



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Bruna Rayssa da Silva Santos Gutierrez

**Técnicas de Regularização Aplicadas à Tomografia Computadorizada**

Florianópolis/SC

2024

TÉCNICAS DE REGULARIZAÇÃO APLICADAS À TOMOGRAFIA COMPUTADORIZADA

Bruna Rayssa da Silva Santos Gutierrez

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Fábio Margotti

Florianópolis/SC

2024

Ficha catalográfica gerada por meio de sistema automatizado gerenciado pela BU/UFSC.  
Dados inseridos pelo próprio autor.

Gutierrez, Bruna Rayssa da Silva Santos  
Técnicas de Regularização aplicadas à Tomografia  
Computadorizada / Bruna Rayssa da Silva Santos Gutierrez ;  
orientador, Fábio Margotti, 2024.  
75 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa  
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,  
Florianópolis, 2024.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Problemas Inversos  
Lineares, Métodos de Regularização, Tomografia  
Computadorizada . I. Margotti, Fábio. II. Universidade  
Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

**Bruna Rayssa da Silva Santos Gutierrez**

**Técnicas de Regularização Aplicadas à Tomografia Computadorizada**

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Fábio Margotti  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Vinícius Albani  
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Joel Conceição Rabelo  
Universidade Federal do Piauí

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

Coordenação do Programa de Pós-Graduação

---

Prof. Dr. Fábio Margotti,  
Orientador

Florianópolis, 2024.

Dedico este trabalho a meu marido, Andres Felipe, à  
minha filha Andrea Rayssa, e às muitas mãos que me  
ajudaram a realizá-lo.

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, por Sua graça e misericórdia. Agradeço à minha família, em especial à minha mãe Ellen Corrêa, meu exemplo de persistência e resiliência; aos meus irmãos, por acreditarem em mim, Evellen Brena, Danna Evelyn, e Wilker Daniel; e aos meus avós Luiz, Luiza, Eucilene, Vitor e Maria por toda dedicação.

Aos amigos Valéria, Sabrina e Marcelo, obrigada pelo apoio e incentivo. Especial agradecimento ao Marcelo, que não desistiu até eu realizar a matrícula (Realmente, mano, o não eu já tinha; agora estou chegando no fim). Obrigada por acreditarem e me apoiarem desde a graduação, e também pela força e cuidado com a Andrea quando nós duas precisamos. Não posso deixar de mencionar e agradecer ao Lins e à Luana; o cuidado e o tempo que vocês dedicaram à Andrea permitiram que eu me sentisse segura em ficar "horas sem fim" estudando na UFSC.

Aos colegas do mestrado, que me ajudaram direta e indiretamente a chegar até aqui, obrigada! Em particular, agradeço à Tainá (amante da programação), que me acompanhou e ajudou no início do mestrado, e aos meus companheiros Mairon e Pedro, pelo apoio, paciência, e ajuda durante as "horas sem fim" que passamos na sala 205.

Agradeço ao meu orientador, Fábio Margotti, por ter me aceitado como orientanda, por sua dedicação ao ofício, suas instruções, ensinamentos e por ter acreditado em mim e na realização do trabalho que agora estamos finalizando. Prof, muito obrigada!

À pós-graduação em Matemática, aos professores e demais servidores, e aos docentes que aceitaram fazer parte da banca deste trabalho, obrigada.

Por fim, mas não menos importante, agradeço ao Sr. Andres Felipe, meu marido, por todo amor, cuidado e incentivo dedicados a mim e à nossa pequena. Tu me fazes acreditar que eu posso sempre mais, te amo. À minha pequena Andrea, pelos beijos, cheiros e abraços nos meus momentos mais cansados, tudo foi sustento para seguir em frente. Te amo pra sempre, minha pequena.

*"Estou crucificado com Cristo; logo, já não sou eu quem vive, mas Cristo vive em mim; e esse viver que, agora, tenho na carne, vivo pela fé no Filho de Deus, que me amou e a si mesmo se entregou por mim."*

(Bíblia Sagrada, Gálatas 2:20)

# Resumo

O presente trabalho apresenta os chamados problemas inversos, e faz um estudo de como é possível contornar as dificuldades para encontrar a solução desses problemas. Aborda, ainda, técnicas de regularização para problemas inversos lineares, associados a uma equação do tipo  $\mathcal{A}x = y$ , trazendo uma análise de convergência para o método do Gradiente, e alguns resultados dos métodos de Tikhonov, Tikhonov Iterado, e de um método mais moderno conhecido como Método das Projeções Relaxadas. Trata também do problema inverso da Tomografia Computadorizada, juntamente da discretização do problema, além de realizar testes numéricos que permitem a observação do desempenho dos métodos estudados aplicados a esse problema inverso.

