Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise Numérica-2019/02

1. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Considere soluções aproximadas x_m para o sistema $Ax = b$ obtidas através do método de Lanczos:

$$x_m = x_0 + V_m y_m, \quad y_m = T_m^{-1}(\beta e_1), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

sendo $\beta = \|r_0\|_2$, $r_0 = b - Ax_0$ e $e_1 = [1, 0, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^m$. A matriz $V_m \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tem colunas dadas pelos vetores v_i, em que $v_1 = r_0/\beta$ e $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ forma uma base ortonormal para o subespaço de Krylov

$$\mathcal{K}_m = span\left\{v_1, Av_1, A^2v_1, \ldots, A^{m-1}v_1\right\},$$

enquanto que a matriz $T_m = [h_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ é tridiagonal, simétrica com $h_{i,i} = \alpha_i$, $1 \leq i \leq m$, e $h_{j,j-1} = \beta_j$, $2 \leq j \leq m$.

a. Considere a fatoração $T_m = L_m U_m$, sendo $L_m = [\ell_{i,j}]$ e $U_m = [u_{i,j}]$ bidiagonais de ordem m, com $\ell_{i,i} = 1$, $u_{i,i} = \eta_i$, $1 \leq i \leq m$, $\ell_{j,j-1} = \lambda_j$, $u_{j-1,j} = \beta_j$, $2 \leq j \leq m$. Mostre que $\lambda_m = \dfrac{\beta_m}{\eta_{m-1}}$, $\eta_m = \alpha_m - \lambda_m\beta_m$ e que x_m satisfaz a recursão

$$x_m = x_{m-1} + \zeta_m p_m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

sendo $p_m = \eta_m^{-1}(v_m - \beta_m p_{m-1})$ e $\zeta_m = -\lambda_m\zeta_{m-1}$, com $p_0 = 0$ e $\zeta_1 = \beta$.

b. Mostre que $r_m = b - Ax_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, satisfaz $r_m = \sigma_m v_{m+1}$, para algum escalar σ_m e que os vetores p_i formam um conjunto A-conjugado, isto é, $(Ap_i, p_j) = 0$ para $i \neq j$.

c. Utilizando os itens (a) e (b), derive o método dos gradientes conjugados para resolver o sistema $Ax = b$.

2. Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tais que o sistema $Ax = b$ tem uma única solução x^*. Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$ defina a sequência

$$x_{k+1} = (I - A)x_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

sendo I a matriz identidade de ordem n. Suponha que a matriz $I - A$ é diagonalizável com autovalores $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Prove que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|_2}{\|x_k - x^*\|_2} = |\lambda_1|$$

e que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

3. Para o problema de Cauchy

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x, y), \quad x > x_0 \\
&y(x_0) = y_0
\end{aligned}
$$

considere o método de passo multiplo:

$$y_{n+3} + (2b - 3)(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = hb(f_{n+2} + f_{n+1}).$$

(a) Determine todos os valores do parâmetro real $b \neq 0$, para os quais a o método é zero estável.

(b) Mostre que existe um valor de parâmetro b para o qual o método tém quarta ordem. O método é convergente para este valor de b?

(c) Mostre que caso o método for zero-estável, a sua ordem não poderá exceder 2.

4. Considere problema de valores inicial e a contorno para a equação de difusão :

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u = \partial_x^2 u \quad x \in (0, 1),\ t > 0, \\
&u(0, t) = u(1, t) = 0, \\
&u(x, 0) = u_0(x).
\end{aligned}
$$

(a) Considere o método de Euler explícito para a equação de difusão :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2}.$$

(b) Demonstre a estimativa de erro de truncamento do metodo.

(c) Use análise de Von Neumann para encontrar as condições de estabilidade de método.