

Deste modo, para cada i ímpar e $1 \leq i \leq n-1$ temos uma álgebra $A_{i,n}(\lambda)$. A seguir estudamos a dimensão de $A_{i,n}(\lambda)$ como $\Bbbk$-espaço vetorial. Estes resultados serão utilizados no Capítulo 4.

Lema 2.4.9 $\dim_{\Bbbk} A_{i,n}(\lambda) = 8m.$

Demonstração: Pelo Teorema 2.0.1, a álgebra de Hopf $A_{i,n}(\lambda)$ é um levantamento de $\mathcal{B}(M_I)$, ou seja, $gr(A_{i,n}(\lambda)) = \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Além disso, sempre é válido que, $\dim_{\Bbbk} A_{i,n}(\lambda) = \dim_{\Bbbk}(gr(A_{i,n}(\lambda))$ ([5], Section 5.1). Do início deste capítulo temos que $\dim_{\Bbbk}\mathcal{B}(M_I) = 4$. Logo, como $\dim_{\Bbbk}\Bbbk\mathbb{D}_m = 2m$, segue que

$$\dim_{\Bbbk} A_{i,n}(\lambda) = \dim_{\Bbbk}(\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m) = 8m.$$

$\blacksquare$

Lema 2.4.10 *O conjunto* $\beta = \{1,\ g,\ h,\ \cdots,\ h^{m-1},\ gh, \cdots, gh^{m-1}, x,$ $gx,\ hx,\ \cdots,\ h^{m-1}x,\ ghx,\ \cdots,\ gh^{m-1}x,\ y,\ gy,\ hy,\ \cdots,\ h^{m-1}y, ghy,$ $\cdots, gh^{m-1}y,\ xy,\ gxy,\ hxy, \cdots,\ h^{m-1}xy,\ ghxy,\ \cdots,\ gh^{m-1}xy\}$ *é uma base para* $A_{i,n}(\lambda)$*.*

Demonstração: Notemos que um elemento qualquer da álgebra $A_{i,n}(\lambda)$ é uma soma de parcelas da forma $g^a h^b x^c y^d$, em que $a, c, d \in \{0, 1\}$ e $b \in \{0, \cdots, m-1\}$. Assim, o conjunto descrito no enunciado é um conjunto gerador de $A_{i,n}(\lambda)$.

Pelo lema anterior, temos que $\dim_{\Bbbk} A_{i,n}(\lambda) = 8m$. A quantidade de elementos no conjunto β também é $8m$. Portanto, β é uma base de $A_{i,n}(\lambda)$ como $\Bbbk$-espaço vetorial. $\blacksquare$

Capítulo 3

Módulos simples sobre bosonizações e anéis de Grothendieck

Neste capítulo, calculamos os módulos simples sobre as álgebras de Hopf $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, em que $I \in \mathcal{J}$ e $L \in \mathcal{L}$, respectivamente. Além disso, mostramos que os anéis de Grothendieck $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}), \mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ e $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ são todos isomorfos.

Observamos que neste capítulo calculamos os módulos simples sobre as álgebras dos itens (a) e (b) do Teorema 2.0.1 e, devido a Proposição 2.4.4 e a Observação 2.4.5, também os módulos simples sobre a álgebra $A_I(0,0)$, para I como no item (c) do teorema citado.

3.1 $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples

Nesta seção, calculamos um conjunto completo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples, não isomorfos e de dimensão finita, para qualquer $I \in \mathcal{J}$. Pela Proposição 2.4.4, $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e $A_I(0,0)$ são álgebras de Hopf isomorfas. Considerando esse isomorfismo, para facilitar nossos cálculos, usamos um abuso de notação, dizendo que $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ é gerada pelos elementos g, h, $x_{p,q}$, $y_{p,q}$, com $(p,q) \in I$, satisfazendo as relações da Definição 2.4.3. Pela Proposição 1.1.6, segue que $\Bbbk\mathbb{D}_m$ é uma subálgebra de Hopf de $A_I(0,0) \simeq \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

Iniciamos mostrando que dada uma representação de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ sempre obtemos uma representação de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, estendendo-a por zero.

Proposição 3.1.1 *Seja $\rho : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \operatorname{End}_{\Bbbk}(M)$ uma representação de $\Bbbk\mathbb{D}_m$. Então o morfismo de álgebras $\overline{\rho} : \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m \to \operatorname{End}_{\Bbbk}(M)$, tal que*

$$\overline{\rho}(g) = \rho(g),\ \overline{\rho}(h) = \rho(h)$$

e

$$\overline{\rho}(x_{p,q}) = 0 = \overline{\rho}(y_{p,q}),$$

para todo $(p, q) \in I$, é uma representação de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

Demonstração: Notemos que

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(g^2) & = & \overline{\rho}(g)^2 = \rho(g^2) = \rho(1) \\ & = & \rho(h^m) = \overline{\rho}(h^m), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(ghg) & = & \overline{\rho}(g)\overline{\rho}(h)\overline{\rho}(g) = \rho(ghg) \\ & = & \rho(h^{m-1}) = \overline{\rho}(h^{m-1}), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(gx_{p,q}) & = & \overline{\rho}(g)\overline{\rho}(x_{p,q}) = 0 \\ & = & \overline{\rho}(y_{p,q})\overline{\rho}(g) = \overline{\rho}(y_{p,q}g), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(hx_{p,q}) & = & \overline{\rho}(h)\overline{\rho}(x_{p,q}) = 0 \\ & = & \omega^q\overline{\rho}(x_{p,q})\overline{\rho}(h) = \overline{\rho}(\omega^q x_{p,q}h), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(hy_{p,q}) & = & \overline{\rho}(h)\overline{\rho}(y_{p,q}) = 0 \\ & = & \omega^{-q}\overline{\rho}(y_{p,q})\overline{\rho}(h) = \overline{\rho}(\omega^{-q} y_{p,q}h), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(x_{p,q}x_{i,k} & + & x_{i,k}x_{p,q}) = \overline{\rho}(x_{p,q})\overline{\rho}(x_{i,k}) + \\ & + & \overline{\rho}(x_{i,k})\overline{\rho}(x_{p,q}) = 0, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \overline{\rho}(x_{p,q}y_{i,k} & + & y_{i,k}x_{p,q}) = \overline{\rho}(x_{p,q})\overline{\rho}(y_{i,k}) + \\ & + & \overline{\rho}(y_{i,k})\overline{\rho}(x_{p,q}) = 0, \end{array}$$

para quaisquer $(i, k), (p, q) \in I$. Logo, $\overline{\rho}$ preserva as relações que definem $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, ou seja, é uma representação desta álgebra. ■

Denotamos por $M_{\overline{\rho}}$ o $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo asociado a representação $\overline{\rho}$, como feito na Subseção 1.2.2. Mostremos, a seguir, a correspondência biunívoca que existe entre os módulos simples de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e os módulos simples de $\Bbbk\mathbb{D}_m$. Consideramos o conjunto completo

$$\mathcal{S} = \{M_{\chi_1}, M_{\chi_2}, M_{\chi_3}, M_{\chi_4}, M_{\rho_l}, 1 \leq l \leq n-1\}$$

dos módulos simples e não isomorfos de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ (Exemplo 1.2.22). A demonstração deste teorema foi baseada em ([14], Proposition 4.1).

Teorema 3.1.2 *$\mathcal{T} := \{M_{\overline{\chi_1}}, M_{\overline{\chi_2}}, M_{\overline{\chi_3}}, M_{\overline{\chi_4}}, M_{\overline{\rho_l}}, 1 \leq l \leq n-1\}$ é um conjunto completo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples e não isomorfos.*

Demonstração: Pela proposição anterior, cada uma das representações irredutíveis de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ pode se estender a uma representação de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Pelo Lema 1.2.21 estas representações são irredutíveis e não equivalentes duas a duas. Assim, pelas Proposições 1.2.14 e 1.2.15, $\mathcal{T}$ é um conjunto de módulos simples e não isomorfos da álgebra $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

Pela Proposição 1.2.29, as álgebras

$$\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m \text{ e } \frac{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}{rad(\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m)}$$

possuem os mesmos módulos simples e, pelo Lema 1.4.18, segue que $\dfrac{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}{rad(\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m)}$ e $\Bbbk\mathbb{D}_m$ são isomorfas, pois $\mathcal{B}(M_I) = \wedge(M_I)$. Logo, $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e $\Bbbk\mathbb{D}_m$ possuem os mesmos módulos simples.

Portanto, $\mathcal{T}$ é um conjunto completo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples e não isomorfos. ■

Observação 3.1.3 Na prova do teorema anterior, precisamos da álgebra $\mathcal{B}(M_I)$ apenas para fazermos uso da Proposição 3.1.1, isto é, para conseguirmos estender as representações por zero.

A proposição a seguir é utilizada na próxima seção. Como envolve a notação da Proposição 3.1.1, optamos por apresentá-la nesse momento.

Proposição 3.1.4 *Sejam ρ, τ representações de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ e $\overline{\rho}, \overline{\tau}$ representações de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, como na Proposição 3.1.1. Então $\overline{\rho}\otimes\overline{\tau} = \overline{\rho\otimes\tau}$ e $\overline{\rho}\oplus\overline{\tau} = \overline{\rho\oplus\tau}$.*

Demonstração: Mostremos que as representações $\overline{\rho}\otimes\overline{\tau}$ e $\overline{\rho\otimes\tau}$ são iguais nos geradores de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Como $x_{p,q}$ e $y_{p,q}$ são respectivamente elementos $(1, h^p)$-primitivos e $(1, h^{-p})$-primitivos e g, h são elementos grouplikes, segue que

$$
\begin{aligned}
(\overline{\rho}\otimes\overline{\tau})(g) &= \overline{\rho}(g)\otimes\overline{\tau}(g)=\overline{\rho(g)\otimes\tau(g)}\\
&= \overline{(\rho\otimes\tau)(g)}=\overline{\rho\otimes\tau}(g),\\[1em]
(\overline{\rho}\otimes\overline{\tau})(h) &= \overline{\rho}(h)\otimes\overline{\tau}(h)=\overline{\rho(h)\otimes\tau(h)}\\
&= \overline{(\rho\otimes\tau)(h)}=\overline{\rho\otimes\tau}(h),\\[1em]
(\overline{\rho}\otimes\overline{\tau})(x_{p,q}) &= \overline{\rho}(x_{p,q})\otimes\overline{\tau}(1)+\overline{\rho}(h^p)\otimes\overline{\tau}(x_{p,q})\\
&= 0+0=\overline{\rho\otimes\tau}(x_{p,q}),\\[1em]
(\overline{\rho}\otimes\overline{\tau})(y_{p,q}) &= \overline{\rho}(y_{p,q})\otimes\overline{\tau}(1)+\overline{\rho}(h^{-p})\otimes\overline{\tau}(y_{p,q})\\
&= 0+0=\overline{\rho\otimes\tau}(y_{p,q}).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\overline{\rho}\otimes\overline{\tau}=\overline{\rho\otimes\tau}$.

Mostremos, agora, que as representações $\overline{\rho}\oplus\overline{\tau}$ e $\overline{\rho\oplus\tau}$ são iguais nos geradores de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

$$
\begin{aligned}
(\overline{\rho}\oplus\overline{\tau})(g) &= \overline{\rho}(g)\oplus\overline{\tau}(g)=\overline{\rho(g)\oplus\tau(g)}\\
&= \overline{(\rho\oplus\tau)(g)}=\overline{\rho\oplus\tau}(g),\\[1em]
(\overline{\rho}\oplus\overline{\tau})(x_{p,q}) &= \overline{\rho}(x_{p,q})\oplus\overline{\tau}(x_{p,q})\\
&= 0=\overline{\rho\oplus\tau}(x_{p,q}).
\end{aligned}
$$

Para os demais geradores de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ as contas seguem de modo análogo. Portanto, $\overline{\rho}\oplus\overline{\tau}=\overline{\rho\oplus\tau}$. ■

3.2 Anel de Grothendieck de ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$

Usando o Teorema 3.1.2 e a definição de grupo de Grothendieck, obtemos que $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelo conjunto

$$T_I := \{[M_{\overline{\chi_1}}],[M_{\overline{\chi_2}}],[M_{\overline{\chi_3}}],[M_{\overline{\chi_4}}],[M_{\overline{\rho_l}}],1\le l\le n-1)\}.$$

Pelos Exemplos 1.3.2 e 1.3.4, ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$ é uma categoria monoidal e rígida e assim, pelo Teorema 1.3.18, $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ é um anel com o produto dado a seguir.

$$[M_{\overline{\mu_j}}][M_{\overline{\mu_k}}]=[M_{\overline{\mu_j}}\otimes M_{\overline{\mu_k}}]=\sum_{i=1}^{n+3}[M_{\overline{\mu_j}}\otimes M_{\overline{\mu_k}}:M_{\overline{\mu_i}}][M_{\overline{\mu_i}}],$$

em que $[M_{\overline{\mu_j}}], [M_{\overline{\mu_k}}], [M_{\overline{\mu_i}}] \in T_I$, para quaisquer $1 \leq i, j, k \leq n+3$ e estendido por linearidade nos demais elementos de $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$.

O objetivo nesta seção é mostrarmos que $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ e $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ são anéis isomorfos e para tanto, desenvolvemos a proposição e o lema expostos na sequência.

Proposição 3.2.1 *Sejam*

$$0 = M_{\xi_0} \subset M_{\xi_1} \subset \cdots \subset M_{\xi_r}$$

uma série de Jordan-Hölder na categoria ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$*, em que* $\xi_s : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M_{\xi_s})$ *são representações de* $\Bbbk\mathbb{D}_m$*, para* $s = 0, \cdots, r$ *e* $\overline{\xi_s}$ *as respectivas extensões à álgebra* $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$*, como na Proposição 3.1.1. Então*

$$0 = M_{\overline{\xi_0}} \subset M_{\overline{\xi_1}} \subset \cdots \subset M_{\overline{\xi_r}}$$

é uma série de Jordan-Hölder na categoria ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$.

Demonstração: Por hipótese, $\xi_{s+1}(x)|_{M_{\xi_s}} = \xi_s(x)$, para quaisquer $x \in \Bbbk\mathbb{D}_m$ e $s = 0, \cdots, r-1$. Consequentemente,

- se $x \in \Bbbk\mathbb{D}_m$, $\overline{\xi_{s+1}}(x)|_{M_{\overline{\xi_s}}} = \xi_{s+1}(x)|_{M_{\xi_s}} = \xi_s(x) = \overline{\xi_s}(x)$,
- $\overline{\xi_{s+1}}(\overline{x_{p,q}})|_{M_{\overline{\xi_s}}} = 0 = \overline{\xi_s}(x_{p,q})$ e
- $\overline{\xi_{s+1}}(y_{p,q})|_{M_{\overline{\xi_s}}} = 0 = \overline{\xi_s}(y_{p,q})$.

Logo, $\overline{\xi_{s+1}}(y)|_{M_{\overline{\xi_s}}} = \overline{\xi_s}(y)$, para todo $y \in \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ e assim podemos considerar a seguinte série em ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$

$$0 = M_{\overline{\xi_0}} \subset M_{\overline{\xi_1}} \subset \cdots \subset M_{\overline{\xi_r}}.$$

Suponhamos que $\dfrac{M_{\overline{\xi_i}}}{M_{\overline{\xi_{i-1}}}}$ possui um $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-submódulo e o denotamos por $\dfrac{M_{i'}}{M_{\overline{\xi_{i-1}}}}$. Então, em ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$,

$$M_{\overline{\xi_{i-1}}} \subset M_{i'} \subset M_{\overline{\xi_i}}.$$

Seja $\rho : \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}(M_{i'})$ a representação associada ao $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo $M_{i'}$, assim $M_{i'} = M_\rho$. Se $y \in \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, temos

$$\rho(y)|_{M_{\overline{\xi_{i-1}}}} = \overline{\xi_{i-1}}(y), \quad \overline{\xi_i}(y)|_{M_{i'}} = \rho(y). \tag{3.1}$$

Deste modo, restringindo ρ para $\Bbbk\mathbb{D}_m$ ($\Bbbk\mathbb{D}_m$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$) obtemos que $\tau_i := \rho|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ é uma representação de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ tal que, em ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$,

$$M_{\xi_{i-1}} \subset M_{\tau_i} \subset M_{\xi_i},$$

pois se $x \in \Bbbk\mathbb{D}_m$ então, pela Equação (3.1),

$$\tau_i(x)|_{M_{\xi_{i-1}}} = \rho(x)|_{M_{\overline{\xi_{i-1}}}} = \overline{\xi_{i-1}}(x) = \xi_{i-1}(x)$$

e

$$\xi_i(x)|_{M_{\tau_i}} = \overline{\xi_i}(x)|_{M_{i'}} = \rho(x) = \tau_i(x).$$

Logo, $\dfrac{M_{\tau_i}}{M_{\xi_{i-1}}}$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-submódulo de $\dfrac{M_{\xi_i}}{M_{\xi_{i-1}}}$. Como $\dfrac{M_{\xi_i}}{M_{\xi_{i-1}}}$ é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo simples, segue que $\dfrac{M_{\tau_i}}{M_{\xi_{i-1}}} = 0$ ou $\dfrac{M_{\tau_i}}{M_{\xi_{i-1}}} = \dfrac{M_{\xi_i}}{M_{\xi_{i-1}}}$ na categoria ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$.

Suponhamos $\dfrac{M_{\tau_i}}{M_{\xi_{i-1}}} = 0$. Neste caso, como conjuntos temos $M_{i'} = M_{\xi_{i-1}} = M_{\overline{\xi_{i-1}}}$, e assim, pela Equação (3.1),

$$\rho(y) = \rho(y)|_{M_{\overline{\xi_{i-1}}}} = \overline{\xi_{i-1}}(y),$$

para todo $y \in \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Logo, $\rho = \overline{\xi_{i-1}}$ e $\dfrac{M_{i'}}{M_{\overline{\xi_{i-1}}}} = 0$.

Suponhamos, agora, que $\dfrac{M_{\tau_i}}{M_{\xi_{i-1}}} = \dfrac{M_{\xi_i}}{M_{\xi_{i-1}}}$. Neste caso, $M_{i'} = M_{\xi_i} = M_{\overline{\xi_i}}$ como conjuntos e, pela Equação (3.1), segue que,

$$\rho(y) = \overline{\xi_i}(y)|_{M_{i'}} = \overline{\xi_i}(y),$$

para todo $y \in \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Logo, $\rho = \overline{\xi_i}$ e $\dfrac{M_{i'}}{M_{\overline{\xi_{i-1}}}} = \dfrac{M_{\overline{\xi_i}}}{M_{\overline{\xi_{i-1}}}}$.

Portanto, $\dfrac{M_{\overline{\xi_i}}}{M_{\overline{\xi_{i-1}}}}$ é um $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo simples, para cada $1 \leq i \leq r$, e

$$0 = M_{\overline{\xi_0}} \subset M_{\overline{\xi_1}} \subset \cdots \subset M_{\overline{\xi_r}}$$

é uma série de Jordan-Hölder na categoria ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$. ■

No lema a seguir, mostramos que a multiplicidade de $M_{\mu_i} \in \mathcal{S}$ na série de Jordan-Hölder de $M_{\mu_j \otimes \mu_k}$ é igual a multiplicidade de $M_{\overline{\mu_i}} \in \mathcal{T}$ na série de Jordan-Hölder de $M_{\overline{\mu_j \otimes \mu_k}}$.

Lema 3.2.2 *Sejam $M_{\mu_j}, M_{\mu_k} \in \mathcal{S}$. Então, para cada $M_{\mu_i} \in \mathcal{S}$, temos*

$$[M_{\mu_j \otimes \mu_k} : M_{\mu_i}] = [M_{\overline{\mu_j \otimes \mu_k}} : M_{\overline{\mu_i}}].$$

Demonstração: Seja

$$0 = M_{\xi_0} \subset M_{\xi_1} \subset \cdots \subset M_{\xi_r} = M_{\mu_j \otimes \mu_k} \tag{3.2}$$

uma série de Jordan-Hölder para o $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo $M_{\mu_j \otimes \mu_k}$, em que $\xi_s : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(M_{\xi_s})$ são as representações sobre $\Bbbk\mathbb{D}_m$ associadas, para $s = 0, \cdots, r$. Pela Proposição 3.2.1,

$$0 = M_{\overline{\xi_0}} \subset M_{\overline{\xi_1}} \subset \cdots \subset M_{\overline{\xi_r}} = M_{\overline{\mu_j \otimes \mu_k}}$$

é uma série de Jordan-Hölder para o $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo $M_{\overline{\mu_j \otimes \mu_k}}$.

Como (3.2) é uma série de Jordan-Hölder em ${}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$ então, para cada $s = 1, \cdots, r$, existe um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos $f : \frac{M_{\xi_s}}{M_{\xi_{s-1}}} \to M_{\mu_i}$, para algum $M_{\mu_i} \in \mathcal{S}$. Nosso objetivo é mostrarmos que $\frac{M_{\overline{\xi_s}}}{M_{\overline{\xi_{s-1}}}} \simeq M_{\overline{\mu_i}}$ na categoria ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$. Para tanto, definimos

$$f' : \frac{M_{\overline{\xi_s}}}{M_{\overline{\xi_{s-1}}}} \to M_{\overline{\mu_i}}, \text{ tal que } f'(\overline{\overline{m}}) = f(\overline{m}),$$

em que $\overline{\overline{m}} = m + M_{\overline{\xi_{s-1}}}$ e $\overline{m} = m + M_{\xi_{s-1}}$ e $m \in M_{\xi_s} = M_{\overline{\xi_s}}$ sendo esta última igualdade como conjuntos. Mostremos que f' é um isomorfismo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos.