**Palavras-chave:** Problemas Inversos Lineares; Métodos de Regularização; Tomografia Computadorizada.

# Abstract

This work presents the so-called inverse problems, and studies the difficulties in finding a solution to these problems. It also address the regularization techniques for linear inverse problems, associated with an equation of type  $\mathcal{A}x = y$ , bringing a convergence analysis to the Gradient-like methods, and some results from the classical Tikhonov methods, Iterated Tikhonov, and from the more modern Range Relaxed method. It also deals with the inverse problem of Computed Tomography, together with the discretization of this problem, in addition to carrying out numerical tests to compare the performance of the studied methods applied to it.

**Keywords:** Linear Inverse Problems; Regularization Methods; Computed Tomography.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação da projeção de $x_k, x_{k+1}^\delta$ , em $S$ . . . . .	45
Figura 2 – Representação do procedimento da Tomografia Computadorizada . . . . .	53
Figura 3 – Representação da reta $L$ , que descreve o percurso dos feixes e das intensidades emitida ( $I_{L_i}$ ) e detectada ( $I_{L_f}$ ) . . . . .	54
Figura 4 – Parametrização da reta que descreve o feixe de raios X . . . . .	55
Figura 5 – Representação da parametrização das retas fixadas. . . . .	59
Figura 6 – Exemplo de atribuição de valores . . . . .	65
Figura 7 – Reconstrução sem ruídos: à esquerda a solução fixada, e à direita a reconstrução realizada pelo $PR$ . . . . .	66
Figura 8 – Decaimento do Resíduo . . . . .	66
Figura 9 – Decaimento do Resíduo . . . . .	67
Figura 10 – Decaimento da Distância de Bregman . . . . .	67
Figura 11 – Imagem da solução fixada no canto superior esquerdo. Reconstruções realizadas pelos métodos: pelo $PR$ , no canto superior direito, pelo $TK$ no canto inferior esquerdo e pelo $LW$ no canto inferior direito. . . . .	69
Figura 12 – Na primeira linha: soluções fixadas. Na segunda, terceira, e quarta linha: reconstruções realizadas pelo $PR, TK$ e $LW$ , respectivamente . . . . .	70

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados dos Testes . . . . .	68
--	----

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DA REGULARIZAÇÃO - PROBLEMAS LINEARES</b>	<b>13</b>
2.1	A Pseudo-Inversa de Moore-Penrose	16
<b>3</b>	<b>MÉTODOS DE REGULARIZAÇÃO DE PROBLEMAS LINEARES</b>	<b>23</b>
<b>3.1</b>	<b>Métodos Clássicos</b>	<b>25</b>
3.1.1	Método de Tikhonov	25
3.1.2	Método de Tikhonov Iterado	27
3.1.3	Método do Gradiente	29
<b>3.2</b>	<b>Método das Projeções Relaxadas</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Tomografia Computadorizada</b>	<b>53</b>
4.1.1	Discretização do problema	58
<b>4.2</b>	<b>Testes Numéricos</b>	<b>62</b>
4.2.1	Teste 1	65
4.2.2	Teste 2	67
4.2.3	Teste 3	69
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>72</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>73</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Os problemas inversos consistem em um conjunto de problemas onde se objetiva determinar a causa de um fenômeno através da observação do efeito por ele produzido. A geologia, a engenharia, e a medicina são algumas das tantas áreas onde os problemas inversos se apresentam. Um exemplo, na medicina, é a tomografia computadorizada, pois com base na perda de intensidade de raios X, medida durante um exame, busca-se conhecer a densidade de um tecido no corpo, porém sem a necessidade de se observar diretamente. Este trabalho aborda justamente esse problema.

Na modelagem matemática, um problema inverso é associado a uma equação do tipo  $\mathcal{A}x = y$ , com  $\mathcal{A}$  podendo ser linear ou não. Quando  $\mathcal{A}$  é linear temos um problema inverso linear; caso contrário, é não linear. Além disso, um problema inverso pode ser bem posto ou, caso contrário, mal posto. Desse modo, inicialmente temos a Definição 1, para problemas bem postos, proposta por Hadamard (1902).

Sendo, geralmente, mal postos, como meio para encontrar soluções aceitáveis para um problema inverso desse tipo são usados os chamados métodos de regularização. Desse modo, neste trabalho, apresentamos alguns métodos de regularização clássicos (Tikhonov e Gradiente), e um método mais moderno (Projeções Relaxadas), bem como resultados que envolvem os métodos, e testes aplicados à Tomografia Computadorizada.

