Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Exame de Qualificação de Análise (2019.2)

Nome: ______________________________

Para uso do professor

Questão	1	2	3	4	5	6	Total
Pontos	2	2	2	2	2	2	12
Nota							

Faça seis das questões abaixo.

1. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$, então, defina para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto
$$\mu_n = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x)| \geq n\}.$$
Mostre que a medida de Lebesgue de μ_n tende a zero quando $n \to \infty$.

2. Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Sabe-se que a função $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ é mensurável em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Primeiramente, mostre que
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|dy = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx.$$
Agora, mostre que a função
$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$$
é finita em quase todo ponto e
$$\int_{\mathbb{R}} |h(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx.$$

3. Mostre que:
   (a) Se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência fracamente convergente num espaço normado X, i.e., $x_n \rightharpoonup x_0$, mostrar que existe uma sequência de combinações lineares de elementos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge fortemente para x_0. Ou seja, $x_0 \in \overline{\text{span}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$.
   (b) Conclua que todo subespaço fechado Y é fracamente fechado.

4. Seja $X = C[0, 1]$ equipado com a norma $\|f\| := \sup_{x\in[0,1]} \|f(x)\|$ e considere o operator linear $T : X \to X$ definido por $T(f)(x) := xf(x)$. Mostre que T é limitado com $\|T\| = 1$ e o espectro de T é $\sigma(T) = [0, 1]$.

5. Seja H um espaço de Hilbert e $T : H \to H$ uma função tal que existe uma outra função $S : H \to H$ satisfazendo $\langle T(x), y\rangle = \langle x, S(y)\rangle$ para todo $x, y \in H$. Mostre que ambos T e S são lineares e limitados e que $\|T\| = \|S\|$.

6. Seja (T_n) uma sequência de operadores $T_n : X \to Y$ entre espaços de Banach tal que existe uma constante $c > 0$ com $\|T_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $T_n(x)$ converge em Y para todo x em um subespaço denso $X_0 \subseteq X$, mostre que $T_n(x)$ converge para todo $x \in X$ e que $T : X \to Y$, $T(x) := \lim T_n(x)$ define um operador limitado com $\|T\| \leq c$.

7. Sejam $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach, $Y \neq \{0\}$ um espaço normado e $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $B(X,Y)$, i.e, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n : X \to Y$ é um operador linear limitado.

   (a) Mostre que, se para cada $x \in X$ a sequência $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ for uma sequência de Cauchy em Y, então a sequência $\{\|T_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

   (b) Mostre ainda que, se Y for completo, então existe $T \in B(X,Y)$, tal que $T_n x \to Tx$ para cada $x \in X$.