Afirmamos que f' está bem definida. De fato, sejam $m, n \in M_{\overline{\xi_s}}$ tais que $\overline{\overline{m}} = \overline{\overline{n}}$, então $m - n \in M_{\overline{\xi_{s-1}}}$. Os conjuntos $M_{\overline{\xi_{s-1}}}$ e $M_{\xi_{s-1}}$ são iguais e assim, $m - n \in M_{\xi_{s-1}}$, ou seja, $\overline{m} = \overline{n}$. Deste modo, $f(\overline{m}) = f(\overline{n})$ e isto implica que $f'(\overline{\overline{m}}) = f(\overline{\overline{n}})$, provando a afirmação.

Na sequência, mostramos que f' é um morfismo na categoria ${}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$. Seja $\overline{\overline{m}} \in \frac{M_{\overline{\xi_s}}}{M_{\overline{\xi_{s-1}}}}$, então para qualquer $t \in \Bbbk\mathbb{D}_m$

$$\begin{aligned} f'(t \cdot \overline{\overline{m}}) &= f'(\overline{\overline{t \cdot m}}) \\ &= f(\overline{t \cdot m}) \\ &= t \cdot f(\overline{m}) = t \cdot f'(\overline{\overline{m}}). \end{aligned}$$

Além disso, para qualquer $(p, q) \in I$, temos

$$\begin{aligned} f'(x_{p,q} \cdot \overline{\overline{m}}) &= f'(\overline{\overline{x_{p,q} \cdot m}}) \\ &= f'(0) = f(0) = 0 \\ &= x_{p,q} \cdot f'(\overline{\overline{m}}), \\ f'(y_{p,q} \cdot \overline{\overline{m}}) &= 0 = y_{p,q} \cdot f'(\overline{\overline{m}}). \end{aligned}$$

Deste modo, f' é um isomorfismo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos e assim, $[M_{\mu_j\otimes\mu_k} : M_{\mu_i}] \leq [M_{\overline{\mu_j\otimes\mu_k}} : M_{\overline{\mu_i}}]$, para cada $1 \leq i \leq n+3$.

Seja, agora, $f' : \frac{M_{\overline{\xi_s}}}{M_{\overline{\xi_{s-1}}}} \to M_{\overline{\mu_i}}$ um isomorfismo de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos. Então, em particular, f' também é um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, pois $\Bbbk\mathbb{D}_m$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. Logo, $[M_{\mu_j\otimes\mu_k} : M_{\mu_i}] \geq [M_{\overline{\mu_j\otimes\mu_k}} : M_{\overline{\mu_i}}]$, para cada $1 \leq i \leq n+3$. Portanto, $[M_{\mu_j\otimes\mu_k} : M_{\mu_i}] = [M_{\overline{\mu_j\otimes\mu_k}} : M_{\overline{\mu_i}}]$, para cada $1 \leq i \leq n+3$. ■

Consideramos o anel $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$, introduzido na Subseção 1.3.3, gerado pelo conjunto $T = \{[M_{\chi_1}], [M_{\chi_2}], [M_{\chi_3}], [M_{\chi_4}], [M_{\rho_l}], 1 \leq l \leq n-1\}$.

Teorema 3.2.3 *Os anéis de Grothendieck $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ e $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ são isomorfos.*

Demonstração: Consideramos o $\mathbb{Z}$-homomorfismo

$$\varphi : \mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}) \to \mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$$

definido por $\varphi([M_{\mu_i}]) = [M_{\overline{\mu_i}}]$ se $[M_{\mu_i}] \in T$ e estendido por linearidade nos demais elementos de $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$.

Mostremos que φ está bem definido. De fato, sejam $N, N' \in {}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m}$ tais que $[N] = [N']$. Então, pela Definição 1.3.12,

$$\sum_{i=1}^{n+3}[N : M_{\mu_i}][M_{\mu_i}] = \sum_{i=1}^{n+3}[N' : M_{\mu_i}][M_{\mu_i}],$$

em que $[M_{\mu_i}] \in T$, para cada $1 \leq i \leq n+3$. Como T é base do grupo livre $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$, segue que $[N : M_{\mu_i}] = [N' : M_{\mu_i}]$, para cada $1 \leq i \leq n+3$. Deste modo,

$$\begin{array}{rcl}\varphi([N]) & = & \varphi(\sum_{i=1}^{n+3}[N : M_{\mu_i}][M_{\mu_i}]) \\ & = & \sum_{i=1}^{n+3}[N : M_{\mu_i}]\varphi([M_{\mu_i}]) \\ & = & \sum_{i=1}^{n+3}[N' : M_{\mu_i}][M_{\overline{\mu_i}}] \\ & = & \varphi(\sum_{i=1}^{n+3}[N' : M_{\mu_i}][M_{\mu_i}]) \\ & = & \varphi([N']).\end{array}$$

Mostremos, a seguir, que φ é homomorfismo de anéis. Sejam $[M_{\mu_j}]$,

$[M_{\mu_k}] \in T$ fixos. Para $[M_{\mu_i}] \in T$, em que $1 \leq i \leq n+3$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi([M_{\mu_j}][M_{\mu_k}]) &= \varphi([M_{\mu_j} \otimes M_{\mu_k}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n+3} [M_{\mu_j} \otimes M_{\mu_k} : M_{\mu_i}] \varphi([M_{\mu_i}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n+3} [M_{\mu_j \otimes \mu_k} : M_{\mu_i}] \varphi([M_{\mu_i}]) \\
&= \sum_{i=1}^{n+3} [M_{\mu_j \otimes \mu_k} : M_{\mu_i}][M_{\overline{\mu_i}}],
\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue da Proposição 1.2.18.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\varphi([M_{\mu_j}])\varphi([M_{\mu_k}]) &= [M_{\overline{\mu_j}}][M_{\overline{\mu_k}}] \\
&= [M_{\overline{\mu_j}} \otimes M_{\overline{\mu_k}}] \\
&= [M_{\overline{\mu_j} \otimes \overline{\mu_k}}] \\
&= [M_{\overline{\mu_j \otimes \mu_k}}] \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n+3} [M_{\overline{\mu_j \otimes \mu_k}} : M_{\overline{\mu_i}}][M_{\overline{\mu_i}}],
\end{aligned}$$

onde a terceira e quarta igualdades seguem das Proposições 1.2.18 e 3.1.4, respectivamente.

Pelo Lema 3.2.2, segue que $\varphi([M_{\mu_j}][M_{\mu_k}]) = \varphi([M_{\mu_j}])\varphi([M_{\mu_k}])$, ou seja, φ é homomorfismo de anéis. É imediato que φ é injetor e sobrejetor. Portanto, os anéis de Grothendieck $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ e $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$ são isomorfos. ∎

Corolário 3.2.4 *Valem as seguintes regras de fusão em* $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{m})$*:*

Se $\varepsilon, \delta, \overline{\varepsilon}, \overline{\delta} \in \{0,1\} = \mathbb{Z}_2$ *então*

$$[M_{\overline{\chi_{\varepsilon,\delta}}}][M_{\chi_{\overline{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}}}}] = [M_{\overline{\chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}}}].$$

Se $l, t \in \{1, \cdots, n-1\}$ *então*

$$[M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{0,0}}}] = [M_{\overline{\rho_l}}] = [M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{1,0}}}],$$

$$[M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{0,1}}}] = [M_{\overline{\rho_{n-l}}}] = [M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{1,1}}}],$$

$$[M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\rho_t}}] = \begin{cases} [M_{\overline{\rho_{l+t}}}] + [M_{\overline{\rho_{l-t}}}], l \neq t \ \text{ e } l+t \neq n, \\ [M_{\overline{\chi_{0,1}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,1}}}] + [M_{\overline{\rho_{l-t}}}], l \neq t \ \text{ e } l+t = n, \\ [M_{\overline{\rho_{2l}}}] + [M_{\overline{\chi_{0,0}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,0}}}], l = t \ \text{ e } 2l \neq n, \\ [M_{\overline{\chi_{0,1}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,1}}}] + [M_{\overline{\chi_{0,0}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,0}}}], l = t \ \text{ e } 2l = n. \end{cases}$$

Demonstração: Segue diretamente pelo teorema anterior e o Corolário 1.3.21. ∎

3.3 $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples

Nesta seção, calculamos um conjunto completo de $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples, não isomorfos e de dimensão finita. Pela Observação 3.1.3, só precisamos estender (por zero) as representações do grupo à bosonização. Assim, os resultados desta seção e da próxima seguem diretamente dos argumentos feitos nas duas seções anteriores.

Lembramos que $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$, em que $L \in \mathcal{L}$, é a álgebra de Hopf gerada por elementos $1\#g, 1\#h, \overline{c_l}\#1, \overline{d_l}\#1$, $l \in L$, satisfazendo as relações dadas no Teorema 2.3.3.

Proposição 3.3.1 *Seja* $\rho : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(M)$ *uma representação de* $\Bbbk\mathbb{D}_m$*. Então o morfismo de álgebras* $\overline{\rho} : \mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(M)$ *tal que*

$$\overline{\rho}(1\#g) = \rho(g), \overline{\rho}(1\#h) = \rho(h), \overline{\rho}(\overline{c_l}\#1) = 0 = \overline{\rho}(\overline{d_l}\#1)$$

é uma representação de $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$.

Demonstração: Notemos que

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}((1\#g)^2) = \overline{\rho}(1\#g)^2 &= \rho(g^2) = \rho(1) \\
&= \rho(h^m) = \overline{\rho}((1\#h)^m), \\
\overline{\rho}((1\#g)(1\#h)(1\#g)) &= \overline{\rho}(1\#g)\overline{\rho}(1\#h)\overline{\rho}(1\#g) \\
&= \rho(ghg) = \rho(h^{m-1}) \\
&= \overline{\rho}((1\#h)^{m-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}(1\#g)(\overline{c_l}\#1)) &= \overline{\rho}(1\#g)\overline{\rho}(\overline{c_l}\#1) = 0 \\
&= \overline{\rho}((\overline{d_l}\#1)(1\#g)), \\
\overline{\rho}((1\#h)(\overline{d_l}\#1)) &= \overline{\rho}(1\#h)\overline{\rho}(\overline{d_l}\#1) = 0 \\
&= \overline{\rho}(\omega^{-l}(\overline{d_l}\#1)(1\#h)), \\
\overline{\rho}((1\#h)(\overline{c_l}\#1)) &= \overline{\rho}(1\#h)\overline{\rho}(\overline{c_l}\#1) = 0 \\
&= \overline{\rho}(\omega^{l}(\overline{c_l}\#1)(1\#h)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}((\overline{c_l}\#1)(\overline{d_r}\#1) &+ (\overline{d_r}\#1)(\overline{c_l}\#1)) = \overline{\rho}(\overline{c_l}\#1)\overline{\rho}(\overline{d_r}\#1) \\
&+ \overline{\rho}(\overline{d_r}\#1)\overline{\rho}(\overline{c_l}\#1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}((\overline{c_l}\#1)(\overline{c_r}\#1) &+ (\overline{c_r}\#1)(\overline{c_l}\#1)) = \overline{\rho}(\overline{c_l}\#1)\overline{\rho}(\overline{c_r}\#1) \\
&+ \overline{\rho}(\overline{c_r}\#1)\overline{\rho}(\overline{c_l}\#1) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho}((\overline{d_l}\#1)(\overline{d_r}\#1) &+ (\overline{d_r}\#1)(\overline{d_l}\#1)) = \overline{\rho}(\overline{d_l}\#1)\overline{\rho}(\overline{d_r}\#1) \\
&+ \overline{\rho}(\overline{d_r}\#1)\overline{\rho}(\overline{d_l}\#1) = 0,
\end{aligned}$$

para quaisquer $l, r \in L$. Portanto, $\overline{\rho}$ é uma representação da álgebra $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$. ■

Denotamos por $M_{\overline{\rho}}$ o $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo associado a representação $\overline{\rho}$.

Teorema 3.3.2 *$\mathcal{F} := \{M_{\overline{\chi_1}}, M_{\overline{\chi_2}}, M_{\overline{\chi_3}}, M_{\overline{\chi_4}}, M_{\overline{\rho_l}}, 1 \leq l \leq n-1\}$ é um conjunto completo de $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples e não isomorfos.*

Demonstração: Esta demonstração é inteiramente análoga a do Teorema 3.1.2, basta trocar I por L. ■

3.4 Anel de Grothendieck de ${}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M}$

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto completo de $\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples e não isomorfos, dado pelo Teorema 3.3.2. O anel de Grothendieck $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelo conjunto

$$F_L := \{[M_{\overline{\chi_1}}], [M_{\overline{\chi_2}}], [M_{\overline{\chi_3}}], [M_{\overline{\chi_4}}], [M_{\overline{\rho_l}}], 1 \leq l \leq n-1\},$$

com o produto

$$[M_{\overline{\mu_j}}][M_{\overline{\mu_k}}] = [M_{\overline{\mu_j}} \otimes M_{\overline{\mu_k}}] = \sum_{i=1}^{n+3} [M_{\overline{\mu_j}} \otimes M_{\overline{\mu_k}} : M_{\overline{\mu_i}}][M_{\overline{\mu_i}}],$$

em que $[M_{\overline{\mu_j}}], [M_{\overline{\mu_k}}], [M_{\overline{\mu_i}}] \in F_L$, para cada $1 \leq i \leq n+3$ e estendido por linearidade nos demais elementos de $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$.

Seguindo a mesma idéia do Teorema 3.2.3, obtemos que os anéis de Grothendieck $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ e $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ são isomorfos. A única diferença no raciocínio é garantir que as representações do grupo podem se estender à bosonização, mas isso foi feito na Proposição 3.3.1.

Teorema 3.4.1 *Os anéis de Grothendieck $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ e $\mathcal{G}({}_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$ são isomorfos.*

Diretamente do teorema acima e do Corolário 1.3.21, seguem as regras de fusão em $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$.

Corolário 3.4.2 *Valem as seguintes regras de fusão em $\mathcal{G}({}_{\mathcal{B}(M_L)\#\Bbbk\mathbb{D}_m}\mathfrak{M})$:*

Se $\varepsilon, \delta, \overline{\varepsilon}, \overline{\delta} \in \{0,1\} = \mathbb{Z}_2$ então

$$[M_{\overline{\chi_{\varepsilon,\delta}}}][M_{\overline{\chi_{\overline{\varepsilon},\overline{\delta}}}}] = [M_{\overline{\chi_{\varepsilon+\overline{\varepsilon},\delta+\overline{\delta}}}}].$$

Se $l, t \in \{1, \cdots, n-1\}$ então

$$[M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{0,0}}}] = [M_{\overline{\rho_l}}] = [M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{1,0}}}],$$

$$[M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{0,1}}}] = [M_{\overline{\rho_{n-l}}}] = [M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\chi_{1,1}}}],$$

$$[M_{\overline{\rho_l}}][M_{\overline{\rho_t}}] = \begin{cases} [M_{\overline{\rho_{l+t}}}] + [M_{\overline{\rho_{l-t}}}], l \neq t \;\; e \; l+t \neq n, \\ [M_{\overline{\chi_{0,1}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,1}}}] + [M_{\overline{\rho_{l-t}}}], l \neq t \;\; e \; l+t = n, \\ [M_{\overline{\rho_{2l}}}] + [M_{\overline{\chi_{0,0}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,0}}}], l = t \;\; e \; 2l \neq n, \\ [M_{\overline{\chi_{0,1}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,1}}}] + [M_{\overline{\chi_{0,0}}}] + [M_{\overline{\chi_{1,0}}}], l = t \;\; e \; 2l = n. \end{cases}$$

Capítulo 4

$A_{i,n}(\lambda)$-módulos

Neste capítulo, calculamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples, em que $m = 4t, t \geq 3$, $n = \frac{m}{2} = 2t$ e $1 \leq i \leq n-1$. Lembramos que $A_{i,n}(\lambda)$ é gerada por elementos g, h, x, y satisfazendo as relações (veja Subseção 2.4.2)

$$g^2 = 1 = h^m, \;\; ghg = h^{m-1},$$

$$gx = yg, hx = -xh, hy = -yh,$$

$$x^2 = \lambda(1 - h^{2i}), y^2 = \lambda(1 - h^{-2i}), xy + yx = 0.$$

Segundo ([12], pg. 84), se $|I| = 1$, então é suposto que $\gamma = 0$. Se, além disso, $\lambda = 0$ então $A_{i,n}(\lambda) \simeq \mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$ por ([12], Lemma 3.16) e, nesse caso, os $\mathcal{B}(M_I)\#\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples já foram calculados no Teorema 3.1.2 desse trabalho. Consideramos daqui para frente $\lambda \neq 0$.

Nosso objetivo é encontrarmos um conjunto completo de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples, não isomorfos e de dimensão finita. Faremos isto a partir de um conjunto completo de módulos simples e não isomorfos de uma subálgebra semissimples conveniente de $A_{i,n}(\lambda)$.

A álgebra $A_{i,n}(\lambda)$ é pontuada e $G(A_{i,n}(\lambda)) = \mathbb{D}_m$. Logo, a álgebra de grupo $\Bbbk\mathbb{D}_m$ é uma subálgebra de $A_{i,n}(\lambda)$ e é semissimples, pois estamos supondo $\Bbbk$ um corpo de característica zero, veja a Proposição 1.2.31. Lembramos do Capítulo 1 que

$$\mathcal{S} = \{M_{\chi_1}, M_{\chi_2}, M_{\chi_3}, M_{\chi_4}, M_{\rho_l}, 1 \leq l \leq n-1\},$$

é o conjunto de todos os $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples, não isomorfos e finito dimensionais associados às representações irredutíveis, não equivalentes e finito dimensionais de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ dadas pelo conjunto

$$S = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_l, 1 \leq l \leq n-1\}.$$

Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo. O fato de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ ser uma subálgebra semissimples de $A_{i,n}(\lambda)$ e o que recordamos acima, nos dá que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ é uma soma direta (finita) dos $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos simples dados em $\mathcal{S}$. A notação $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ significa M visto como um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo restringindo a ação de $A_{i,n}(\lambda)$ a elementos de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ e que $M = M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ como $\Bbbk$-espaços vetoriais. Assim,

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}, \imath_\jmath \in \{1,2,3,4\} \text{ ou}$$

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}, \imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}, 1 \leq l_k \leq n-1$$

ou

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}, 1 \leq l_k \leq n-1,$$

para $r, s \geq 1$.

Deste modo, podemos enxergar todo $A_{i,n}(\lambda)$-módulo como uma extensão de um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo e então, a fim de calcularmos $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples, podemos estudar os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos nas três formas descritas acima.

Quando M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples, mostramos como ocorre a extensão da ação de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ à $A_{i,n}(\lambda)$. Quando M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples apenas usamos argumentos para provar isso e não nos preocupamos em caracterizá-los. Classificamos todos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos da segunda forma descrita acima. Para a primeira forma não resolvemos para o caso $s = 3$. Quando $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, não resolvemos nos seguintes casos:

- $r \in \{2,3,4\}$ e $l_k = \frac{n}{2}$, para todo $1 \leq k \leq r$.
- $r = 4$ e $l_k \neq \frac{n}{2}$ e $\omega^{2l_k i} \neq 1$, para todo $1 \leq k \leq r$.

A fim de deixarmos clara a organização dos resultados obtidos neste capítulo, apresentamos a seguir os principais teoremas e proposições de cada seção.

Na Seção 4.1, calculamos todos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ é isomorfo a um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo simples. Estes simples são provenientes de extensões das representações do conjunto S. Mostramos quando é possível estender as representações contidas no conjunto S para representações da álgebra $A_{i,n}(\lambda)$. Mais precisamente, a Proposição 4.1.1, mostra que as representações χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 podem ser estendidas para representações de $A_{i,n}(\lambda)$, de forma única, por zero. No Teorema 4.1.5, provamos que ρ_l estende-se a uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ se, e somente se, $\omega^{2li} = 1$ ou $\rho_{\frac{n}{2}}$ estende-se a $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$ sob certas condições. Em contrapartida, no Teorema 4.1.10, provamos que se l é tal que $\omega^{2li} \neq 1$ e $l \neq \frac{n}{2}$ então não é possível estendermos ρ_l para uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$. Finalizamos esta seção calculando todos os $A_{3,6}(\lambda)$-módulos simples M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_{12}}$ é isomorfo a um $\Bbbk\mathbb{D}_{12}$-módulo simples.

