Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de qualificação para o doutorado
Data: 05/09/2019
Área de concentração: Álgebra
Nome: ______________________________

Questão 1

(i) Para M, N e P módulos sobre um anel comutativo R, prove a adjunção $\mathrm{Hom}(M \otimes N, P) \cong \mathrm{Hom}(M, \mathrm{Hom}(N, P))$.

(ii) Prove que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$ se m, n são coprimos.

Questão 2 Seja R um anel comutativo.

(i) Sejam M um R-módulo noetheriano e $u : M \to M$ um morfismo sobrejetor de R-módulos. Prove que u deve ser um isomorfismo (use os submódulos $ker(u^n)$).

(ii) Sejam M um R-módulo artiniano e $u : M \to M$ um morfismo injetor de R-módulos. Prove que u deve ser um isomorfismo (use os módulos quocientes $coker(u^n)$).

Questão 3 Seja R um anel não necessariamente comutativo com unidade.

(i) Prove que as afirmações abaixo são equivalentes.

(1) ${}_R R$ é semissimples.

(2) Todos os R-módulos à esquerda são projetivos.

(3) Todos os R-módulos à esquerda finitamente gerados são projetivos.

(4) Todos os R-módulos à esquerda cíclicos são projetivos.

(5) Todos os R-módulos à esquerda são injetivos.

(ii) Dê exemplo de módulos projetivo e injetivo que não seja o módulo nulo.

Notas: • ${}_R R$ significa que R é considerado como um R-módulo à esquerda sobre si.

• Use, se achar conveniente, que ${}_R R$ é semissimples se, e somente se, toda sequência exata curta de R-módulos à esquerda cinde.

Questão 4 Sejam R, S anéis não necessariamente comutativos com unidade.

Suponhamos que R seja um subanel de S, que N seja um R-módulo à esquerda e que $\iota : N \to S \otimes_R N$ seja um homomorfismo de R-módulos à esquerda definido por $\iota(n) = 1 \otimes n$. Além disso, sejam L um S-módulo à esqueda e $\varphi : N \to L$ um homomorfismo de R-módulos à esquerda. Então existe um único homomorfismo de S-módulos à esquerda $\phi : S \otimes_R N \to L$ tal que $\phi \circ \iota = \varphi$. Reciprocamente, se $\phi : S \otimes_R N \to L$ é um homomorfismo de S-módulos à esquerda então $\varphi := \phi \circ \iota$ é um homomorfismo de R-módulos à esquerda.

Bom exame!