Na Seção 4.2 mostramos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}$, em que $\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}$, $s = 2$ e $s > 3$ então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Na Seção 4.3 provamos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, em que $\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}, 1 \leq l_k \leq n-1$ e $r, s \geq 1$ então M também é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Na Seção 4.4 estudamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, em que $1 \leq l_k \leq n-1$. Dividimos esta seção em 5 subseções. Na Subseção 4.4.1 mostramos que se $r \geq 2$ e $\omega^{2l_k i} = 1$, para cada $k \in \{1, \cdots, r\}$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Quando M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, $l_k = \frac{n}{2}$, para cada $1 \leq k \leq r$ e $r \geq 5$, provamos em 4.4.2 que M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Em 4.4.3, misturamos esses dois casos envolvendo os $l's$. Mostramos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}}$, em que $r, s \geq 1$, $\omega^{2l_j i} = 1$, para cada $j \in \{1, \cdots, r\}$ e $l_k = \frac{n}{2}$, para cada $1 \leq k \leq s$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Podemos ter l tal que $[\omega^{2li} = 1$ ou $l = \frac{n}{2}]$ ou ainda $[l \neq \frac{n}{2}$ e $\omega^{2li} \neq 1]$. Nesse sentido, provamos na Subseção 4.4.4 que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}}$, em que $r, s \geq 1$, $[\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}]$, para cada $1 \leq j \leq r$, e $[\omega^{2l_k i} = 1$ ou $l_k = \frac{n}{2}]$, para cada $1 \leq k \leq s$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Na Subseção 4.4.5, mostramos que se $1 \leq l_1, l_2 \leq n-1$ são tais que $l_1 + l_2 = n$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1,2\}$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que é simples. Construímos dois $A_{3,6}(\lambda)$-módulos simples e não isomorfos.

Além disso, mostramos que não existe um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}} \oplus M_{\rho_{l_3}}$ e $[\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}]$, para cada $j \in \{1,2,3\}$. Para $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}}$, em que $r > 4$, provamos que M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

As tabelas a seguir resumem os resultados obtidos.

Tabela 4.1: Resumo das Seções 4.2 e 4.3

$M\|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq$	Condições	Conclusão
$\oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}$	$\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}$, $s=2$ e $s>3$	Não é simples
$\oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}$	$\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}$ e $s=3$	Não resolvido
$\oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$	$\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}$ e $r,s \geq 1$	Não é simples

Tabela 4.2: Resumo da Seção 4.4

$M\|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq$	Condições	Conclusão
$\oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}}$	$s \geq 2$ e $\omega^{2l_k i}=1$	Não é simples
$\oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$	$r \in \{2,3,4\}$	Não resolvido
$\oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$	$r \geq 5$	Não é simples
$\oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}} \bigoplus \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$	$s, r \geq 1$ e $\omega^{2l_k i}=1$	Não é simples
$\oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}}$	$r,s \geq 1$, $[\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}]$ e $[\omega^{2l_k i}=1$ ou $l_k=\frac{n}{2}]$	Não é simples
$M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$	$\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$ $l_1+l_2 \neq n$	Não existe
$M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$	$\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$ $l_1+l_2 = n$	É simples
$M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}} \oplus M_{\rho_{l_3}}$	$\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$	Não existe
$\oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}}$	$r=4$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$	Não resolvido
$\oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}}$	$r \geq 5$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$	Não é simples

4.1 Extensões de representações simples

Nesta seção, calculamos todos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ seja isomorfo a um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo simples do conjunto $\mathcal{S}$ definido no Capítulo 1. Estes $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples são obtidos a partir da extensão das representações irredutíveis e não isomorfas de $\Bbbk\mathbb{D}_m$. Iniciamos mostrando quando é possível estender as representações irredutíveis de $\Bbbk\mathbb{D}_m$ a representações da álgebra $A_{i,n}(\lambda)$. Aqui é útil ter em mente a Observação 1.2.23.

Proposição 4.1.1 *As representações χ_1, χ_2, χ_3 e χ_4 podem ser estendidas a representações de $A_{i,n}(\lambda)$, de forma única, por zero.*

Demonstração: Consideremos χ_j, para qualquer $1 \leq j \leq 4$. Definimos o morfismo de álgebras $\overline{\chi_j} : A_{i,n}(\lambda) \to \Bbbk$ como segue

$$\overline{\chi_j}(g) = \chi_j(g), \overline{\chi_j}(h) = \chi_j(h) \text{ e } \overline{\chi_j}(x) = 0 = \overline{\chi_j}(y).$$

Mostremos que $\overline{\chi_j}$ está bem definida, isto é, as relações que definem $A_{i,n}(\lambda)$ são preservadas por $\overline{\chi_j}$. De fato, temos que

$$\overline{\chi_j}(gx) = 0 = \overline{\chi_j}(yg),\ \overline{\chi_j}(hx) = 0 = -\overline{\chi_j}(xh) = \overline{\chi_j}(-xh),$$

$$\overline{\chi_j}(hy) = 0 = -\overline{\chi_j}(yh) = \overline{\chi_j}(-yh) \text{ e } \overline{\chi_j}(xy + yx) = 0 = \overline{\chi_j}(0).$$

Notemos que $\overline{\chi_j}(x^2) = 0$. Por outro lado, para $1 \leq i \leq n-1$,

$$\overline{\chi_j}(h^{2i}) = \chi_j(h^{2i}) = (\chi_j(h))^{2i} = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \overline{\chi_j}(\lambda(1 - h^{2i})) &= \lambda\chi_j(1 - h^{2i}) \\ &= \lambda(\chi_j(1) - \chi_j(h^{2i})) \\ &= \lambda(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{\chi_j}(x^2) = 0 = \overline{\chi_j}(\lambda(1 - h^{2i}))$. De forma análoga, $\overline{\chi_j}(y^2) = 0 = \overline{\chi_j}(\lambda(1 - h^{-2i}))$.

A partir das relações $x^2 = \lambda(1-h^{2i})$ e $y^2 = \lambda(1-h^{-2i})$ concluímos que a única forma de estender χ_j, $1 \leq j \leq 4$, é definirmos $\overline{\chi_j}(x) = 0$ e $\overline{\chi_j}(y) = 0$. ■

Corolário 4.1.2 *Os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos $M_{\overline{\chi_j}}$, para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, são simples e não isomorfos.*

Demonstração: Pelo Lema 1.2.21, as extensões $\overline{\chi_1}, \overline{\chi_2}, \overline{\chi_3}$ e $\overline{\chi_4}$ são representações irredutíveis e não equivalentes de $A_{i,n}(\lambda)$. Agora, o resultado segue pelas Proposições 1.2.14 e 1.2.15. ■

Seguindo a notação acima, enunciamos o próximo resultado.

Teorema 4.1.3 *Seja (M, T) uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ e M_{χ_j} sejam isomorfos como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, para $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Então $M \simeq M_{\overline{\chi_j}}$ como $A_{i,n}(\lambda)$-módulos.*

Demonstração: Denotamos por $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to \Bbbk$ ($\Bbbk \simeq M_{\chi_j}$) o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado. Pela Proposição 1.2.15, as representações $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ e χ_j são equivalentes, isto é,

$$ST|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}(b) \overset{(*)}{=} \chi_j(b)S, \text{ para todo } b \in \Bbbk\mathbb{D}_m.$$

Mostremos que o isomorfismo S é de fato um morfismo de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos e com isso segue o teorema. Para isso, observemos da relação $x^2 = \lambda(1 - h^{2i})$ e da igualdade $(*)$, o seguinte

$$\begin{aligned} T(x)^2 &= T(x^2) = \lambda(T(1) - T(h^{2i})) \\ &= \lambda(S^{-1}\chi_j(1)S - S^{-1}\chi_j(h^{2i})S) \\ &= \lambda S^{-1}(\chi_j(1) - \chi_j(h^{2i}))S \\ &= \lambda S^{-1}(1-1)S \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como T é uma representação de grau 1, então $T(x)$ é um morfismo $\Bbbk$-linear nulo ou bijetor. Como $T(x)^2 = 0$, segue que $T(x)$ é o morfismo nulo, pois se $T(x)$ fosse bijetor, a composição $T(x)^2$ é também bijetora, o que é absurdo. Pela mesma razão, $T(y) = 0$. Portanto,

$$S(xm) = S(T(x)(m)) = S(0) = 0 = \overline{\chi_j}(x)S(m) = xS(m)$$

e analogamente, $S(ym) = yS(m)$. ∎

A seguir, vemos quando é possível estender $\rho_l : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2)$, $1 \leq l \leq n-1$, a representações de $A_{i,n}(\lambda)$. Lembramos que estamos considerando a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ fixada de $\Bbbk^2$, mencionada na Subseção 1.2.1.

Lema 4.1.4 *A igualdade $\omega^{2l} = -1$ se, e somente se, $l = \frac{n}{2}$.*

Demonstração: De fato, se $l = \frac{n}{2}$, então $\omega^{2l} = \omega^n = -1$. Suponhamos que $\omega^{2l} = -1$ então, por ser n o menor inteiro positivo tal que $\omega^n = -1$, segue que $2l = ns$ (s é ímpar, veja a Observação 2.4.8). Sendo $n = 2t$, podemos escrever $l = ts = \frac{n}{2}s$. Para $s = 1$, obtemos $l = \frac{n}{2}$. Observamos que para valores de s maiores ou iguais do que 3, já que s é ímpar, obtemos $l = \frac{n}{2}s > n-1$, o que não poderia ocorrer, pois $1 \leq l \leq n-1$. ∎

Naturalmente que se $\omega^{2li} = 1$ então $l \neq \frac{n}{2}$.

Teorema 4.1.5 *Sejam $\rho_l : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2)$ as representações irredutíveis de $\Bbbk\mathbb{D}_m$, em que $1 \leq l \leq n-1$. Então*
(i) *ρ_l estende-se de modo único a uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ por zero se, e somente se, $\omega^{2li} = 1$.*
(ii) *ρ_l estende-se a uma representação $\overline{\rho_l}$ de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que*

$$\overline{\rho_l}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

e
$$\overline{\rho_l}(y) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix},$$
em que z é uma raiz quarta de $-4\lambda^2$ se, e somente se, $l = \frac{n}{2}$.

Demonstração: (i) Suponhamos $1 \leq l \leq n-1$ tal que $\omega^{2li} = 1$. Definimos o morfismo de álgebras $\overline{\rho_l} : A_{i,n}(\lambda) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2)$ tal que $\overline{\rho_l}(g) = \rho_l(g)$, $\overline{\rho_l}(h) = \rho_l(h)$ e $\overline{\rho_l}(x) = 0 = \overline{\rho_l}(y)$.

Mostremos que $\overline{\rho_l}$ está bem definida, isto é, as relações que definem $A_{i,n}(\lambda)$ são preservadas por $\overline{\rho_l}$. De fato, temos que
$$\overline{\rho_l}(gx) = 0 = \overline{\rho_l}(yg), \quad \overline{\rho_l}(hx) = 0 = -\overline{\rho_l}(xh) = \overline{\rho_l}(-xh),$$
$$\overline{\rho_l}(hy) = 0 = -\overline{\rho_l}(yh) = \overline{\rho_l}(-yh) \text{ e } \overline{\rho_l}(xy+yx) = 0 = \overline{\rho_l}(0).$$
Além disso, $\overline{\rho_l}(x^2) = 0$ e
$$\begin{aligned} \overline{\rho_l}(\lambda(1-h^{2i})) &= \lambda(\overline{\rho_l}(1) - \overline{\rho_l}(h^{2i})) \\ &= \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} \omega^{2li} & 0 \\ 0 & \omega^{-2li} \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$
em que a última igualdade segue da hipótese. Logo, $\overline{\rho_l}(x^2) = 0 = \overline{\rho_l}(\lambda(1-h^{2i}))$. Analogamente, $\overline{\rho_l}(y^2) = 0 = \overline{\rho_l}(\lambda(1-h^{-2i}))$. Portanto, $\overline{\rho_l}$ estende-se a uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ por zero.

A partir das relações $hx = -xh, hy = -yh$ e da hipótese de que $\omega^{2li} = 1$, concluímos que a única forma de estendermos ρ_l, é definirmos $\overline{\rho_l}(x) = 0$ e $\overline{\rho_l}(y) = 0$.

Reciprocamente, suponhamos $\overline{\rho_l}$ uma extensão por zero de ρ_l, para algum $1 \leq l \leq n-1$. Então $\overline{\rho_l}$ preserva as relações que definem $A_{i,n}(\lambda)$ e assim, $\overline{\rho_l}(x^2) = 0 = \overline{\rho_l}(\lambda(1-h^{2i}))$. Logo,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(1-\omega^{2li}) & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2li}) \end{pmatrix}$$
e isso nos dá que $\omega^{2li} = 1$, pois $\lambda \neq 0$.

(ii) Suponhamos $l = \frac{n}{2}$ e definimos a extensão $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$ pelo morfismo de álgebras $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}} : A_{i,n}(\lambda) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2)$ tal que $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(g) = \rho_{\frac{n}{2}}(g), \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(h) = \rho_{\frac{n}{2}}(h)$,
$$\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(y) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix},$$

em que z é uma raiz quarta de $-4\lambda^2$. Mostremos a boa definição de $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$ verificando que as relações definidas em $A_{i,n}(\lambda)$ são preservadas por $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$. De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(gx) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda}{z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(yg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(hx) &= \begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \omega^{\frac{n}{2}}\frac{2\lambda}{z} \\ \omega^{-\frac{n}{2}}z & 0 \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-\frac{n}{2}}\frac{2\lambda}{z} \\ -\omega^{\frac{n}{2}}z & 0 \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix} \\
&= -\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(xh) = \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(-xh),
\end{aligned}$$

em que a igualdade $(*)$ segue do fato de que $\omega^n = -1$ e portanto, $\omega^{\frac{n}{2}} = -\omega^{-\frac{n}{2}}$. Analogamente, $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(hy) = \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(-yh)$. Verifiquemos as demais relações.

$$\begin{aligned}
\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{=} \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} \omega^{ni} & 0 \\ 0 & \omega^{-ni} \end{pmatrix} \\
&= \lambda(\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(1) - \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(h^{2i})) \\
&= \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(\lambda(1 - h^{2i})),
\end{aligned}$$

a igualdade $(*)$ segue do fato de que $\omega^{ni} = -1$. De modo análogo,

$\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(y^2) = \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(\lambda(1-h^{-2i}))$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(xy+yx) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4\lambda^2}{z^2} + z^2 & 0 \\ 0 & z^2 + \frac{4\lambda^2}{z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{4\lambda^2+z^4}{z^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\lambda^2+z^4}{z^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(0).
\end{aligned}$$

Portanto, $\rho_{\frac{n}{2}}$ estende-se, de fato, a uma representação $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$ de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$ e $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(y) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix}$, em que z é uma raiz quarta de $-4\lambda^2$.

Reciprocamente, suponhamos que ρ_l estende-se a uma representação $\overline{\rho_l}$ de $A_{i,n}(\lambda)$ como no enunciado do teorema. Então $\overline{\rho_l}$ preserva as relações que definem $A_{i,n}(\lambda)$. A relação $hx = -xh$ nos diz que

$$\begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2\lambda}{z} \\ -z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}$$

e isso implica que $\omega^l = -\omega^{-l}$ e daí, $\omega^{2l} = -1$. Logo, pelo lema acima, $l = \frac{n}{2}$. ■

Sejam $l = \frac{n}{2}$ e z uma raiz quarta de $-4\lambda^2$. Denotamos por M_z o $A_{i,n}(\lambda)$-módulo associado à extensão dada no Teorema 4.1.5 (ii). Observamos de imediato que, para cada $z \in \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, sendo este o conjunto das raízes quartas de $-4\lambda^2$, os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos $M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}$ e M_{z_4} são simples uma vez que são associados à uma extensão da representação $\rho_{\frac{n}{2}}$, que é irredutível, veja Lema 1.2.21.

A estratégia para mostrar que os mesmos não são dois a dois isomorfos é usar o que diz o Lema de Schur, isto é, provar que não há morfismo de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos não-nulo entre eles.

Proposição 4.1.6 *Se z e z' são duas raízes quartas distintas de $-4\lambda^2$ então M_z e $M_{z'}$ são $A_{i,n}(\lambda)$-módulos não isomorfos.*

Demonstração: Seja $\varphi : M_z \to M_{z'}$ um morfismo não-nulo de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos (φ é também $\Bbbk$-linear). Escrevemos $\varphi(v_1) = av_1 + bv_2$ e $\varphi(v_2) = cv_1 + dv_2$. Sendo M_z e $M_{z'}$ $A_{i,n}(\lambda)$-módulos, basta lembrarmos da ação definida na Proposição 1.2.11. Assim, $x\varphi(v_1) = \overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x)(\varphi(v_1))$ e matricialmente,

$$\begin{aligned}
[x\varphi(v_1)]_\beta &= [\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x)]_\beta[\varphi(v_1)]_\beta \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z'} \\ z' & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{z'}b \\ z'a \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Também $\varphi(xv_1) = \varphi(\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x)(v_1))$ e matricialmente,

$$\begin{aligned}
[\varphi(xv_1)]_\beta &= [\varphi(\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x)(v_1))]_\beta \\
&= [\varphi]_\beta[\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x)(v_1)]_\beta = [\varphi]_\beta[\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}(x)]_\beta[v_1]_\beta \\
&= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} zc \\ zd \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por ser φ um morfismo de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos, segue que

$$\begin{cases} \frac{2\lambda}{z'}b = zc \\ z'a \overset{(*)}{=} zd. \end{cases}$$

De maneira análoga, temos também que

$$[g\varphi(v_1)]_\beta = [\rho_{\frac{n}{2}}(g)(\varphi(v_1))]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

e que

$$\begin{aligned}
[\varphi(gv_1)]_\beta &= [\varphi(\rho_{\frac{n}{2}}(g)(v_1))]_\beta = [\varphi]_\beta[\rho_{\frac{n}{2}}(g)]_\beta[v_1]_\beta \\
&= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, $a = d$ e $b = c$. Diretamente deste fato, da igualdade $(*)$ e da hipótese de que z e z' são distintas, segue que $d = a = 0$ e sendo φ não-nulo, b e c são ambos não-nulos. Usando estes fatos, segue que

$$[h\varphi(v_1)]_\beta = [\rho_{\frac{n}{2}}(h)(\varphi(v_1))]_\beta = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^{-\frac{n}{2}}b \end{pmatrix}$$

e também

$$\begin{aligned}
[\varphi(hv_1)]_\beta &= [\varphi(\rho_{\frac{n}{2}}(h)(v_1))]_\beta = [\varphi]_\beta[\rho_{\frac{n}{2}}(h)]_\beta[v_1]_\beta \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^{\frac{n}{2}}b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\omega^{\frac{n}{2}}b = \omega^{-\frac{n}{2}}b$ e como $b \neq 0$, obtemos que $1 = \omega^{2\frac{n}{2}} = \omega^n$, absurdo, pois $\omega^n = -1$. Portanto, M_z e $M_{z'}$ são $A_{i,n}(\lambda)$-módulos não isomorfos. ■

Corolário 4.1.7 *Sejam $1 \leq l_1, \cdots, l_s \leq n-1$ tais que $\omega^{2l_j i} = 1$, para $j \in \{1, \cdots, s\}$ e z_1, z_2, z_3 e z_4 as raízes quartas de $-4\lambda^2$ então*

$$\{M_{\overline{\rho_{l_1}}}, \cdots, M_{\overline{\rho_{l_s}}}, M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}, M_{z_4}\}$$

é um conjunto de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples e não isomorfos.

Demonstração: Pelo Lema 1.2.21 sabemos que $\{\overline{\rho_{l_1}}, \cdots, \overline{\rho_{l_s}}\}$ é um conjunto de representações irredutíveis e não equivalentes. Logo, pelas Proposições 1.2.14 e 1.2.15, os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos $M_{\overline{\rho_{l_1}}}, \cdots, M_{\overline{\rho_{l_s}}}$ são simples e não isomorfos.

Os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos $M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}$ e M_{z_4} são simples como já observamos acima e, pela Proposição 4.1.6, não são dois a dois isomorfos. Além disso, não são isomorfos aos $A_{i,n}(\lambda)$-módulos $M_{\overline{\rho_{l_1}}}, \cdots, M_{\overline{\rho_{l_s}}}$, pois as representações $\overline{\rho_{l_1}}, \cdots, \overline{\rho_{l_s}}$ e $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$ não são equivalentes. Portanto,

$$\{M_{\overline{\rho_{l_1}}}, \cdots, M_{\overline{\rho_{l_s}}}, M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}, M_{z_4}\}$$

é um conjunto de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples e não isomorfos. ■

Teorema 4.1.8 *Seja (M, T) uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_l}$ como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que ρ_l é como Teorema 4.1.5 (i). Então $M \simeq M_{\overline{\rho_l}}$ como $A_{i,n}(\lambda)$-módulos.*

Demonstração: Consideremos $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to M_{\rho_l}$ o isomorfismo dado no enunciado. Pela Proposição 1.2.15, as representações $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ e ρ_l são equivalentes, isto é,

$$ST|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}(b) \stackrel{(*)}{=} \rho_l(b)S, \text{ para todo } b \in \Bbbk\mathbb{D}_m.$$

Consideremos $\beta' = \{S^{-1}(v_1), S^{-1}(v_2)\}$ base de $M = M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ como $\Bbbk$-espaço vetorial. A representação T preserva as relações que definem

$A_{i,n}(\lambda)$ e, dessa forma, da relação $hx = -xh$, segue que $T(h)T(x) = -T(x)T(h)$. Da igualdade $(*)$, $T(h) = S^{-1}\rho_l(h)S$ e

$$(S^{-1}\rho_l(h)S)(S^{-1}(v_1)) = S^{-1}(\rho_l(h)(v_1)) \overset{(1.2)}{=} S^{-1}(\omega^l v_1) = \omega^l S^{-1}(v_1)$$

e

$$(S^{-1}\rho_l(h)S)(S^{-1}(v_2)) = S^{-1}(\rho_l(h)(v_2)) \overset{(1.2)}{=} S^{-1}(\omega^{-l} v_2) = \omega^{-l} S^{-1}(v_2)$$

e isso nos diz que

$$[T(h)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}.$$

Denotamos a matriz de $T(x)$ em relação à base β' por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

e assim,

$$\begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^l & 0 \\ 0 & \omega^{-l} \end{pmatrix}.$$

Das igualdades $\omega^l a_{11} = -\omega^l a_{11}$ e $\omega^{-l} a_{22} = -\omega^{-l} a_{22}$, obtemos $a_{11} = a_{22} = 0$, pois a característica de $\Bbbk$ é zero.

Já as igualdades $\omega^l a_{12} = -\omega^{-l} a_{12}$ e $\omega^{-l} a_{21} = -\omega^l a_{21}$, nos dão que $(\omega^{2l} + 1)a_{12} = 0 = (\omega^{2l} + 1)a_{21}$. Se $\omega^{2l} + 1 = 0$, então $\omega^{2l} = -1$. Portanto, $(\omega^{2l})^i = (-1)^i$, isto é, $\omega^{2li} = (-1)^i = -1$, esta última igualdade segue do fato de que i é ímpar (veja a Observação 2.4.8), mas temos um absurdo, pois estamos supondo $\omega^{2li} = 1$. Logo, $a_{12} = 0 = a_{21}$ e a matriz $[T(x)]_{\beta'}$ é nula e portanto, $T(x) = 0$. De forma análoga, $T(y) = 0$. Tal conclusão independe da base escolhida para M, pois se γ é outra base de M, então $[T(x)]_\gamma = [I]^\gamma_{\beta'}[T(x)]_{\beta'}[I]^\gamma_{\beta'} = 0_{2\times 2}$.

Mostremos agora que S é um isomorfismo de $A_{i,n}(\lambda)$-módulos.

$$S(xm) = S(T(x)(m)) = S(0) = 0 \overset{(*)}{=} \overline{\rho_l}(x)S(m) = xS(m)$$

e

$$S(ym) = S(T(y)(m)) = S(0) = 0 \overset{(**)}{=} \overline{\rho_l}(y)S(m) = yS(m).$$

Em $(*)$ e $(**)$ acima usamos que ρ_l estende-se a $\overline{\rho}_l$ de modo único a uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ por zero. Portanto, $M \simeq M_{\overline{\rho_j}}$. ■

Teorema 4.1.9 *Seja (M, T) uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos. Então $M \simeq M_{z_1}$ ou $M \simeq M_{z_2}$ ou $M \simeq M_{z_3}$ ou $M \simeq M_{z_4}$, em que z_1, z_2, z_3 e z_4 são as raízes quartas de $-4\lambda^2$.*

Demonstração: Sejam $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ o isomorfismo dado no enunciado. Novamente, pela Proposição 1.2.15, as representações $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ e $\rho_{\frac{n}{2}}$ são equivalentes, isto é,

$$T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}(b) \overset{(*)}{=} S^{-1}\rho_{\frac{n}{2}}(b)S, \text{ para todo } b \in \Bbbk\mathbb{D}_m.$$

Sejam $\beta' = \{S^{-1}(v_1), S^{-1}(v_2)\}$ uma base de M como $\Bbbk$-espaço vetorial. Analogamente ao feito no teorema anterior segue que $T(h) = S^{-1}\rho_{\frac{n}{2}}(h)S$ e $[T(h)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$.

Sendo que $T(h)T(x) = -T(x)T(h)$ e portanto, em relação à base β', temos

$$\begin{aligned} [T(h)]_{\beta'}[T(x)]_{\beta'} &= \begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das igualdades $\omega^{\frac{n}{2}}a_{11} = -a_{11}\omega^{\frac{n}{2}}$ e $a_{22}\omega^{-\frac{n}{2}} = -a_{22}\omega^{-\frac{n}{2}}$, segue que $a_{11} = 0 = a_{22}$, pois $\Bbbk$ possui característica zero. Portanto,

$$[T(x)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos das igualdades (1.2) e de $(*)$ que

$$\begin{aligned} T(1-h^{2i})(S^{-1}(v_1)) &= (S^{-1}\rho_{\frac{n}{2}}(1-h^{2i})S)(S^{-1}(v_1)) \\ &= S^{-1}(\rho_{\frac{n}{2}}(1-h^{2i})(v_1)) \\ &= S^{-1}(\rho_{\frac{n}{2}}(1)(v_1) - \rho_{\frac{n}{2}}(h^{2i})(v_1)) \\ &= S^{-1}(v_1 - \omega^{ni}v_1) = S^{-1}((1-\omega^{ni})v_1) \\ &= (1-\omega^{ni})S^{-1}(v_1) = 2S^{-1}(v_1) \end{aligned}$$

e analogamente,

$$T(1-h^{2i})(S^{-1}(v_2)) = (S^{-1}\rho_{\frac{n}{2}}(1-h^{2i})S)(S^{-1}(v_2)) = 2S^{-1}(v_2).$$

Da relação $x^2 = \lambda(1-h^{2i})$, obtemos matricialmente, em relação à base β', que

$$\begin{aligned} [T(x^2)]_{\beta'} &= [\lambda(T(1-h^{2i}))]_{\beta'} \\ &= \lambda[T(1-h^{2i})]_{\beta'} \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $a_{12}a_{21} = 2\lambda \neq 0$, ou seja, $a_{12} = \frac{2\lambda}{a_{21}}$ e assim,

$$[T(x)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{a_{21}} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Chamamos $[T(y)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, usando a relação $hy = -yh$ e seguindo o desenvolvimento anterior, temos que $b_{11} = b_{22} = 0$ e $b_{12}b_{21} = 2\lambda$ e portanto, $b_{12} = \frac{2\lambda}{b_{21}}$. Assim,

$$[T(y)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{b_{21}} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Da igualdade (1.1), temos que

$$(S^{-1}\rho_{\frac{n}{2}}(g)S)(S^{-1}(v_1)) = S^{-1}(v_2) \text{ e } (S^{-1}\rho_{\frac{n}{2}}(g)S)(S^{-1}(v_2)) = S^{-1}(v_1)$$

e assim, pela igualdade $(*)$, $[T(g)]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Agora, da relação $y = gxg$ temos, em relação à base β', que

$$\begin{aligned} [T(y)]_{\beta'} &= [T(g)]_{\beta'}[T(x)]_{\beta'}[T(g)]_{\beta'} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{a_{21}} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_{21} \\ \frac{2\lambda}{a_{21}} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A relação $xy = -yx$ nos dá que $[T(x)]_{\beta'}[T(y)]_{\beta'} = -[T(y)]_{\beta'}[T(x)]_{\beta'}$ e isso implica que $a_{21}^4 = -4\lambda^2$, donde concluímos que a_{21} é uma raiz quarta de $-4\lambda^2$. Assim, a_{21} é um dos $z_i's$, $1 \leq i \leq 4$. Para fixar ideias, escrevemos $a_{21} = z$.

Consideramos a representação $(M_z, \overline{\rho_{\frac{n}{2}}})$ (veja Teorema 4.1.5 (ii)). Pelo desenvolvido nesta prova, os caracteres $\mu_M = \mu_{M_z}$, isto é, as representações T e $\overline{\rho_{\frac{n}{2}}}$ possuem o mesmo caracter. Ainda, pelo Corolário 4.1.7, M_z é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples.

Agora, por hipótese, $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ e $M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ são isomorfos como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos e portanto, $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ é simples e, pela Proposição 1.2.14, $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ é irredutível. Logo, T é irredutível, pelo Lema 1.2.21 e, novamente pela Proposição 1.2.14, M é simples.

Concluímos então que M e M_z são $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples, finito dimensionais e as representações associadas aos mesmos possuem o mesmo caracter. Portanto, pelo Teorema 1.2.25, temos que M e M_z são isomorfos. ■

Teorema 4.1.10 *Se $\omega^{2li} \neq 1$ e $l \neq \frac{n}{2}$ então ρ_l não estende-se a uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$.*

Demonstração: Seja $\rho_l : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk^2)$ uma representação tal que $\omega^{2li} \neq 1$ e $l \neq \frac{n}{2}$. Suponhamos, por absurdo, que ρ_l estende-se a uma representação $\overline{\rho_l} : A_{i,n}(\lambda) \to \mathrm{End}_\Bbbk(\Bbbk^2)$. Denotamos

$$\overline{\rho_l}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \overline{\rho_l}(y) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

as matrizes das representações em relação à base $\beta = \{v_1, v_2\}$.

Como $\overline{\rho_l}$ preserva as relações que definem $A_{i,n}(\lambda)$, da relação $hx = -xh$, segue que $\overline{\rho_l}(hx)(v) = \overline{\rho_l}(-xh)(v)$, para todo $v \in \Bbbk^2$. Matricialmente temos que

$$[\overline{\rho_l}(h)]_\beta [\overline{\rho_l}(x)]_\beta [v]_\beta = -[\overline{\rho_l}(x)]_\beta [\overline{\rho_l}(h)]_\beta [v]_\beta,$$

para todo $v \in \Bbbk^2$.

Em particular, para $v = v_1$, temos que $a_{11}\omega^l = -a_{11}\omega^l$ e como $\omega^l \neq 0$ e a característica de $\Bbbk$ é zero, $a_{11} = 0$. Por outro lado, $a_{21}\omega^{-l} = -a_{21}\omega^l$ e portanto, $(1 + \omega^{2l})a_{21} = 0$ e necessariamente $a_{21} = 0$ pois, caso contrário, $\omega^{2l} = -1$ e isso implicaria que $l = \frac{n}{2}$, o que contradiz a hipótese. Logo, $a_{11} = 0 = a_{21}$. De maneira análoga, para $v = v_2$, segue que $a_{22} = 0 = a_{12}$. Desta forma, $\overline{\rho_l}(x) = 0$.

A relação $hy = -yh$ nos dá matricialmente que

$$[\overline{\rho_l}(h)]_\beta [\overline{\rho_l}(y)]_\beta [v]_\beta = -[\overline{\rho_l}(y)]_\beta [\overline{\rho_l}(h)]_\beta [v]_\beta,$$

para todo $v \in \Bbbk^2$. Exatamente como fizemos acima, concluímos que $b_{ij} = 0$, para quaisquer $1 \leq i, j \leq 2$ e assim, $\overline{\rho_l}(y) = 0$.

Concluímos então que tal extensão estende-se por zero a $A_{i,n}(\lambda)$ e, pelo Teorema 4.1.5, $\omega^{2li} = 1$ e isso é absurdo de acordo com nossa hipótese. Portanto, ρ_l não estende-se a uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ se $\omega^{2li} \neq 1$ e $l \neq \frac{n}{2}$. ∎

O teorema acima nos diz que não existe um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_l}$, em que $\omega^{2li} \neq 1$ e $l \neq \frac{n}{2}$.

Exemplo 4.1.11 Consideramos $m = 12, n = 6, i = 3$. Nesse caso, a álgebra $A_{3,6}(\lambda)$ satisfaz as relações

$$g^2 = 1 = h^{12}, \ \ ghg = h^{11},$$

$$gx = yg, hx = -xh, hy = -yh,$$

$$x^2 = \lambda(1-h^6), y^2 = \lambda(1-h^{-6}), xy + yx = 0.$$

O conjunto completo de $\Bbbk\mathbb{D}_{12}$-módulos simples e não isomorfos é

$$S = \{\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}.$$

Pelo Teorema 4.1.1, as representações $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ podem ser estendidas para representações de $A_{3,6}(\lambda)$, de forma única, por zero. O Teorema 4.1.5 nos diz que podemos estender as representações ρ_2 e ρ_4 a representações de $A_{3,6}(\lambda)$, de forma única, por zero, pois $\omega^{2li} = 1$. Também pelo Teorema 4.1.5, podemos estender a representação ρ_3 a uma representação $\overline{\rho_l}$ de $A_{3,6}(\lambda)$ tal que

$$\overline{\rho_l}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2\lambda}{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\overline{\rho_l}(y) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \frac{2\lambda}{z} & 0 \end{pmatrix},$$

em que z é uma raiz quarta de $-4\lambda^2$, pois $l = 3 = \frac{n}{2}$.

Pelo Teorema 4.1.10, as representações ρ_1 e ρ_5 não se estendem a representações de $A_{3,6}(\lambda)$, pois $\omega^{2li} \neq 1$ e $\omega^{2l} \neq -1$ para $l \in \{1, 5\}$.

Portanto, se z_1, z_2, z_3 e z_4 são as raízes quartas de $-4\lambda^2$ então $\{M_{\overline{\chi_1}}, M_{\overline{\chi_2}}, M_{\overline{\chi_3}}, M_{\overline{\chi_4}}, M_{\overline{\rho_2}}, M_{\overline{\rho_4}}, M_{z_1}, M_{z_2}, M_{z_3}, M_{z_4}\}$ é um conjunto de $A_{3,6}(\lambda)$-módulos simples e não isomorfos.

4.2 $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}$

Nesta seção, mostramos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}$, em que $\imath_\jmath \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $s = 2$ ou $s \geq 4$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples. Primeiramente, apresentamos dois resultados mais gerais que se aplicam diretamente aos Teoremas 4.2.3 e 4.2.4, respectivamente, para os casos em que $s = 2$ e $s \geq 4$, assim como para o principal teorema da próxima seção.

Proposição 4.2.1 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} \oplus_{l=1}^{s} M_l$, $s \geq 2$, seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que os $M_l's$ são $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos não-nulos. Então $S^{-1}(M_l)$ não é $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo de M, para todo $l = 1, 2, \cdots, s$.*

Demonstração: Suponhamos que $S^{-1}(M_\jmath)$ seja um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo de M, para algum $\jmath \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Então $S^{-1}(M_\jmath) = 0$ ou

$S^{-1}(M_\jmath) = M$, isto é, $M_\jmath = 0$ ou $M_\jmath = S(M) = \oplus_{l=1}^{s} M_l$ e ambas igualdades são obviamente absurdas (notemos que se $M_\jmath = \oplus_{l=1}^{s} M_l$, então $\forall \lambda \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $\lambda \neq \jmath$, $M_\lambda \subset M_\jmath \cap \sum_{\jmath \neq l=1}^{s} M_l = 0$, ou seja, $M_\lambda = 0$, absurdo). Assim, $S^{-1}(M_l)$ não é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo de M, para todo $l = 1, 2, \cdots, s$. ■

Vemos imediatamente da proposição acima que $xS^{-1}(M_\jmath) \neq 0$ ou $yS^{-1}(M_\jmath) \neq 0$, para $\jmath = 1, 2, \cdots, s$ e portanto, $xS^{-1}(M_\jmath)$ e $yS^{-1}(M_\jmath)$ não podem ser simultaneamente nulos.

Corolário 4.2.2 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} \oplus_{l=1}^{s} M_l$, $s \geq 2$, seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que os M_l's são $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos não-nulos. Então, para cada $\jmath \in \{1, 2, \cdots, s\}$, existem $z_\jmath, z_\jmath^{'} \in M_\jmath$ tais que $xS^{-1}(z_\jmath) \notin S^{-1}(M_\jmath)$ ou $yS^{-1}(z_\jmath^{'}) \notin S^{-1}(M_\jmath)$, ou seja,*

$$xS^{-1}(z_\jmath) = S^{-1}(u_1 + u_2 + \cdots + u_s),$$

em que $u_\ell \in M_\ell$ é não-nulo, para algum $\ell \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $\ell \neq \jmath$ ou

$$yS^{-1}(z_\jmath^{'}) = S^{-1}(w_1 + w_2 + \cdots + w_s),$$

em que $w_r \in M_r$ é não-nulo, para algum $r \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $r \neq \jmath$.

Demonstração: Seja $\jmath \in \{1, 2, \cdots, s\}$. Então, pela proposição acima, existem $z_\jmath, z_\jmath^{'} \in M_\jmath$ tais que $xS^{-1}(z_\jmath) \notin S^{-1}(M_\jmath)$ ou $yS^{-1}(z_\jmath^{'}) \notin S^{-1}(M_\jmath)$. Caso contrário, isto é, se $xS^{-1}(z) \in S^{-1}(M_\jmath)$ e $yS^{-1}(z) \in S^{-1}(M_\jmath)$, para qualquer $z \in M_\jmath$, então o mesmo seria um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo de M, contradição.

Consideremos que $xS^{-1}(z_\jmath) \notin S^{-1}(M_\jmath)$ e portanto, $xS^{-1}(z_\jmath) \neq 0$. Então $0 \neq S(xS^{-1}(z_\jmath)) \in \oplus_{l=1}^{s} M_l$ e portanto, existem $u_\iota \in M_\iota$, $\iota \in \{1, 2, \cdots, s\}$ não todos nulos tais que $S(xS^{-1}(z_\jmath)) = u_1 + u_2 + \cdots + u_s$. Afirmamos que existe pelo menos um $\ell \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $\ell \neq \jmath$, tal que $u_\ell \neq 0$.

De fato, se $u_\iota = 0$, para todo $\iota \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $\iota \neq \jmath$, então $S(xS^{-1}(z_\jmath)) = u_\jmath$ e assim, $xS^{-1}(z_\jmath) = S^{-1}(u_\jmath) \in S^{-1}(M_\jmath)$, o que é absurdo. Logo, existe um $\ell \in \{1, 2, \cdots, s\}$, $\ell \neq \jmath$, tal que $u_\ell \neq 0$. Mesmo raciocínio para a possibilidade $yS^{-1}(z_\jmath^{'}) \notin M_\jmath$. ■

Teorema 4.2.3 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\chi_{\imath_1}} \oplus M_{\chi_{\imath_2}}$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $\imath_1, \imath_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.*

Demonstração: Suponhamos que M seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples e denotamos por $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to M_{\chi_{\imath_1}} \oplus M_{\chi_{\imath_2}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado.

Pelo corolário acima, existem $z, z', u_{\imath_1}, u^{'}_{\imath_1} \in M_{\chi_{\imath_1}}$ e $0 \neq u_{\imath_2}, u^{'}_{\imath_2} \in M_{\chi_{\imath_2}}$ tais que

$$xS^{-1}(z) = S^{-1}(u_{\imath_1} + u_{\imath_2}) \text{ ou } yS^{-1}(z') = S^{-1}(u^{'}_{\imath_1} + u^{'}_{\imath_2}).$$

Consideremos $xS^{-1}(z) = S^{-1}(u_{\imath_1} + u_{\imath_2})$. Temos que $xhS^{-1}(z) = -hxS^{-1}(z)$ e daí,

$$\begin{aligned} xhS^{-1}(z) &= xS^{-1}(hz) = xS^{-1}((-1)^{\alpha_{\imath_1}} z) \\ &= (-1)^{\alpha_{\imath_1}} xS^{-1}(z) \\ &= (-1)^{\alpha_{\imath_1}} S^{-1}(u_{\imath_1} + u_{\imath_2}) \end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} -hxS^{-1}(z) &= -hS^{-1}(u_{\imath_1} + u_{\imath_2}) \\ &= -S^{-1}(hu_{\imath_1} + hu_{\imath_2}) \\ &= -(-1)^{\alpha_{\imath_1}} S^{-1}(u_{\imath_1}) - (-1)^{\alpha_{\imath_2}} S^{-1}(u_{\imath_2}) \\ &= (-1)^{\alpha_{\imath_1}+1} S^{-1}(u_{\imath_1}) + (-1)^{\alpha_{\imath_2}+1} S^{-1}(u_{\imath_2}), \end{aligned}$$

em que $\alpha_{\imath_1}, \alpha_{\imath_2} \in \{0, 1\}$. Logo,

$$(-1)^{\alpha_{\imath_1}} S^{-1}(u_{\imath_1} + u_{\imath_2}) = (-1)^{\alpha_{\imath_1}+1} S^{-1}(u_{\imath_1}) + (-1)^{\alpha_{\imath_2}+1} S^{-1}(u_{\imath_2})$$

e aplicando S a essa última igualdade, temos que

$$(-1)^{\alpha_{\imath_1}} u_{\imath_1} + (-1)^{\alpha_{\imath_1}} u_{\imath_2} = (-1)^{\alpha_{\imath_1}+1} u_{\imath_1} + (-1)^{\alpha_{\imath_2}+1} u_{\imath_2}.$$

Pelo fato da igualdade acima ser uma soma direta, segue que

$$(-1)^{\alpha_{\imath_1}} u_{\imath_1} = (-1)^{\alpha_{\imath_1}+1} u_{\imath_1}$$

e

$$(-1)^{\alpha_{\imath_1}} u_{\imath_2} = (-1)^{\alpha_{\imath_2}+1} u_{\imath_2}.$$

A primeira igualdade implica que $u_{\imath_1} = -u_{\imath_1}$ e como a característica do corpo é zero, $u_{\imath_1} = 0$.

Na segunda igualdade, podem ocorrer: $\alpha_{\imath_1} = \alpha_{\imath_2}$ ou $\alpha_{\imath_1} \neq \alpha_{\imath_2}$. Se $\alpha_{\imath_1} = \alpha_{\imath_2}$ então $u_{\imath_2} = 0$, absurdo. Portanto, ocorre a outra situação (que é uma tautologia) e como $u_{\imath_1} = 0$, segue que

$$xS^{-1}(z) = S^{-1}(u_{\imath_2}).$$

Seja $V =< S^{-1}(u_{\imath_2}) >$ o $\Bbbk$-subespaço vetorial de M gerado por $S^{-1}(u_{\imath_2})$. Mostremos que V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M.

De fato, V é não-nulo, pois $u_{\imath_2} \neq 0$ e S é um isomorfismo. Além disso, $V \subsetneqq M$, pois $\dim_{\Bbbk} V = 1$ e $\dim_{\Bbbk} M = 2$. Assim, V é um $\Bbbk$-subespaço de M não trivial. Verifiquemos que V é fechado para a ação dos elementos geradores de $A_{i,n}(\lambda)$. Temos que

$$gS^{-1}(u_{\imath_2}) = S^{-1}(gu_{\imath_2}) = S^{-1}((-1)^{\beta_{\imath_2}} u_{\imath_2}) = (-1)^{\beta_{\imath_2}} S^{-1}(u_{\imath_2}) \in V$$

e analogamente,

$$hS^{-1}(u_{\imath_2}) = (-1)^{\alpha_{\imath_2}} S^{-1}(u_{\imath_2}) \in V.$$

Lembramos que $h^{2i}z = \chi_{\imath_1}(h^{2i})(z) = (-1)^{2i}z = z$ e assim,

$$\begin{array}{rcl} xS^{-1}(u_{\imath_2}) & = & x(xS^{-1}(z)) \\ & = & x^2 S^{-1}(z) \\ & = & \lambda(1-h^{2i})S^{-1}(z) \\ & = & \lambda S^{-1}((1-h^{2i})z) = 0 \in V. \end{array}$$

Deste modo, V é fechado para as ações de g, h e x e como $y = gxg$, então

$$\begin{array}{rcl} yS^{-1}(u_{\imath_2}) & = & (gxg)S^{-1}(u_{\imath_2}) \\ & = & gx(gS^{-1}(u_{\imath_2})) \\ & = & gx((-1)^{\beta_{\imath_2}} S^{-1}(u_{\imath_2})) \\ & = & g((-1)^{\beta_{\imath_2}} xS^{-1}(u_{\imath_2})) = 0 \in V. \end{array}$$

Logo, V é fechado também para a ação de y. Portanto, V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M, contradizendo o que supusemos inicialmente.

Se considerarmos $yS^{-1}(z') = S^{-1}(u'_{\imath_1} + u'_{\imath_2})$, concluiremos que $u'_{\imath_1} = 0$ e fazendo $V =< S^{-1}(u'_{\imath_2}) >$, obteremos os mesmos absurdos. Portanto, M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples. ■

Para o próximo teorema devido ao fato de que $\dim_{\Bbbk}(M) = s \geq 4$, a obtenção de um subespaço V de M, que virá tornar-se um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M, é mais rápida. Assim, a prova é ligeiramente distinta da maneira como desenvolvemos no caso anterior.

Teorema 4.2.4 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\chi_{\imath_1}} \oplus \cdots \oplus M_{\chi_{\imath_s}}$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $\imath_1, \cdots, \imath_s \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $s \geq 4$. Então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.*

Demonstração: Seja $s \geq 4$. Suponhamos que M seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Denotamos por $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to M_{\chi_{\imath_1}} \oplus \cdots \oplus M_{\chi_{\imath_s}}$, o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado. Pelo Corolário 4.2.2, existem $z, z^{'} \in M_{\chi_{\imath_1}}$ tais que

$$xS^{-1}(z) = S^{-1}(u_1 + \cdots + u_j + \cdots + u_s),$$

em que cada $u_t \in M_{\chi_{\imath_t}}$ e $u_j \neq 0$, para algum $1 < j \leq s$ ou

$$yS^{-1}(z^{'}) = S^{-1}(w_1 + \cdots + w_r + \cdots + w_s),$$

em que $w_t \in M_{\chi_{\imath_t}}$ e $w_r \neq 0$, para algum $1 < r \leq s$.

Suponhamos que $xS^{-1}(z) = S^{-1}(u_1 + \cdots + u_j + \cdots + u_s)$ e consideremos o $\Bbbk$-subespaço vetorial

$$V = < xS^{-1}(z), yS^{-1}(z), xyS^{-1}(z) >$$

de M. Mostremos que V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M.

Claramente, $V \neq 0$, pois $xS^{-1}(z) \neq 0$ ($u_j \neq 0$ e S é um isomorfismo). Além disso, $V \subsetneqq M$, pois $\dim_{\Bbbk}(M) = s \geq 4$ e $\dim_{\Bbbk}(V) \leq 3$.

Primeiramente, vejamos que V é fechado para a ação de x. De fato, usando as relações que definem $A_{i,n}(\lambda)$, obtemos que

$$\begin{aligned} xxS^{-1}(z) &= \lambda(1 - h^{2i})S^{-1}(z) \\ &= S^{-1}(\lambda(1 - h^{2i})z) \\ &= S^{-1}(0) = 0 \in V. \end{aligned}$$

Além disso, $xyS^{-1}(z) \in V$ e usando que $x^2S^{-1}(z) = 0$ temos

$$xxyS^{-1}(z) \overset{(*)}{=} yx^2S^{-1}(z) = 0 \in V,$$

em que a igualdade $(*)$ segue da relação $xy = -yx$.

Na sequência, mostramos o fechamento de V para ação de h. Temos que

$$\begin{aligned} hxS^{-1}(z) &= -xhS^{-1}(z) \\ &= -xS^{-1}(hz) \\ &= -(-1)^{\alpha_1}xS^{-1}(z) \in V \end{aligned}$$

e

$$hyS^{-1}(z) = -yhS^{-1}(z) = -(-1)^{\alpha_1}yS^{-1}(z) \in V,$$

em que $\alpha_1 \in \{0, 1\}$. Usando a igualdade anterior, segue que

$$hxyS^{-1}(z) = -xhyS^{-1}(z) = (-1)^{\alpha_1}xyS^{-1}(z) \in V.$$

Verifiquemos o fechamento para ação de g, notemos que

$$gxS^{-1}(z) \overset{(*)}{=} ygS^{-1}(z) = yS^{-1}(gz) = (-1)^{\beta_1} yS^{-1}(z),$$

$$gyS^{-1}(z) = xgS^{-1}(z) = (-1)^{\beta_1} xS^{-1}(z)$$

e

$$\begin{array}{rcl} gxyS^{-1}(z) & = & ygyS^{-1}(z) \\ & = & (-1)^{\beta_1} yxS^{-1}(z) \\ & = & -(-1)^{\beta_1} xyS^{-1}(z), \end{array}$$

em que $\beta_1 \in \{0, 1\}$ e a igualdade $(*)$ segue da relação $gx = yg$. Logo, $gxS^{-1}(z), gyS^{-1}(z)$ e $gxyS^{-1}(z)$ pertencem a V.

A verificação de que V é fechado para a ação de y é imediata, pois $y = gxg$ ou simplesmente observamos que

$$yxS^{-1}(z) = -xyS^{-1}(z),$$

$$yyS^{-1}(z) = y^2 S^{-1}(z) = \lambda(1 - h^{-2i})S^{-1}(z) = 0$$

e

$$yxyS^{-1}(z) = -xyyS^{-1}(z) = -x(y^2 S^{-1}(z)) = 0.$$

Portanto, V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M, contradizendo a suposição inicial.

Se considerarmos a outra situação, isto é, que $yS^{-1}(z^{'}) = S^{-1}(w_1 + \cdots + w_{j'} + \cdots + w_s)$, a demonstração segue de forma similar, considerando o $\Bbbk$-subespaço vetorial

$$V =< xS^{-1}(z^{'}), yS^{-1}(z^{'}), xyS^{-1}(z^{'}) >$$

de M. Portanto, M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples. ∎

4.3 $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$

Nesta seção, mostramos que se M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, em que $\imath_\jmath \in \{1, 2, 3, 4\}, 1 \leq l_k \leq n-1$ e $r, s \geq 1$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

No próximo lema, consideramos $M_1 = \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}}$ e $M_2 = \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$.

Lema 4.3.1 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples tal que*

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}} = M_1 \oplus M_2$$

seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}, 1 \leq l_k \leq n-1$ e $r, s \geq 1$. Então existem $z_\ell, z_\ell^{'} \in M_{\chi_{\imath_\ell}}$, para algum $\ell \in \{1,2,\cdots,s\}$, tais que $xS^{-1}(z_\ell) \notin S^{-1}(M_1)$ ou $yS^{-1}(z_\ell^{'}) \notin S^{-1}(M_1)$, ou seja, existem $w_k, w_k^{'} \in M_{\rho_{l_k}}$, $k \in \{1,2,\cdots,r\}$, com $0 \neq w_t \in M_{\rho_{l_t}}$ e $0 \neq w_{t^{'}}^{'} \in M_{\rho_{t^{'}}}$, para alguns $t, t^{'} \in \{1,2,\cdots,r\}$ tais que

$$xS^{-1}(z_\ell) = S^{-1}(z_1 + z_2 + \cdots + z_s + w_1 + \cdots + w_t + \cdots + w_r) \quad (4.1)$$

ou

$$yS^{-1}(z_\ell^{'}) = S^{-1}(z_1^{'} + z_2^{'} + \cdots + z_s^{'} + w_1^{'} + \cdots + w_{t^{'}}^{'} + \cdots + w_r^{'}). \quad (4.2)$$

Demonstração: Pela Proposição 4.2.1, $S^{-1}(M_1)$ e $S^{-1}(M_2)$ não são $A_{i,n}(\lambda)$-submódulos de M.

Primeiramente, suponhamos por absurdo que, para todo $z \in M_{\chi_{\imath_\ell}}$, $xS^{-1}(z) \in S^{-1}(M_1)$ e $yS^{-1}(z) \in S^{-1}(M_1)$, para qualquer $1 \leq \ell \leq s$. Mostremos que $S^{-1}(M_1)$ é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo de M.

De fato, seja $\upsilon \in S^{-1}(M_1)$. Então $\upsilon = S^{-1}(z)$, para algum $z \in M_1$ e portanto, $\upsilon = S^{-1}(\sum_{t=1}^{s} z_t)$, em que cada $z_t \in M_{\chi_{\imath_t}}$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} x\upsilon & = & x(S^{-1}(\sum_{t=1}^{s} z_t)) \\ & = & x(\sum_{t=1}^{s} S^{-1}(z_t)) \\ & = & \sum_{t=1}^{s} xS^{-1}(z_t), \end{array}$$

a última igualdade vale, pois cada $S^{-1}(z_t) \in M$ e M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo. Pelo que afirmamos acima, cada $xS^{-1}(z_t) \in S^{-1}(M_1)$ e sendo este um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo, segue que $x\upsilon = \sum_{t=1}^{s} xS^{-1}(z_t) \in S^{-1}(M_1)$.

O mesmo raciocínio mostra que $y\upsilon \in S^{-1}(M_1)$, para todo $\upsilon \in S^{-1}(M_1)$. Dessa forma, $S^{-1}(M_1)$ é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo de M e isso é um absurdo.

Logo, existem $z_\ell, z_\ell^{'} \in M_{\chi_{\imath_\ell}}$, para algum $\ell \in \{1,2,\cdots,s\}$, tais que $xS^{-1}(z_\ell) \notin S^{-1}(M_1)$ ou $yS^{-1}(z_\ell^{'}) \notin S^{-1}(M_1)$.

Consideremos que $xS^{-1}(z_\ell) \notin S^{-1}(M_1)$ e assim, $xS^{-1}(z_\ell) \neq 0$. Então $0 \neq S(xS^{-1}(z_\ell)) \in M_1 \oplus M_2$ e portanto, existem $z_u \in M_{\chi_{\imath_u}}$ para $u \in \{1,2,\cdots,s\}$ e $w_k \in M_{\rho_{l_k}}$ para $k \in \{1,2,\cdots,r\}$ tais que $0 \neq S(xS^{-1}(z_\ell)) = z_1 + z_2 + \cdots + z_s + w_1 + w_2 + \cdots + w_r$. Afirmamos que existe pelo menos um $t \in \{1,2,\cdots,r\}$ tal que $w_t \neq 0$.

De fato, se $w_k = 0$, para todo $k \in \{1,2,\cdots,r\}$, então $S(xS^{-1}(z_\ell)) = z_1 + z_2 + \cdots + z_s$ e dessa forma, $xS^{-1}(z_\ell) = S^{-1}(z_1 + z_2 + \cdots + z_s) \in S^{-1}(M_1)$, o que é absurdo. Mesmo raciocínio para a possibilidade $yS^{-1}(z_\ell^{'}) \notin S^{-1}(M_1)$. Assim, ocorrem as igualdades (4.1) e (4.2) tal como no enunciado do lema. ■

Teorema 4.3.2 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $\imath_\jmath \in \{1,2,3,4\}$, $1 \leq l_k \leq n-1$ e $r, s \geq 1$. Então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.*

Demonstração: Suponhamos que M seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Denotamos por $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to \oplus_{\jmath=1}^{s} M_{\chi_{\imath_\jmath}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado.

Pelo lema acima, existem $z, z^{'} \in M_{\chi_{\imath_\ell}}$, para algum $\ell \in \{1, 2, \cdots, s\}$, tais que

$$xS^{-1}(z) = S^{-1}(z_1 + z_2 + \cdots + z_s + w_1 + \cdots + w_t + \cdots + w_r)$$

ou

$$yS^{-1}(z^{'}) = S^{-1}(z_1^{'} + z_2^{'} + \cdots + z_s^{'} + w_1^{'} + \cdots + w_{t'}^{'} + \cdots + w_r^{'}),$$

com $w_t, w_{t'}^{'}$ não-nulos, para alguns $t, t^{'} \in \{1, 2, \cdots, r\}$. Consideremos a primeira possibilidade e observemos que

$$\begin{aligned} hxS^{-1}(z) &= hS^{-1}(z_1 + \cdots + z_s + w_1 + \cdots + w_t + \cdots + w_r) \\ &= S^{-1}(hz_1 + \cdots + hz_s + hw_1 + \cdots + hw_t + \cdots + hw_r) \\ &= S^{-1}\Bigg((-1)^{\alpha_1} z_1 + \cdots + (-1)^{\alpha_s} z_s + \begin{pmatrix} \omega^{l_1} w_{1_1} \\ \omega^{-l_1} w_{1_2} \end{pmatrix} \\ &\qquad + \cdots + \begin{pmatrix} \omega^{l_t} w_{t_1} \\ \omega^{-l_t} w_{t_2} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \omega^{l_r} w_{r_1} \\ \omega^{-l_r} w_{r_2} \end{pmatrix}\Bigg), \end{aligned}$$

em que $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in \{0, 1\}$ e cada $w_k = \begin{pmatrix} w_{k_1} \\ w_{k_2} \end{pmatrix}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} -xhS^{-1}(z) &= -xS^{-1}(hz) \\ &= -xS^{-1}((-1)^{\alpha_\ell} z) \\ &= -(-1)^{\alpha_\ell} xS^{-1}(z) \\ &= -(-1)^{\alpha_\ell} S^{-1}(z_1 + \cdots + z_s + w_1 + \cdots + w_k + \cdots + w_r) \\ &= S^{-1}((-1)^{\alpha_\ell + 1}(z_1 + \cdots + z_s + w_1 + \cdots + w_k + \cdots + w_r)), \end{aligned}$$

em que $\alpha_\ell \in \{0, 1\}$.

Como $hx = -xh$, pelo fato de S ser um isomorfismo e termos uma soma direta, obtemos a seguinte igualdade na posição t

$$\begin{pmatrix} \omega^{l_t} w_{t_1} \\ \omega^{-l_t} w_{t_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{\alpha_\ell + 1} w_{t_1} \\ (-1)^{\alpha_\ell + 1} w_{t_2} \end{pmatrix}.$$

Como $w_t = \begin{pmatrix} w_{t_1} \\ w_{t_2} \end{pmatrix} \neq 0$, temos $w_{t_1} \neq 0$ ou $w_{t_2} \neq 0$. Se $w_{t_1} \neq 0$ então $\omega^{l_t} = 1$ ou $\omega^{l_t} = -1$ e isso contradiz o fato de que ω é uma raiz m-ésima primitiva da unidade uma vez que $1 \leq l_t < n$. Se $w_{t_2} \neq 0$ então $\omega^{-l_t} = 1$ ou $\omega^{-l_t} = -1$ e temos a mesma contradição.

Se for considerada a outra possibilidade, isto é, $yS^{-1}(z^{'}) = S^{-1}(z_1^{'} + z_2^{'} + \cdots + z_s^{'} + w_1^{'} + \cdots + w_{t^{'}}^{'} + \cdots + w_r^{'})$ e a relação $hy = -yh$, chegamos às mesmas contradições. Portanto, M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples. ■

4.4 $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$

Nesta seção, estudamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, em que $1 \leq l_k \leq n-1$ e $r \geq 2$. Nos Teoremas 4.1.5 e 4.1.10 mostramos que as representações ρ_l podem ser estendidas para representações de $A_{i,n}(\lambda)$ se, e somente se, $\omega^{2li} = 1$ ou $l = \frac{n}{2}$. Tendo esse resultado em mente, consideramos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M divididos nos seguintes casos:

(i) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$ e $\omega^{2l_k i} = 1$, para todo $1 \leq k \leq r$;

(ii) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$ e $l_k = \frac{n}{2}$, para todo $1 \leq k \leq r$;

(iii) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$, em que $r, s \geq 1$ e $\omega^{2l_k i} = 1$, para todo $1 \leq k \leq r$;

(iv) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}}$, em que $r, s \geq 1$, $[\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}]$ e $[\omega^{2l_k i} = 1$ ou $l_k = \frac{n}{2}]$, para quaisquer $1 \leq j \leq r$ e $1 \leq k \leq s$;

(v) $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$ e $[\omega^{2l_k i} \neq 1$ e $l_k \neq \frac{n}{2}]$, para todo $1 \leq k \leq r$.

4.4.1 Caso (i)

Iniciamos mostrando que se $r = 2$ então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples, isto é, mostramos que se (M, T) é uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$, em que $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq n-1$ e $\omega^{2l_1 i} = 1 = \omega^{2l_2 i}$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

O fato de que $\omega^{2l_1 i} = 1 = \omega^{2l_2 i}$ nos diz que l_1, l_2 são ambos distintos de $\frac{n}{2}$, pois caso contrário teríamos que $\omega^{ni} = 1$, absurdo, visto que $\omega^{ni} = -1$.

Como $M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$ possui dimensão 4 e, como espaços vetoriais, $M_{\rho_{l_1}}$ e $M_{\rho_{l_2}}$ são isomorfos a $\Bbbk^2$, o conjunto

$$\alpha = \{m_1 = (v_1, 0), m_2 = (v_2, 0), m_3 = (0, v_1), m_4 = (0, v_2)\}$$

é uma base para o mesmo, em que $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base qualquer fixada de $\Bbbk^2$, como na Subseção 1.2.1. Além disso, tenhamos em mente as igualdades (1.1) e (1.2).

Por ser S um isomorfismo, $\alpha' = \{S^{-1}(m_1), S^{-1}(m_2), S^{-1}(m_3), S^{-1}(m_4)\}$ é uma base de $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} = M$ como espaços vetoriais.

Teorema 4.4.1 *Seja (M, T) uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$, em que $1 \leq l_1 \leq l_2 \leq n-1$. Se $\omega^{2l_1 i} = 1 = \omega^{2l_2 i}$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.*

Demonstração: Denotamos por $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado. Pela Proposição 1.2.15, $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}(M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m})$ e $\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2} : \Bbbk\mathbb{D}_m \to \mathrm{End}_\Bbbk(M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}})$ são equivalentes, ou seja,

$$ST|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}(r) = (\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(r)S,$$

equivalentemente,

$$T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}(r) \overset{(*)}{=} S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(r)S,$$

para todo $r \in \Bbbk\mathbb{D}_m$. Para facilitar a escrita, escrevemos $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ simplesmente como T.

Observemos que a matriz de $S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S$ em relação à base α' é

$$[T(h)]_{\alpha'} = [S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} \end{pmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S)(S^{-1}(m_1)) &= S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)(v_1, 0) \\
&= S^{-1}(\rho_{l_1}(h)(v_1), \rho_{l_2}(h)(0)) \\
&\overset{(1.2)}{=} S^{-1}(\omega^{l_1} v_1, 0) \\
&= \omega^{l_1} S^{-1}(v_1, 0) \\
&= \omega^{l_1} S^{-1}(m_1).
\end{aligned}$$

Analogamente mostramos que

$$(S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S)(S^{-1}(m_2)) = \omega^{-l_1} S^{-1}(m_2),$$

$$(S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S)(S^{-1}(m_3)) = \omega^{l_2} S^{-1}(m_3)$$

e

$$(S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S)(S^{-1}(m_4)) = \omega^{-l_2} S^{-1}(m_4).$$

Como $hx = -xh$ e sendo T uma representação, segue que $T(h)T(x) = -T(x)T(h)$ e usando a igualdade $(*)$, podemos escrever

$$S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)ST(x) = -T(x)S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S.$$

Deste modo, na base α', temos

$$[S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S]_{\alpha'}[T(x)]_{\alpha'} = -[T(x)]_{\alpha'}[S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)S]_{\alpha'},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} =$$

$$- \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} \end{pmatrix}.$$

Útil lembrarmos que a característica do corpo é zero, a igualdade acima implica que $\omega^{l_1} a_{11} = -a_{11}\omega^{l_1}$, ou seja, $a_{11} = 0$. Analogamente, $a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$.

De $\omega^{l_1} a_{13} = -a_{13}\omega^{l_2}$, segue que $(\omega^{l_2-l_1}+1)a_{13} = 0$ e então $\omega^{l_2-l_1} + 1 = 0$ ou $a_{13} = 0$. Se $\omega^{l_2-l_1}+1 = 0$ então $\omega^{l_2-l_1} = -1$ e $l_2-l_1 < n$ e isso contradiz o fato de que n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n = -1$. Logo, $a_{13} = 0$. De modo análogo, $a_{24} = a_{31} = a_{42} = 0$.

Ainda, de $\omega^{l_1} a_{12} = -a_{12}\omega^{-l_1}$, segue que $(\omega^{2l_1} + 1)a_{12} = 0$. Se $\omega^{2l_1} + 1 = 0$ então $\omega^{2l_1} = -1$ e consequentemente $\omega^{2l_1 i} = (-1)^i = -1$ (i é ímpar), o que é uma contadição, pois pela hipótese, $\omega^{2l_1 i} = 1$. Portanto, $a_{12} = 0$. De forma análoga, $a_{21} = a_{34} = a_{43} = 0$. Portanto,

$$[T(x)]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da relação $y = gxg$, segue que $T(y) = T(g)T(x)T(g)$ e por $(*)$ temos que

$$T(y) = S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(g)ST(x)S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(g)S.$$

Usando a igualdade (1.1), a matriz de $S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(g)S$ na base α' é

$$[T(g)]_{\alpha'} = [S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(g)S]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e portanto,

$$[T(y)]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando T à relação $x^2 = \lambda(1 - h^{2i})$ obtemos

$$([T(x)]_{\alpha'})^2 = \begin{pmatrix} \lambda(1-\omega^{2l_1i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_1i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{2l_2i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2i}) \end{pmatrix}$$

e como $\omega^{2l_1i} = 1 = \omega^{2l_2i}$, então obviamente $([T(x)]_{\alpha'})^2 \overset{(**)}{=} 0$.

A relação $xy + yx = 0$ implica que

$$[T(x)]_{\alpha'}[T(y)]_{\alpha'} + [T(y)]_{\alpha'}[T(x)]_{\alpha'} \overset{(***)}{=} 0.$$

Das igualdades $(**)$ e de $(***)$, temos o sistema

$$\begin{cases} a_{14}a_{41} = 0 \\ a_{23}a_{32} = 0 \\ a_{14}a_{32} + a_{23}a_{41} = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Naturalmente que a solução nula satisfaz o sistema. Nesse caso, $T(x) = 0 = T(y)$ e consequentemente M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

De fato, consideramos o $\Bbbk$-subespaço não trivial V de M

$$V = < S^{-1}(m_1), S^{-1}(m_2) > .$$

Seja $v \in V$. Então $v = t_1 S^{-1}(m_1) + t_2 S^{-1}(m_2)$, em que $t_1, t_2 \in \Bbbk$.
Logo, $[v]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e assim,

$$[T(g)(v)]_{\alpha'} = [T(g)]_{\alpha'}[v]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 \\ t_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $gv = T(g)(v) = t_2 S^{-1}(m_1) + t_1 S^{-1}(m_2) \in V$. Também,

$$\begin{aligned} [T(h)(v)]_{\alpha'} = [T(h)]_{\alpha'}[v]_{\alpha'} &= \begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega^{l_1} t_1 \\ \omega^{-l_1} t_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

isto é, $hv = T(h)(v) = \omega^{l_1} t_1 S^{-1}(m_1) + \omega^{-l_1} t_2 S^{-1}(m_2) \in V$.

Como $T(y)(v) = 0 = T(x)(v)$, segue que $yv = xv = 0 \in V$ e dessa forma, V é fechado para as ações dos geradores de $A_{i,n}(\lambda)$. Logo, V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M e portanto, M não é simples como $A_{i,n}(\lambda)$-módulo.

Agora, analisamos as soluções não-nulas do sistema (4.3). Vejamos que em todos os casos possíveis descritos abaixo, M não é simples como $A_{i,n}(\lambda)$-módulo.

A primeira equação desse sistema nos diz que $a_{14} = 0$ ou $a_{41} = 0$.
Caso 1: Se $a_{14} \neq 0$ então necessariamente $a_{41} = 0$ e pela terceira equação do sistema, temos que $a_{32} = 0$. Concluindo, se $a_{14} \neq 0$ então $a_{41} = 0 = a_{32}$ e a_{23} pode ser zero ou não. De maneira análoga seguem os outros casos.
Caso 2: Se $a_{41} \neq 0$ então $a_{14} = 0 = a_{23}$ e a_{32} pode ser zero ou não.

Observando a segunda equação de (4.3), temos que $a_{23} = 0$ ou $a_{32} = 0$.
Caso 3: Se $a_{23} \neq 0$ então $a_{32} = 0 = a_{41}$ e a_{14} pode ser zero ou não.
Caso 4: Se $a_{32} \neq 0$ então $a_{23} = 0 = a_{14}$ e a_{41} pode ser zero ou não.

Analisemos o Caso 1, ou seja, $a_{14} \neq 0$, $a_{41} = 0 = a_{32}$ e a_{23} pode ser zero ou não. Sob essas hipóteses, temos o seguinte

$$[T(x)]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } [T(y)]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando o mesmo espaço V dado acima e, para cada $v \in V$, $[v]_{\alpha'}$ é também como acima, temos que $[T(x)(v)]_{\alpha'} = [T(x)]_{\alpha'}[v]_{\alpha'} = 0$. Logo, $T(x)(v) = 0$. Claramente, $T(y)(v) = 0$. Logo, V é fechado para as ações de x e de y e como já vimos acima é também fechado para as de g e de h. Logo, V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M.

Para o Caso 2, temos que

$$[T(x)]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } [T(y)]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{41} & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

O subespaço $W =< S^{-1}(m_3), S^{-1}(m_4) >$ é fechado para as ações dos geradores de $A_{i,n}(\lambda)$. De fato, seja $w \in W$. Então $[w]_{\alpha'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}$ e é de vericação análoga que $gw = T(g)(v) = t_2' S^{-1}(m_3) + t_1' S^{-1}(m_4) \in W$, $hw = T(h)(w) = \omega^{l_2} t_1' S^{-1}(m_3) + \omega^{-l_2} t_2' S^{-1}(m_4) \in W$. As duas matrizes acima nos dão que $T(y)(w) = 0 = T(x)(w)$, segue que $yw = xw = 0 \in W$. Portanto, W é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M.

Os Casos 3 e 4 são inteiramente análogos aos Casos 1 e 2, respectivamente. Portanto, todos os casos de soluções não-nulas do sistema (4.3) nos dão que M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples. ■

Neste momento, achamos interessante relembrar o comentário feito na Subseção 1.2.2, ou seja, estamos considerando $\beta = \{v_1, v_2\}$ como base dos $M_{\rho_l}{}'s$, para todo $1 \leq l \leq n-1$, sendo a diferença entre os $M_{\rho_l}{}'s$, como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, dada pela ação na igualdade (1.2). Usamos esse fato a seguir.

Lema 4.4.2 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, $r \geq 2$ e $1 \leq l_k \leq n-1$, seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos. Então são válidas as afirmações.*

(i) *Para todo* $1 \leq j \leq r$, *o* $\Bbbk\mathbb{D}_m$- *módulo* $S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$ *com base* β *é tal que* $xS^{-1}(v_1) \notin S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$ *ou* $xS^{-1}(v_2) \notin S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$.
(ii) *O* $\Bbbk\mathbb{D}_m$- *módulo* $S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$ *é tal que*

$$xS^{-1}(v_1) = S^{-1}(u_1 + \cdots + u_r),$$

em que cada $u_k \in M_{\rho_{l_k}}$ *e* $u_\ell \neq 0$, *para algum* $\ell \neq j$ *ou*

$$xS^{-1}(v_2) = S^{-1}(w_1 + \cdots + w_r),$$

em que cada $w_k \in M_{\rho_{l_k}}$ *e* $w_t \neq 0$, *para algum* $t \neq j$.

Demonstração: (i) Chamamos $V = S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$ e suponhamos que $xS^{-1}(v_1)$ e $xS^{-1}(v_2)$ estejam ambos em V.

Seja $v \in V$. Então $v = S^{-1}(av_1 + bv_2)$ para alguns $a, b \in \Bbbk$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} xv & = & xS^{-1}(av_1 + bv_2) \\ & = & axS^{-1}(v_1) + bxS^{-1}(v_2) \in V, \end{array}$$

isto é, V é fechado para a ação de x. Como $y = gxg$, não é difícil ver que V é também fechado para a ação de y. Concluímos que V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M, contrariando a Proposição 4.2.1. Portanto, o $\Bbbk\mathbb{D}_m$- módulo $S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$ é tal que $xS^{-1}(v_1) \notin S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$ ou $xS^{-1}(v_2) \notin S^{-1}(M_{\rho_{l_j}})$.

(ii) Por (i), $xS^{-1}(v_1) \neq 0$ ou $xS^{-1}(v_2) \neq 0$ e a prova segue análoga à prova do Corolário 4.2.2. ■

Teorema 4.4.3 *Seja* M *um* $A_{i,n}(\lambda)$-*módulo tal que* $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^r M_{\rho_{l_k}}$, $r \geq 2$. *Se* $\omega^{2l_k i} = 1$, *para cada* $1 \leq k \leq r$, *então* M *é um* $A_{i,n}(\lambda)$-*módulo que não é simples.*

Demonstração: Sejam $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to \oplus_{j=1}^r M_{\rho_{l_j}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado e $\beta = \{v_1, v_2\}$ uma base para o $\Bbbk$-espaço vetorial $M_{\rho_{l_1}}$.

Se $r = 2$ então o resultado segue diretamente do Teorema 4.4.1. Seja $r \geq 3$ e suponhamos que M seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Pelo lema anterior, temos que

$$xS^{-1}(v_1) = S^{-1}(u_1 + \cdots + u_j + \cdots + u_r)$$

e $u_j \neq 0$, para algum $j \in \{2, \cdots, r\}$. Consideramos o $\Bbbk$-espaço vetorial

$$V =< xS^{-1}(v_1), yS^{-1}(v_2), xyS^{-1}(v_1), xyS^{-1}(v_2) > .$$

Como $u_j \neq 0$ e S é um isomorfismo, segue que $xS^{-1}(v_1) \neq 0$. Logo, $1 \leq \dim_{\Bbbk} V \leq 4$ e $\dim_{\Bbbk} M \geq 6$ e assim, V é um subespaço não trivial de M. Mostremos que V é fechado para as ações de g, h, x e y.

Usando que S é um morfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, as relações que definem a álgebra $A_{i,n}(\lambda)$ e as igualdades (1.1) e (1.2), temos

$$\begin{aligned} gxS^{-1}(v_1) &= ygS^{-1}(v_1) \\ &= yS^{-1}(gv_1) \\ &= yS^{-1}(v_2) \in V \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} gxyS^{-1}(v_1) &= yxgS^{-1}(v_1) \\ &= yxS^{-1}(gv_1) \\ &= yxS^{-1}(v_2) \\ &= -xyS^{-1}(v_2) \in V. \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $gyS^{-1}(v_2) \in V$ e $gxyS^{-1}(v_2) \in V$. Agora, vejamos a ação de h nos geradores de V. Temos

$$\begin{aligned} hxS^{-1}(v_1) &= -xhS^{-1}(v_1) \\ &= -xS^{-1}(hv_1) \\ &= -xS^{-1}(\omega^{l_1} v_1) \\ &= -\omega^{l_1} xS^{-1}(v_1) \in V \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} hxyS^{-1}(v_1) &= xyhS^{-1}(v_1) \\ &= xyS^{-1}(hv_1) \\ &= xyS^{-1}(\omega^{l_1} v_1) \\ &= \omega^{l_1} xyS^{-1}(v_1) \in V. \end{aligned}$$

Analogamente, $hyS^{-1}(v_2) \in V$ e $hxyS^{-1}(v_2) \in V$. Finalmente, usando que $\omega^{2l_1 i} = 1$, temos

$$\begin{aligned} xxS^{-1}(v_1) &= \lambda(1 - h^{2i})S^{-1}(v_1) \\ &= \lambda S^{-1}((1 - h^{2i})v_1) \\ &= \lambda S^{-1}((1 - \omega^{2l_1 i})v_1) \\ &= \lambda S^{-1}(0) = 0 \in V, \end{aligned}$$

$$xyS^{-1}(v_2) \in V,$$

$$xxyS^{-1}(v_1) = yx^2 S^{-1}(v_1) = 0 \in V$$

e

$$\begin{aligned} xxyS^{-1}(v_2) &= yx^2 S^{-1}(v_2) \\ &= y\lambda(1 - h^{2i})S^{-1}(v_2) \\ &= yS^{-1}(\lambda(1 - h^{2i})v_2) \\ &= yS^{-1}(\lambda(1 - \omega^{-2l_1 i})v_2) \\ &= yS^{-1}(0) = 0 \in V. \end{aligned}$$

Logo, V é fechado para as ações de g, h e x. Como $y = gxg$, segue que V é fechado pela ação de y. Concluímos que V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M. Isso contradiz a suposição inicial de que M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Portanto, M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Se supusermos que $xS^{-1}(v_2) = S^{-1}(w_1 + \cdots + w_t + \cdots + w_r)$ e $w_t \neq 0$, para algum $t \in \{2, \cdots, r\}$, então considerando

$$V =< xS^{-1}(v_2), yS^{-1}(v_1), xyS^{-1}(v_1), xyS^{-1}(v_2) >$$

a demonstração segue de forma similar. ∎

4.4.2 Caso (ii)

Nesta subseção estudamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, em que $l_k = \frac{n}{2}$, para cada $1 \leq k \leq r$, $r \geq 5$. Provamos que M nas condições citadas não é simples.

A ideia aqui é construirmos um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M, da mesma forma que fizemos no último teorema da seção anterior. Porém, neste caso, $x^2S^{-1}(v_1) = 2\lambda S^{-1}(v_1) \neq 0$ e $y^2S^{-1}(v_2) = 2\lambda S^{-1}(v_2) \neq 0$ e torna-se necessário adicionar os elementos $S^{-1}(v_1)$, $S^{-1}(v_2)$, $yS^{-1}(v_1)$ e $xS^{-1}(v_2)$ para gerar um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M. O $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo considerado pode ter dimensão 8 e, por este motivo, colocamos a restrição $r \geq 5$ no teorema a seguir.

Teorema 4.4.4 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{k=1}^{r} M_{\rho_{l_k}}$, em que $l_k = \frac{n}{2}$, para cada $1 \leq k \leq r$, $r \geq 5$. Então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.*

Demonstração: Sejam $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado e $\beta = \{v_1, v_2\}$ a base de $M_{\rho_{l_1}}$ já citada anteriormente.

Consideramos o $\Bbbk$-subespaço V de M, descrito a seguir

$$V =< S^{-1}(v_1), S^{-1}(v_2), xS^{-1}(v_1), xS^{-1}(v_2), yS^{-1}(v_1),$$
$$yS^{-1}(v_2), xyS^{-1}(v_1), xyS^{-1}(v_2) > .$$

Notemos que $V \neq 0$, pois $v_1 \neq 0$ e S é um isomorfismo. Como $1 \leq \dim_{\Bbbk} V \leq 8$ e $\dim_{\Bbbk} M \geq 10$, segue que V é um subespaço não trivial de M. Usando as relações que definem a álgebra $A_{i,n}(\lambda)$, temos

$$\begin{aligned} gS^{-1}(v_1) &= S^{-1}(gv_1) \\ &= S^{-1}(v_2) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gxS^{-1}(v_1) &= ygS^{-1}(v_1) \\ &= yS^{-1}(gv_1) \\ &= yS^{-1}(v_2) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gyS^{-1}(v_1) &= xgS^{-1}(v_1) \\ &= xS^{-1}(gv_1) \\ &= xS^{-1}(v_2) \in V \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} gxyS^{-1}(v_1) &= yxgS^{-1}(v_1) \\ &= yxS^{-1}(v_2) \\ &= -xyS^{-1}(v_2) \in V. \end{aligned}$$

Analogamente, $gS^{-1}(v_2), gxS^{-1}(xv_2), gyS^{-1}(v_2)$ e $gxyS^{-1}(v_2)$ pertencem a V. Ainda

$$\begin{aligned} hS^{-1}(v_1) &= S^{-1}(hv_1) \\ &= \omega^{\frac{n}{2}} S^{-1}(v_1) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hxS^{-1}(v_1) &= -xhS^{-1}(v_1) \\ &= -\omega^{\frac{n}{2}} xS^{-1}(v_1) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hyS^{-1}(v_1) &= -yhS^{-1}(v_1) \\ &= -\omega^{\frac{n}{2}} yS^{-1}(v_1) \in V \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} hxyS^{-1}(v_1) &= xyhS^{-1}(v_1) \\ &= \omega^{\frac{n}{2}} xyS^{-1}(v_1) \in V. \end{aligned}$$

De forma inteiramente análoga,

$$hS^{-1}(v_2), hxS^{-1}(v_2), hyS^{-1}(v_2) \text{ e } hxyS^{-1}(v_2) \in V.$$

Além disso, usando que $\omega^{ni} = -1$, segue que

$$\begin{aligned} xxS^{-1}(v_1) &= \lambda(1 - h^{2i})S^{-1}(v_1) \\ &= \lambda S^{-1}((1 - h^{2i})v_1) \\ &= \lambda S^{-1}((1 - \omega^{ni})v_1) \\ &= 2\lambda S^{-1}(v_1) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xxS^{-1}(v_2) &= \lambda(1 - h^{2i})S^{-1}(v_2) \\ &= \lambda S^{-1}((1 - h^{2i})v_2) \\ &= \lambda S^{-1}((1 - \omega^{-ni})v_2) \\ &= 2\lambda S^{-1}(v_2) \in V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xxyS^{-1}(v_1) &= yx^2S^{-1}(v_1) \\ &= y\lambda(1-h^{2i})S^{-1}(v_1) \\ &= \lambda yS^{-1}((1-h^{2i})v_1) \\ &= \lambda yS^{-1}((1-\omega^{ni})v_1) \\ &= 2\lambda yS^{-1}(v_1) \in V \end{aligned}$$

e

$$xxyS^{-1}(v_2) = 2\lambda yS^{-1}(v_2) \in V.$$

Logo, V é fechado para as ações de g, h e x. Como $y = gxg$, segue que V é fechado também pela ação de y. Portanto, V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M e consequentemente, M não é simples como $A_{i,n}(\lambda)$-módulo. ■

4.4.3 Caso (iii)

Nesta subseção fazemos uma mescla, isto é, consideramos M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}}$, em que $M_{\rho_{l_k}} = M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$, para todo $1 \leq k \leq s$, $r, s \geq 1$ e $\omega^{2l_j i} = 1$, para cada $1 \leq j \leq r$. Neste caso, M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Teorema 4.4.5 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_j}} \oplus M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ como $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos e que $\omega^{2l_j i} = 1$, para $1 \leq j \leq r$ fixado. Então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.*

Demonstração: Suponhamos que M não seja simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo.

Sejam $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to M_{\rho_{l_j}} \oplus M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado e $\beta = \{v_1, v_2\}$ a base para os $M_{\rho_l}{}'s$, para todo $1 \leq l \leq n-1$, como já dito anteriormente.

Pelo Lema 4.4.2, podemos supor que $xS^{-1}(v_1) = S^{-1}(u_1 + u_2)$ em que $u_1 \in M_{\rho_{l_j}}$ e $0 \neq u_2 \in M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$. Notemos que

$$\begin{aligned} hxS^{-1}(v_1) &= hS^{-1}(u_1+u_2) \\ &= S^{-1}(hu_1 + hu_2) \\ &= S^{-1}\left(\begin{pmatrix} \omega^{l_j} & 0 \\ 0 & \omega^{-l_j} \end{pmatrix}[u_1]_\beta + \begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}} \end{pmatrix}[u_2]_\beta\right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
-xhS^{-1}(v_1) &= -xS^{-1}(hv_1)\\
&= -xS^{-1}(\omega^{l_j}v_1)\\
&= -\omega^{l_j}xS^{-1}(v_1)\\
&= -\omega^{l_j}S^{-1}(u_1+u_2)\\
&= S^{-1}(-\omega^{l_j}u_1-\omega^{l_j}u_2).
\end{aligned}$$

Como $hx=-xh$ e S é um isomorfismo, obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{pmatrix} \omega^{l_j} & 0\\ 0 & \omega^{-l_j}\end{pmatrix}[u_1]_\beta+\begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0\\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}}\end{pmatrix}[u_2]_\beta=-\omega^{l_j}[u_1]_\beta-\omega^{l_j}[u_2]_\beta.$$

Escrevemos $[u_2]_\beta=\begin{pmatrix} u_{2_1}\\ u_{2_2}\end{pmatrix}$ e como $M_{\rho_{l_j}}\oplus M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ é uma soma direta, temos

$$\begin{pmatrix} \omega^{\frac{n}{2}} & 0\\ 0 & \omega^{-\frac{n}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{2_1}\\ u_{2_2}\end{pmatrix}=-\omega^{l_j}\begin{pmatrix} u_{2_1}\\ u_{2_2}\end{pmatrix}$$

e assim, $\omega^{\frac{n}{2}}u_{2_1}=-\omega^{l_j}u_{2_1}$ e $\omega^{-\frac{n}{2}}u_{2_2}=-\omega^{l_j}u_{2_2}$.

De $u_2\neq 0$, segue que $u_{2_1}\neq 0$ ou $u_{2_2}\neq 0$. Se $u_{2_1}\neq 0$ então $\omega^{l_j-\frac{n}{2}}=-1=\omega^{-l_j+\frac{n}{2}}$. Se $l_j>\frac{n}{2}$ então $1\leq l_j-\frac{n}{2}<n$ e isso contradiz o fato de que n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n=-1$. Se $l_j<\frac{n}{2}$ então $1\leq -l_j+\frac{n}{2}<n$ e obtemos a mesma contradição.

Se $u_{2_2}\neq 0$ então $\omega^{l_j+\frac{n}{2}}=-1$. Assim, $l_j+\frac{n}{2}=ns$, em que s é ímpar. Para $s=1$, obtemos $l_j=\frac{n}{2}$ e isso contradiz o fato de que $\omega^{2l_ji}=1$ pois, nesse caso, $\omega^{2l_ji}=\omega^{ni}=-1$, vide Observação 2.4.8. Valores de s que sejam maiores ou iguais do que 3 implicam em $l_j>m$, o que não é possível, pois $1\leq l_j\leq n-1$.

Se supusermos que $xS^{-1}(v_2)=S^{-1}(w_1+w_2)$, em que $w_1\in M_{\rho_{l_j}}$ e $0\neq w_2\in M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$, chegaremos ao mesmo absurdo. Logo, M não é simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo. ■

Para provarmos o caso geral, veja o resultado seguinte, é possível usarmos a ideia da demonstração do teorema anterior. No entanto, é mais rápido provarmos que M não é simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo, calculando um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial conveniente. A dimensão deste $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo é menor ou igual do que 4. Logo, a hipótese [$s\geq 2$ ou $r\geq 2$] é essencial para termos a dimensão de M maior ou igual do que 6.

Teorema 4.4.6 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que*

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}},$$

em que $M_{\rho_{l_k}} = M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$, para todo $1 \leq k \leq s$, $r, s \geq 1$, $[s \geq 2$ ou $r \geq 2]$ e $\omega^{2l_j i} = 1$, para cada $1 \leq j \leq r$, então M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples.

Demonstração: Suponhamos que M seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Denotamos por $S : M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \to \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{\frac{n}{2}}}$ o isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos dado no enunciado e consideramos a base $\beta = \{v_1, v_2\}$ para $M_{\rho_{l_1}}$. Pelo Lema 4.4.2, podemos supor que

$$xS^{-1}(v_1) = S^{-1}(u_1 + \cdots + u_j + \cdots + u_{r+s})$$

em que $u_j \neq 0$, para algum $j \in \{2, \cdots, r+s\}$.

Consideramos o $\Bbbk$-espaço vetorial

$$V = < xS^{-1}(v_1), yS^{-1}(v_2), xyS^{-1}(v_1), xyS^{-1}(v_2) > .$$

Como $u_j \neq 0$ e S é um isomorfismo, segue que $xS^{-1}(v_1) \neq 0$. Logo, $1 \leq \dim_{\Bbbk} V \leq 4$ e $\dim_{\Bbbk} M \geq 6$, donde V é um subespaço não trivial de M.

Usando que S é um morfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, as relações que definem a álgebra $A_{i,n}(\lambda)$, as igualdades (1.1) e (1.2) e o fato de que $\omega^{2l_1 i} = 1$ mostramos, exatamente da mesma forma que na demonstração do Teorema 4.4.3, que V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M. Isso contradiz a suposição inicial de que M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples.

Se supusermos que $xS^{-1}(v_2) = S^{-1}(w_1 + \cdots + w_t + \cdots + w_{r+s})$ em que $w_t \neq 0$, para algum $t \in \{2, \cdots, r+s\}$ e considerando

$$V = < xS^{-1}(v_2), yS^{-1}(v_1), xyS^{-1}(v_2), xyS^{-1}(v_1) >,$$

a demonstração segue de forma similar e chegamos a um mesmo absurdo. Portanto, M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo que não é simples. ∎

4.4.4 Caso (iv)

Nesse momento consideramos importante relembrar que temos três casos envolvendo os $l's$, ou seja, l pode ser tal que $w^{2li} = 1$ ou $l = \frac{n}{2}$ ou $[w^{2li} \neq 1 \;\text{ e }\; l \neq \frac{n}{2}]$. Nesta subseção, misturamos todos esses casos e provamos que, nestas circunstâncias, não temos $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples.

Escrevemos, para cada $1 \leq j \leq r$, $v_1 = v_1^j$ e $v_2 = v_2^j$, para dizer que estamos enxergando v_1 e v_2, os elementos da base β, ambos em $M_{\rho_{l_j}}$. Para o próximo lema chamamos $M_1 = \oplus_{j=1}^r M_{\rho_{l_j}}$ e $M_2 = \oplus_{k=1}^s M_{\rho_{l_k}}$.

Lema 4.4.7 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples tal que*

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} \oplus_{j=1}^r M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^s M_{\rho_{l_k}} = M_1 \oplus M_2$$

seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $r, s \geq 1$, $[\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}]$, para cada $1 \leq j \leq r$, e $[\omega^{2l_k i} = 1$ ou $l_k = \frac{n}{2}]$ se $1 \leq k \leq s$. Então são válidas as afirmações.
(i) *Existe $1 \leq p \leq r$ tal que $xS^{-1}(v_1^p) \notin S^{-1}(M_1)$ ou $xS^{-1}(v_2^p) \notin S^{-1}(M_1)$.*
(ii) *Além disso,*

$$xS^{-1}(v_1^p) = S^{-1}(\sum_{j=1}^r u_j + \sum_{k=1}^s w_k)$$

com $w_{s_0} \neq 0$, para algum $1 \leq s_0 \leq s$ ou

$$xS^{-1}(v_2^p) = S^{-1}(\sum_{j=1}^r u'_j + \sum_{k=1}^s w'_k)$$

com $w'_{s_1} \neq 0$, para algum $1 \leq s_1 \leq s$.

Demonstração: Suponhamos, para todo $1 \leq j \leq r$, que $xS^{-1}(v_1^j) \in S^{-1}(M_1)$ e que $xS^{-1}(v_2^j) \in S^{-1}(M_1)$. Isso implica que $S^{-1}(M_1)$ é fechado para a ação de x. De fato, seja $m \in M_1$. Então

$$m = \sum_{j=1}^r u_j = \sum_{j=1}^r a_j v_1^j + b_j v_2^j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} xS^{-1}(m) &= x\textstyle\sum_{j=1}^r S^{-1}(a_j v_1^j + b_j v_2^j) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^r a_j xS^{-1}(v_1^j) + b_j xS^{-1}(v_2^j) \in S^{-1}(M_1). \end{aligned}$$

Como $y = gxg$, segue que $S^{-1}(M_1)$ é também fechado para a ação de y. Logo, $S^{-1}(M_1)$ é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M, contradizendo a hipótese de que M é um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Portanto, segue (i).

(ii) Análoga à prova do Lema 4.3.1. ∎

Teorema 4.4.8 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que*

$$M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} \oplus_{j=1}^{r} M_{\rho_{l_j}} \bigoplus \oplus_{k=1}^{s} M_{\rho_{l_k}},$$

seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $r, s \geq 1$, $[\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}]$, para cada $1 \leq j \leq r$, e $[\omega^{2l_k i} = 1$ ou $l_k = \frac{n}{2}]$, para cada $1 \leq k \leq s$, então M não é simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo.

Demonstração: Suponhamos que M seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Pelo lema anterior, existe $1 \leq p \leq r$ tal que

$$xS^{-1}(v_1^p) = S^{-1}(\sum_{j=1}^{r} u_j + \sum_{k=1}^{s} w_k),$$

com $w_{s_0} \neq 0$, para algum $1 \leq s_0 \leq s$.

Notemos que

$$hxS^{-1}(v_1^p) = hS^{-1}(\sum_{j=1}^{r} u_j + \sum_{k=1}^{s} w_k)$$

$$= S^{-1}(\sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} \omega^{l_j} & 0 \\ 0 & \omega^{-l_j} \end{pmatrix} u_j + \sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} \omega^{l_k} & 0 \\ 0 & \omega^{-l_k} \end{pmatrix} w_k).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -xhS^{-1}(v_1^p) &= -xS^{-1}(hv_1^p) \\ &= -\omega^{l_p} xS^{-1}(v_1^p) \\ &= -\omega^{l_p} S^{-1}(\textstyle\sum_{j=1}^{r} u_j + \sum_{k=1}^{s} w_k) \\ &= S^{-1}(-\omega^{l_p}(\textstyle\sum_{j=1}^{r} u_j + \sum_{k=1}^{s} w_k)). \end{aligned}$$

Como $hx = -xh$ e pelo fato de que S é um isomorfismo, segue que

$$\sum_{j=1}^{r} \begin{pmatrix} \omega^{l_j} & 0 \\ 0 & \omega^{-l_j} \end{pmatrix} u_j + \sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} \omega^{l_k} & 0 \\ 0 & \omega^{-l_k} \end{pmatrix} w_k = -\omega^{l_p}(\sum_{j=1}^{r} u_j + \sum_{k=1}^{s} w_k).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $l_{s_0} > l_p$ e denotamos $[w_{s_0}]_\beta = \begin{pmatrix} w_{s_{0_1}} \\ w_{s_{0_2}} \end{pmatrix}$. Na posição s_0, temos a igualdade seguinte

$$-\omega^{l_p} \begin{pmatrix} w_{s_{0_1}} \\ w_{s_{0_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{l_{s_0}} w_{s_{0_1}} \\ \omega^{-l_{s_0}} w_{s_{0_2}} \end{pmatrix}.$$

Da primeira coordenada temos $(\omega^{l_{s_0}-l_p}+1)w_{s_{0_1}}=0$. Consequentemente, $\omega^{l_{s_0}-l_p}+1=0$ ou $w_{s_{0_1}}=0$. Se $\omega^{l_{s_0}-l_p}+1=0$ então $\omega^{l_{s_0}-l_p}=-1$ e $l_{s_0}-l_p<n$. Todavia, n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n=-1$. Logo, $\omega^{l_{s_0}-l_p}+1\neq 0$ e assim, $w_{s_{0_1}}=0$.

Como $w_{s_0}\neq 0$ e $w_{s_{0_1}}=0$, segue que $w_{s_{0_2}}\neq 0$. Deste modo, de

$$-\omega^{l_p}w_{s_{0_2}}=\omega^{-l_{s_0}}w_{s_{0_2}},$$

segue que $-\omega^{l_p}=\omega^{-l_{s_0}}$. Logo,

$$\omega^{2l_p}=\omega^{-2l_{s_0}} \text{ e } \omega^{2l_pi}=\omega^{-2l_{s_0}i}.$$

Por hipótese, $l_{s_0}=\frac{n}{2}$ ou $\omega^{2l_{s_0}i}=1$. Se $l_{s_0}=\frac{n}{2}$ então $\omega^{2l_p}=\omega^{-2l_{s_0}}=-1$ e daí, $l_p=\frac{n}{2}$ (veja Lema 4.1.4), contradizendo o fato de que $l_p\neq\frac{n}{2}$. Se $\omega^{2l_{s_0}i}=1$ então $\omega^{2l_pi}=\omega^{-2l_{s_0}i}=1$, contradizendo o fato de que $\omega^{2l_pi}\neq 1$.

Portanto, M não é simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo. ■

4.4.5 Caso (v)

Nessa subseção, escrevemos algumas contribuições sobre os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos M tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\simeq\oplus_{j=1}^{r}M_{\rho_{l_j}}$, em que $\omega^{2l_ji}\neq 1$ e $l_j\neq\frac{n}{2}$, para todo $1\leq j\leq r$.

Iniciamos mostrando que se $r\geq 5$ então M não é simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo.

Teorema 4.4.9 *Seja M um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}\overset{S}{\simeq}M_{\rho_{l_1}}\oplus\cdots\oplus M_{\rho_{l_r}}, r\geq 5$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos. Se $\omega^{2l_ji}\neq 1$ e $l_j\neq\frac{n}{2}$, para cada $j\in\{1,\cdots,r\}$, então M não é simples como um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo.*

Demonstração: Consideremos o $\Bbbk$-subespaço V de M, descrito a seguir

$$V=<S^{-1}(v_1),S^{-1}(v_2),xS^{-1}(v_1),xS^{-1}(v_2),yS^{-1}(v_1),\\ yS^{-1}(v_2),xyS^{-1}(v_1),xyS^{-1}(v_2)>.$$

Claramente V é não trivial, pois $2\leq\dim_{\Bbbk}V\leq 8$ e $\dim_{\Bbbk}M\geq 10$, pois $r\geq 5$. De modo análogo ao que fizemos na demonstração do Teorema 4.4.4, segue que V é um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial de M. Portanto, M não é simples com um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo. ■

Na sequência analisamos o caso $r=2$. Observamos que o raciocínio do teorema anterior não se aplica a esse caso particular, pois

$2 \leq \dim_{\Bbbk} V \leq 8$ naquele teorema, enquanto que a dimensão de M quando $r = 2$ é 4.

Como na Subseção 4.4.1, consideramos $\alpha = \{m_1 = (v_1, 0), m_2 = (v_2, 0), m_3 = (0, v_1), m_4 = (0, v_2)\}$ a base de $M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$ e $\alpha' = \{S^{-1}(m_1), S^{-1}(m_2), S^{-1}(m_3),\ S^{-1}(m_4)\}$ base de M. No que segue, denotamos $A = [T(x)]_{\alpha'}$ e $B = [T(y)]_{\alpha'}$, as matrizes de $T(x)$ e de $T(y)$ em relação à base α', respectivamente.

Proposição 4.4.10 *Não existe uma representação (M, T) de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, em que $\omega^{2l_j i} \neq 1$, $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1, 2\}$ e $l_1 + l_2 \neq n$.*

Demonstração: Suponhamos que exista tal representação. Pela Proposição 1.2.15, $T|_{\Bbbk\mathbb{D}_m}$ e $\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2}$ são equivalentes, ou seja,

$$ST(r) \overset{(*)}{=} (\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(r)S,$$

para todo $r \in \Bbbk\mathbb{D}_m$.

De modo análogo ao que fizemos na demonstração do Teorema 4.4.1, usando a relação $hx = -xh$ e a igualdade $(*)$, temos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esclarecemos como obtivemos essa matriz, usando a prova do teorema citado acima e as hipóteses da proposição em questão.

Chegamos que $a_{12} = a_{21} = a_{34} = a_{43} = 0$ pois, por exemplo, $(\omega^{2l_1} + 1)a_{12} = 0$. Assim, se $\omega^{2l_1} + 1 = 0$, ou seja, $\omega^{2l_1} = -1$ então, pelo Lema 4.1.4, $l_1 = \frac{n}{2}$ o que é absurdo, pois por hipótese, $l_1, l_2 \neq \frac{n}{2}$. Logo, $a_{12} = 0$. O mesmo raciocínio para mostrar que $a_{21} = a_{34} = a_{43} = 0$.

As provas de que $a_{13} = a_{31} = a_{24} = a_{42} = 0$ e de que $a_{ss} = 0$, para $1 \leq s \leq 4$ são as mesmas feitas naquele teorema.

Mediante a hipótese de $l_1 + l_2 \neq n$, provamos que $a_{14} = a_{41} = a_{32} = a_{23} = 0$. Temos que $(\omega^{l_1+l_2} + 1)a_{14} = 0$ e se $\omega^{l_1+l_2} + 1 = 0$, então $\omega^{l_1+l_2} = -1$ e como n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n = -1$ e $2 \leq l_1 + l_2 < 2n$, só poderia ocorrer $l_1 + l_2 = n$, o que é absurdo. De modo análogo $a_{41} = a_{32} = a_{23} = 0$ e com isso $A = 0$.

Por outro lado, a relação $x^2 = \lambda(1-h^{2i})$, nos diz que

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda(1-\omega^{2l_1 i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_1 i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{2l_2 i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) \end{pmatrix}$$

e como $\omega^{2l_j i} \neq 1$, para cada $j \in \{1,2\}$, segue que $A^2 \neq 0$ e isto contradiz o fato de que $A = 0$. ■

Teorema 4.4.11 *Sejam $1 \leq l_1, l_2 \leq n-1$ tais que $l_1 + l_2 = n$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1,2\}$. Se (M,T) é uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos, então M é simples.*

Demonstração: Suponhamos que M não seja um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples. Então existe um $A_{i,n}(\lambda)$-submódulo não trivial N de M. Em particular, vendo M como um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulo, temos que N é um $\Bbbk\mathbb{D}_m$-submódulo não trivial de M. A Proposição 1.2.30 nos diz que $N|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}}$ ou $N|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_2}}$ e isto contradiz o Teorema 4.1.10, pois o mesmo diz que não existe um $A_{i,n}(\lambda)$-módulo X tal que $X|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_l}$, em que $\omega^{2li} \neq 1$ e $l \neq \frac{n}{2}$. ■

Com o objetivo de caracterizarmos todos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulo simples nas condições do teorema anterior, apresentamos duas extensões distintas para $\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2}$.

Proposição 4.4.12 *Sejam $1 \leq l_1, l_2 \leq n-1$ tais que $l_1 + l_2 = n$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1,2\}$. Então $\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2}$ estende-se a uma representação $F : A_{i,n}(\lambda) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2 \oplus \Bbbk^2)$ dada por*

$$[F(x)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[F(y)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^{l_2 i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Tendo em mente que F é uma extensão de $\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2}$, então $F(g) = (\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(g)$ e $F(h) = (\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)$ e suas respectivas matrizes $[F(g)]_\alpha$ e $[F(h)]_\alpha$, por um cálculo análogo ao que fizemos no Teorema 4.4.1, são as mesmas que as obtidas lá (veja em tal teorema $[T(g)]_{\alpha'}$ e $[T(h)]_{\alpha'}$).

Mostremos que F preserva as relações que definem a álgebra $A_{i,n}(\lambda)$. De fato,

$$[F(g)]_\alpha[F(x)]_\alpha = [(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(g)]_\alpha[F(x)]_\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^{l_2 i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= [F(y)]_\alpha[F(g)]_\alpha,$$

$$[F(h)]_\alpha[F(x)]_\alpha = [(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(h)]_\alpha[F(x)]_\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^{l_1} \\ 0 & 0 & \omega^{l_2 i - l_1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})\omega^{l_2}}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \lambda(1-\omega^{-2l_2 i})\omega^{-l_2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega^{l_2} \\ 0 & 0 & -\omega^{l_2 i}\omega^{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})\omega^{-l_1}}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ -\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})\omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} \end{pmatrix}$$

$$= -[F(x)]_\alpha[F(h)]_\alpha$$

e analogamente, $[F(h)]_\alpha[F(y)]_\alpha = -[F(y)]_\alpha[F(h)]_\alpha$. Na igualdade $(*)$ acima, usamos que $l_1 + l_2 = n$ e então $\omega^{l_1} = -\omega^{-l_2}$ e $\omega^{l_2} = -\omega^{-l_1}$. A seguir, usamos novamente tal fato.

$$[F(x)]_\alpha[F(x)]_\alpha =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{2l_2 i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{2l_2 i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(1-\omega^{2l_1 i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_1 i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{2l_2 i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) \end{pmatrix}$$

$$= [\lambda(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2})(1-h^{2i})]_\alpha = [F(\lambda(1-h^{2i}))]_\alpha.$$

Analogamente, $[F(y)]_\alpha[F(y)]_\alpha = [F(\lambda(1-h^{-2i}))]_\alpha$. Um cálculo simples mostra que $[F(x)]_\alpha[F(y)]_\alpha + [F(y)]_\alpha[F(x)]_\alpha = 0$. ∎

Proposição 4.4.13 *Sejam $1 \leq l_1, l_2 \leq n-1$ tais que $l_1 + l_2 = n$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1,2\}$. Então $\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2}$ estende-se a uma representação $F' : A_{i,n}(\lambda) \to \mathrm{End}_{\Bbbk}(\Bbbk^2 \oplus \Bbbk^2)$ tal que*

$$[F'(x)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[F'(y)]_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega^{l_2 i} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Segue de maneira análoga à demonstração da proposição anterior. ∎

Os caracteres de F e F' são necessários posteriormente e por este motivo os calculamos na observação a seguir.

Observação 4.4.14 É suficiente calcularmos os caracteres de F e F' nos elementos da base de $A_{i,n}(\lambda)$ como $\Bbbk$-espaço vetorial (para tais elementos veja o Lema 2.4.10). Iniciamos com o caracter de F.

Claramente,

$$\mu_F(x) = \mu_F(y) = 0 \ \text{ e } \ \mu_F(1) = 4,$$

pois $F(1)$ é a matriz identidade de ordem 4. Como

$$[F(xy)]_\alpha = \lambda \begin{pmatrix} -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} \end{pmatrix}$$

e claramente, $\mu_F(xy) = 0$. Seja $d \in \{0, \cdots, m-1\}$. Então

$$\mu_F(gx) = 0 = \mu_F(h^d x),$$

$$\mu_F(gy) = 0 = \mu_F(h^d y),$$

$$\mu_F(gh^d x) = 0 = \mu_F(gh^d y),$$

$$\mu_F(gxy) = 0 = \mu_F(gh^d xy)$$

e

$$\mu_F(h^d xy) = \lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d} - \omega^{-l_1 d} - \omega^{-l_2 d}).$$

Como $\omega^{l_1 + l_2} = -1$, segue que $\omega^{l_1} = -\omega^{-l_2}$. Logo, se d é par, temos $\omega^{l_1 d} = \omega^{-l_2 d}$ e assim, $\mu_F(h^d xy) = 0$. Se d é ímpar então $\omega^{l_1 d} = -\omega^{-l_2 d}$. Deste modo,

$$\mu_F(h^d xy) = 2\lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d}).$$

Agora, calculemos o caracter de $\mu_{F'}$. Claramente,

$$\mu_{F'}(x) = \mu_{F'}(y) = 0 \text{ e } \mu_{F'}(1) = 4.$$

Como

$$[F'(xy)] = -\lambda \begin{pmatrix} -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} \end{pmatrix},$$

segue que $\mu_{F'}(xy) = 0$. Seja $d \in \{0, \cdots, m-1\}$. Então

$$\mu_{F'}(gx) = 0 = \mu_{F'}(h^d x),$$

$$\mu_{F'}(gy) = 0 = \mu_{F'}(h^d y),$$

$$\mu_{F'}(gh^dx) = 0 = \mu_{F'}(gh^dy),$$

$$\mu_{F'}(gxy) = 0 = \mu_{F'}(gh^dxy),$$

$$\mu_{F'}(h^dxy) = 0, d\,\text{par}$$

e

$$\mu_{F'}(h^dxy) = -2\lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d}), \quad d \text{ ímpar}.$$

Teorema 4.4.15 *Os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos associados, respectivamente, às representações F e F' são simples e não isomorfos.*

Demonstração: Pelo Teorema 4.4.11, os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos associados, respectivamente, às representações F e F' são simples. Para mostrarmos que não são isomorfos, basta mostrarmos que as representações F e F' não são equivalentes, veja Proposição 1.2.15.

Sem perda de generalidade, consideramos $1 \leq l_1 \leq l_2 < n$. Assim, $0 \leq l_2 - l_1 < n$.

Suponhamos que $\mu_F = \mu_{F'}$. Então, para d ímpar, temos que

$$\mu_F(h^dxy) = \mu_{F'}(h^dxy).$$

Pela observação acima,

$$\mu_F(h^dxy) = 2\lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d})$$

e

$$\mu_{F'}(h^dxy) = -2\lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d}),$$

e concluímos que $(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1} + \omega^{l_2}) = 0$. Se $-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} = 0$, então $\omega^{2l_2 i} = 1$, contradizendo a hipótese. Se $\omega^{l_1} + \omega^{l_2} = 0$ então $\omega^{l_2 - l_1} = -1$, contradizendo o fato de que n é o menor inteiro positivo tal que $\omega^n = -1$, uma vez que $l_2 - l_1 < n$.

Deste modo, $\mu_F \neq \mu_{F'}$ e portanto, pelos Teoremas 1.2.27 e 1.2.28, as representações F e F' não são equivalentes. ■

Mantendo a notação dita antes da Proposição 4.4.10, caracterizamos os $A_{i,n}(\lambda)$-módulos simples do Teorema 4.4.11.

Teorema 4.4.16 *Sejam $1 \leq l_1, l_2 \leq n-1$ tais que $l_1 + l_2 = n$, $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1,2\}$. Se (M,T) é uma representação de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}}$ então T é equivalente à representação F ou à F'.*

Demonstração: Notemos que $\omega^{l_1+l_2} = -1$ se, e somente se, $l_1+l_2 = n$ e isso garante que a matriz A não seja necessariamente nula, veja prova da Proposição 4.4.10.

Considerando a matriz A, sob a hipótese de que $l_1+l_2 = n$, a matriz A^2 e o fato de que $\omega^{2l_j i} \neq 1$, para cada $j \in \{1,2\}$, temos que

$$a_{14}a_{41} = \lambda(1-\omega^{2l_1 i}) \neq 0 \ \text{ e } \ a_{23}a_{32} = \lambda(1-\omega^{2l_2 i}) \neq 0.$$

Logo, a_{14}, a_{23}, a_{32} e a_{41} são não-nulos e podemos escrever

$$a_{41} = \frac{\lambda(1-\omega^{2l_1 i})}{a_{14}} = \frac{\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})}{a_{14}} \ \text{ e } \ a_{32} = \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{a_{23}}.$$

Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{a_{23}} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})}{a_{14}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da relação $y = gxg$ segue que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})}{a_{14}} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{a_{23}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A relação $xy + yx = 0$ implica em $AB + BA = 0$. Efetuando os cálculos com as matrizes A e B obtidas acima, temos

$$a_{14}\frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{a_{23}} + a_{23}\frac{\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})}{a_{14}} = 0,$$

ou seja,

$$a_{14}^2\lambda(1-\omega^{2l_2 i}) + a_{23}^2\lambda(1-\omega^{-2l_2 i}) = 0.$$

Desta forma, segue que a_{23} é uma raiz quadrada de $\frac{-a_{14}^2(1-\omega^{2l_2 i})}{1-\omega^{-2l_2 i}}$. Escrevendo $\omega^{-2l_2 i} = \frac{1}{\omega^{2l_2 i}}$, temos que $\frac{-(1-\omega^{2l_2 i})}{1-\omega^{-2l_2 i}} = \omega^{2l_2 i}$. As raízes quadradas de $\omega^{2l_2 i}$ são $\omega^{l_2 i}$ e $-\omega^{l_2 i}$. Logo, $a_{23} = a_{14}\omega^{l_2 i}$ ou $a_{23} = -a_{14}\omega^{l_2 i}$. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{14}\omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{a_{14}\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})}{a_{14}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & -a_{14}\omega^{l_2 i} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(1-\omega^{2l_2 i})}{-a_{14}\omega^{l_2 i}} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(1-\omega^{-2l_2 i})}{a_{14}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

A fim de fixarmos notação, denotamos por T_+ e T_- as representações de $A_{i,n}(\lambda)$ tais que $[T(x)]_{\alpha'} = A$ é como em 4.4 e 4.5, respectivamente.

Afirmação: As representações F e T_+ (assim como F' e T_-) são equivalentes.

De fato, sabemos que F e T_+ são irredutíveis e então, para concluirmos que são equivalentes, basta mostrarmos que possuem os mesmos caracteres na base de $A_{i,n}(\lambda)$. Notemos que

$$\mu_{T_+}(x) = \mu_{T_+}(y) = 0 \text{ e } \mu_{T_+}(1) = 4.$$

Como

$$AB = \lambda \begin{pmatrix} -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} \end{pmatrix},$$

segue que $\mu_{T_+}(xy) = 0$. Seja $d \in \{0, \cdots, m-1\}$. Então

$$\mu_{T_+}(gx) = 0 = \mu_{T_+}(h^d x),$$

$$\mu_{T_+}(gy) = 0 = \mu_{T_+}(h^d y),$$

$$\mu_{T_+}(gh^d x) = 0 = \mu_{T_+}(gh^d y),$$

$$\mu_{T_+}(gxy) = 0 = \mu_{T_+}(gh^d xy),$$

e

$$\mu_{T_+}(h^d xy) = \lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d} - \omega^{-l_1 d} - \omega^{-l_2 d}).$$

Assim como explicamos na Observação 4.4.14, se d é par, então $\mu_{T_+}(h^d xy) = 0$ e $\mu_{T_+}(h^d xy) = 2\lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d})$, se d é ímpar.

Logo, $\mu_{T_+} = \mu_F$ e as representações F e T_+ são equivalentes.

Mostremos que $\mu_{F'} = \mu_{T_-}$. De fato,

$$\mu_{T_-}(x) = \mu_{T_-}(y) = 0 \text{ e } \mu_{T_-}(1) = 4.$$

Como

$$AB = -\lambda \begin{pmatrix} -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{l_2 i} - \omega^{-l_2 i} \end{pmatrix},$$

segue que $\mu_{T_-}(xy) = 0$. Seja $d \in \{0, \cdots, m-1\}$. Então

$$\mu_{T_-}(gx) = 0 = \mu_{T_-}(h^d x),$$

$$\mu_{T_-}(gy) = 0 = \mu_{T_-}(h^d y),$$

$$\mu_{T_-}(gh^d x) = 0 = \mu_{T_-}(gh^d y),$$

$$\mu_{T_-}(gxy) = 0 = \mu_{T_-}(gh^d xy),$$

$$\mu_{T_-}(h^d xy) = 0, d\,\text{par}$$

e

$$\mu_{T_-}(h^d xy) = -2\lambda(-\omega^{l_2 i} + \omega^{-l_2 i})(\omega^{l_1 d} + \omega^{l_2 d}), \quad d \text{ ímpar}.$$

Como $\mu_{T_-} = \mu_{F'}$ e as representações F' e T_- são equivalentes. ■

Exemplo 4.4.17 Consideramos $A_{3,6}(\lambda)$, $l_1 = 5$, $l_2 = 1$ e as representações $\rho_1, \rho_5 \in S$. Notemos que estamos nas hipóteses do Teorema 4.4.11, pois $\omega^{2\cdot 1\cdot 3} = -1 = \omega^{-2\cdot 5\cdot 3}$ e $1 + 5 = 6$. Então os $A_{3,6}(\lambda)$-módulos associados, respectivamente, às representações F e F' são simples e não isomorfos.

Pelo que fizemos anteriormente, temos

$$F(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \omega^3 & 0 \\ 0 & 2\lambda\omega^{-3} & 0 & 0 \\ 2\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 & 0 \\ 2\lambda\omega^{-3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega^3 & 0 \\ 0 & -2\lambda\omega^{-3} & 0 & 0 \\ 2\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$F'(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\omega^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 & 0 \\ -2\lambda\omega^{-3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que finaliza nosso exemplo.

Para a proposição a seguir consideramos a base

$$\alpha = \{m_1 = (v_1, 0, 0), m_2 = (v_2, 0, 0), m_3 = (0, v_1, 0),$$

$$m_4 = (0, v_2, 0), m_5 = (0, 0, v_1), m_6 = (0, 0, v_2)\}$$

de $\Bbbk^2 \oplus \Bbbk^2 \oplus \Bbbk^2$, em que $\beta = \{v_1, v_2\}$ é como na Subseção 1.2.1.

Para $r = 3$, diferente do que acontece para $r = 2$, mostramos a seguir que simplesmente não existem $A_{i,n}(\lambda)$-módulos tais que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \simeq M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}} \oplus M_{\rho_{l_3}}$.

Proposição 4.4.18 *Não existe uma representação (M, T) de $A_{i,n}(\lambda)$ tal que $M|_{\Bbbk\mathbb{D}_m} \overset{S}{\simeq} M_{\rho_{l_1}} \oplus M_{\rho_{l_2}} \oplus M_{\rho_{l_3}}$ seja um isomorfismo de $\Bbbk\mathbb{D}_m$-módulos e $\omega^{2l_j i} \neq 1$ e $l_j \neq \frac{n}{2}$, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$.*

Demonstração: Suponhamos que exista tal representação de $A_{i,n}(\lambda)$. Como nos resultados anteriores temos

$$ST(r) \overset{(*)}{=} (\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2} \oplus \rho_{l_3})(r)S,$$

para todo $r \in \Bbbk\mathbb{D}_m$.

Seja $\alpha' = \{S^{-1}(m_1), S^{-1}(m_2), S^{-1}(m_3), S^{-1}(m_4), S^{-1}(m_5), S^{-1}(m_6)\}$ base de M. Denotamos por $A, B \in M_6(\Bbbk)$ as matrizes de $T(x)$ e $T(y)$ na base α', respectivamente.

Da relação $hx = -xh$ e usando $(*)$, temos

$$S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2} \oplus \rho_{l_3})(h)ST(x) = -T(x)S^{-1}(\rho_{l_1} \oplus \rho_{l_2} \oplus \rho_{l_3})(h)S,$$

e assim, na base α', temos

$$\begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} =$$

$$\stackrel{(\star)}{=} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^{l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^{-l_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{l_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{l_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^{-l_3} \end{pmatrix}.$$

De $(\star)$ segue claramente que

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = a_{55} = a_{66} = 0.$$

Além disso, por hipótese $l_j \neq \frac{n}{2}$, logo

$$a_{21} = a_{12} = a_{34} = a_{43} = a_{65} = a_{56} = 0.$$

Continuamos a prova dividindo-a em casos.

Caso 1: Suponhamos $l_1+l_2 = l_1+l_3 = l_2+l_3 = n$. De $l_1+l_2 = l_1+l_3$ temos que $l_2 = l_3$. Assim, de $l_2 + l_3 = n$, segue que $l_2 = l_3 = \frac{n}{2}$, contrariando a hipótese.

Caso 2: Suponhamos $l_1 + l_2 \neq n, l_1 + l_3 \neq n$ e $l_2 + l_3 \neq n$. Da igualdade $(\star)$ temos $\omega^{l_1} a_{14} = -a_{14}\omega^{-l_2}$, ou seja, $(\omega^{l_1+l_2} + 1)a_{14} = 0$. Como $l_1 + l_2 \neq n$, segue que $(\omega^{l_1+l_2} + 1) \neq 0$. Logo, $a_{14} = 0$. De forma análoga mostramos que todos os elementos de A são iguais a zero. No entanto, da relação $x^2 = \lambda(1 - h^{2i})$ e usando a hipótese, obtemos

$$A^2 \triangleq \lambda \begin{pmatrix} (1-\omega^{2l_1 i}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\omega^{-2l_1 i}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\omega^{2l_2 i}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\omega^{-2l_2 i}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\omega^{2l_3 i}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\omega^{-2l_3 i}) \end{pmatrix} \neq 0,$$

contradizendo o fato de que $A = 0$.

Caso 3: $l_1 + l_2 \neq n, l_1 + l_3 \neq n$ e $l_2 + l_3 = n$.

Da igualdade ($\star$) segue que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todavia, isso contradiz a igualdade $\triangle$.

Caso 4: Suponhamos $l_1 + l_2 \neq n, l_1 + l_3 = n$ e $l_2 + l_3 \neq n$. Análogo ao caso 3.

Caso 5: Suponhamos $l_1 + l_2 = n, l_1 + l_3 \neq n$ e $l_2 + l_3 \neq n$. Análogo ao caso 3.

Caso 6: Suponhamos $l_1 + l_2 = n, l_1 + l_3 = n$ e $l_2 + l_3 \neq n$. De ($\star$), obtemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & a_{25} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ($\triangle$) segue que a diagonal principal de A^2 possui todos os elementos não-nulos. Logo,

$$a_{32}a_{23} = \lambda(1 - \omega^{2l_2 i}) \neq 0,$$

$$a_{41}a_{14} = \lambda(1 - \omega^{-2l_2 i}) \neq 0,$$

$$a_{52}a_{25} = \lambda(1 - \omega^{2l_3 i}) \neq 0$$

e

$$a_{61}a_{16} = \lambda(1 - \omega^{-2l_3 i}) \neq 0.$$

Consequentemente,

$$a_{32}, a_{23}, a_{41}, a_{14}, a_{52}, a_{25}, a_{61}, a_{16} \neq 0.$$

Por outro lado, multiplicando a sexta linha de A pela quarta coluna de A temos que $a_{61}a_{14} = 0$, gerando uma contradição.

Caso 7: Suponhamos $l_1 + l_2 = n, l_1 + l_3 \neq n$ e $l_2 + l_3 = n$. Análogo ao caso 6.

Caso 8: Suponhamos $l_1 + l_2 \neq n, l_1 + l_3 = n$ e $l_2 + l_3 = n$. Análogo ao caso 6.

Portanto a suposição inicial é falsa e o resultado está provado. ∎

Referências Bibliográficas

[1] ABE, Eiichi. **Hopf Algebras**. Cambridge University Press, 1980. 284 p.

[2] ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; FANTINO, Fernando. On pointed Hopf algebras associated with alternating and dihedral groups. **Rev. Unión Mat. Argent.**, v. 48, n.3, p. 57-71, 2007.

[3] ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; GRAÑA, Matías. **Braided Hopf algebras over non abelian finite groups**. arXiv:math, 9802074v3, 1998.

[4] ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; HECKENBERGER, István; SCHNEIDER, Hans-Jürgen. **The Nichols algebra of a semisimple Yetter-Drinfeld module**. arXiv: 0803.2430v2, 2009.

[5] ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; SCHNEIDER, Hans-Jürgen. On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras. **Annals of Mathematics**, v. 171, p. 375-417, 2010.

[6] ANDRUSKIEWITSCH, Nicolás; SCHNEIDER, Hans-Jürgen. Pointed Hopf algebras. **New Directions in Hopf Algebras**, v. 43, p. 1-68, 2002.

[7] CURTIS, Charles W.; REINER, Irving. **Methods of representation theory:** with applications to finite groups and orders. Wiley-Interscience, 1981. 819 p.

[8] CURTIS, Charles W.; REINER, Irving. **Representation theory of finite groups and associative algebras**. Interscience Publishers, 1966. 688 p.

[9] DASCALESCU, Sorin; NASTASESCU, Constantin; RAIANU, Serban. **Hopf algebra: An introduction**. Marcel Dekker, 2001. 401 p.

[10] ETINGOF, Pavel; GELAKI, Shlomo; NIKSHYCH, Dmitri; OSTRIK, Victor. Tensor categories. **American Mathematical Society**, 2015. 343 p.

[11] ETINGOF, Pavel; GOLBERG, Oleg; HENSEL, Sebastian; LIU, Tiankai; SCHWENDNER, Alex; VAINTROB, Dmitry; YODOVINA, Elena. Introduction to representation theory. **American Mathematical Society**, 2011. 228 p.

[12] FANTINO, Fernando; GARCIA, Gaston A. On pointed Hopf algebras over dihedral groups. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 252, n. 1, p. 69-91, 2011.

[13] GARCÍA, Gaston A; IGLESIAS, Agustín G. Finite dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_4$. **Israel Journal of Mathematics**, v. 183, n. 1, p. 417-444, 2011.

[14] IGLESIAS, Agustín G. Representations of finite dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{S}_3$. **Rev. Unión Mat. Argent.**, v. 51, n. 1, p. 51-77, 2010.

[15] LAM, Tsit Y. **A first course in noncommutative rings**. Springer Science e Business Media, 1991. 397 p.

[16] LANG, Serge. **Algebra**. New York: Springer, 2002. 914 p.

[17] MASUOKA, A. Cocycle deformations and Galois objects for some cosemisimple Hopf algebras of finite dimension. **Contemporary Mathematics**, v. 267, p. 195-214, 2000.

[18] MOMBELLI, Juan M. **Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**, Notas de aula. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/ mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>. Acesso em 6 de setembro de 2018.

[19] MONTGOMERY, Susan. Hopf algebras and their actions on rings. **American Mathematical Society**, 1993. 238 p.

[20] MONTGOMERY, Susan. Indecomposable coalgebras, simple comodules and pointed Hopf algebras. **American Mathematical Society**, v. 123, n. 8, p. 2343-2351, 1995.

[21] NICHOLS, W. D.; RICHMOND, M. B. The Grothendieck group of a Hopf algebra. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v. 106, n. 3, p. 297-306, 1996.

[22] PIERCE, Richard S. **Associative algebras**. Springer-Verlag, 1982. 436 p.

[23] PINTER, Sara. **Álgebras de Hopf Trançadas**. 2013. 117 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

[24] PINTER, Sara. **Sobre equivariantizações de categorias módulo e seus objetos simples**. 2017. 148 p. Tese (Doutorado em Matemática)- Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2017.

[25] SERRE, Jean-Pierre. **Linear Representations of Finite Groups**. Springer-Verlag, 1977. 170p.

[26] RADFORD, David E. **Hopf algebras**. World Scientific, 2012. 559 p.

[27] SERGANOVA, Vera. **Representation Theory**. 2005. 114 p.

[28] ZHANG, Shouchuan. The Von Neumann regular radical and Jacobson radical of crossed products. **Acta Math. Hungar.**, v. 86, n. 4, p. 319-333, 2000.

[29] ZHANG, Ying; CHEN, Hui-Xiang. Representations of finite dimensional pointed Hopf algebras over $\mathbb{Z}_n$. **Communications in Algebra**, v. 40, n. 10, p. 3801-3821, 2012.