Além do presente capítulo, a continuação da dissertação está dividida em mais três capítulos do seguinte modo:

- Capítulo 2: Este capítulo formaliza e detalha a definição de problema inverso bem posto, segundo Hadamard, e aborda as limitações associadas a essa definição. Na seção 2.1, estudamos a generalização da solução para problemas mal postos e a ideia de Pseudo-Inversa.
- Capítulo 3: Dividido em duas seções, este capítulo apresenta diferentes métodos de regularização. Na primeira seção, discutimos os métodos clássicos de Tikhonov e Gradiente; na segunda seção, introduzimos o método mais moderno das Projeções Relaxadas com penalizações convexas.
- Capítulo 4: Também dividido em duas seções, na primeira abordamos o problema da Tomografia Computadorizada e a modelagem matemática que o envolve. Na sequência, segunda seção, apresentamos a discretização e implementação computacional desse problema. Além disso, experimentos numéricos são realizados na aplicação dos métodos de regularização ao problema da Tomografia Computadorizada, e os resultados quanto ao desempenho dos métodos no problema são apresentados.

## 2 Teoria da Regularização - Problemas Lineares

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  um operador linear e contínuo de modo que  $y \in Y$ . Considere a equação

$$\mathcal{A}x = y. \quad (2.1)$$

Temos que o **problema direto** associado à equação (2.1) é o problema no qual conhecemos o vetor  $x$  (o causador de um efeito a ser estudado) e o operador  $\mathcal{A}$ , e a partir destes é possível calcular  $y$ , isto é, o efeito gerado por  $\mathcal{A}$  em  $x$ . Por outro lado, o **problema inverso** associado à equação (2.1) é o problema em que conhecemos o valor  $y$  (efeito gerado) e o operador  $\mathcal{A}$ , e queremos encontrar uma solução  $x$  (causa do efeito) que satisfaz a equação (2.1).

**Definição 1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados e  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  um operador linear e contínuo. Dizemos que o problema inverso associado à tripla  $(\mathcal{A}, X, Y)$  é **bem posto**, segundo Hadamard, se as seguintes propriedades são válidas:*

- (i)  $\forall y \in Y, \exists x \in X$  tal que  $\mathcal{A}x = y$ . (Sobrejetividade de  $\mathcal{A}$ )
- (ii)  $\forall y \in Y$  existe no máximo um  $x \in X$  tal que  $\mathcal{A}x = y$ . (Injetividade de  $\mathcal{A}$ )
- (iii) Seja  $\mathcal{A}x = y$ . Se a sequência  $(y_k) \subset Y$  é tal que  $y_k \rightarrow y$ , e se a sequência  $(x_k) \subset X$  é tal que  $\mathcal{A}x_k = y_k, \forall k$ , então  $x_k \rightarrow x$ . (Estabilidade)

■

Se  $(\mathcal{A}, X, Y)$  não for um problema bem posto, chamaremos então de problema **mal posto**. Isto é, quando qualquer um dos itens da Definição 1 não for satisfeito o problema será um problema mal posto.

Frequentemente, os problemas inversos são mal postos, o que torna necessário encontrar meios para contornar as violações dos itens acima.

Para o item (i), quando não satisfeito, é possível restringir o espaço dos dados tomando a imagem de  $\mathcal{A}$ ,  $R(\mathcal{A})$ , como contradomínio, por exemplo. Ou, ainda, aumentar o espaço de soluções e admitir soluções generalizadas.

Quando o item (ii), a injetividade, não é satisfeito, é possível impor uma condição *a priori* para escolher, entre todas as soluções a mais conveniente. Por exemplo: a solução de menor norma, se existir, ou a que possui o menor valor funcional, para algum funcional pré-fixado.

Note que, com  $\mathcal{A}$  linear, contínuo, inversível e  $X$  e  $Y$  espaços de Banach o item (iii) se cumpre, isto é,  $\mathcal{A}^{-1} : Y \rightarrow X$  é contínua, Kreyszig (1978, p. 286). Mas, por depender da topologia usada, a continuidade da  $\mathcal{A}^{-1}$  em casos gerais, é mais delicada de ser satisfeita, pois ao mudar a topologia usada pode-se descaracterizar o problema. Conforme ilustra o exemplo a seguir:

**Exemplo** (Operador integral): Sejam  $X = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} (|f(x)|)$  e  $Y = (C_*^1[0, 1], \|\cdot\|_{C^1})$ , com  $C_*^1[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : f' \in C[0, 1] \text{ e } f(0) = 0\}$  e  $\|f\|_{C^1} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$  e, seja  $\mathcal{A}$  o operador integral  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ , definido por:

$$(\mathcal{A}f)(x) = \int_0^x f(s) ds, \quad x \in [0, 1]$$

Vamos verificar se o problema é bem posto segundo Hadamard:

**Prova:** Primeiramente verificaremos se  $\mathcal{A}$  está bem definido, é linear e contínuo:

- $\mathcal{A}$  está bem definido, pois se  $f \in C[0, 1]$ , então  $\mathcal{A}f$  é continuamente diferenciável (pelo Teorema Fundamental do Cálculo). Além disso:

$$(\mathcal{A}f)(0) = \int_0^0 f(s) ds = 0.$$

- $\mathcal{A}$  é linear: Sejam  $f, g \in X$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\lambda f + g)(x) &= \int_0^x (\lambda f + g)(s) ds \\ &= \int_0^x \lambda f(s) + g(s) ds \\ &= \lambda \int_0^x f(s) ds + \int_0^x g(s) ds \\ &= \lambda \mathcal{A}f(x) + \mathcal{A}g(x) \\ &= (\lambda \mathcal{A}f + \mathcal{A}g)(x) \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{A}(\lambda f + g) = \lambda \mathcal{A}f + \mathcal{A}g$ .

- $\mathcal{A}$  é contínuo: Seja  $f \in X$ ,  $x \in [0, 1]$ . Então

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A}f)(x)| &= \left| \int_0^x f(s) ds \right| \\ &\leq \int_0^x |f(s)| ds \\ &\leq \sup_{s \in [0, 1]} |f(s)| (x - 0) \\ &= \|f\|_\infty(x). \end{aligned}$$

Assim,  $\sup_{x \in [0, 1]} |(\mathcal{A}f)(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} \|f\|_\infty(x) = \|f\|_\infty$ . Observe que  $(\mathcal{A}f)'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ .

Logo,  $\sup_{x \in [0,1]} |(\mathcal{A}f)'(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \|f(x)\| = \|f\|_\infty$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}f\| &= \sup_{x \in [0,1]} |(\mathcal{A}f)(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |(\mathcal{A}f)'(x)| \\ &\leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty \\ &= 2\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\mathcal{A}$  é limitado e, portanto, contínuo.

- Vamos checar agora se  $(\mathcal{A}, X, Y)$  é um problema bem posto ou não: (ii) Seja  $f \in X$  e suponha que  $\mathcal{A}f = 0$ . Vamos provar que  $f = 0$ . De fato,  $\forall x \in [0, 1]$ ,

$$0 = (\mathcal{A}f)(x) = \int_0^x f(s) ds.$$

Daí,

$$\frac{d}{dx}[0] = \frac{d}{dx} \left[ \int_0^x f(s) ds \right] \Rightarrow 0 = f(x), \forall x \in [0, 1]$$

Logo,  $f = 0$ . Portanto,  $\mathcal{A}$  é injetivo.

- (i) Seja  $g \in Y$ . Tome  $f = g'$ . Então,  $f \in C[0, 1] = X$ . E, ainda,  $\forall x \in [0, 1]$ :

$$(\mathcal{A}f)(x) = \int_0^x f(s) ds = \int_0^x g'(s) ds = g(x) - g(0) = g(x)$$

Logo,  $\mathcal{A}f = g$  e portanto  $\mathcal{A}$  é sobrejetivo.

- (iii) Seja  $\mathcal{A}^{-1} : Y \rightarrow X$ , onde  $(\mathcal{A}^{-1}g)(x) = g'(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ . Vamos provar que  $\mathcal{A}^{-1}$  é contínua  $\forall g \in Y$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ : Note que:  $|(\mathcal{A}^{-1}g)(x)| = |g'(x)|$ , então:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^{-1}g\| &= \sup_{x \in [0,1]} |(\mathcal{A}^{-1}g)(x)| \\ &= \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| \\ &\leq \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|_Y \\ &= \|g\|_Y \end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{A}^{-1}$  é limitada e, portanto, é contínua.

Assim,  $(\mathcal{A}, X, Y)$  satisfaz as condições na definição de Hadamard, e, então é um problema bem posto. ■

Provaremos que, no exemplo acima, substituindo  $Y = C_*^1[0, 1]$  por  $C[0, 1]$  (e disto,  $X = Y$ ), o problema  $(\mathcal{A}, X, Y)$  não é bem posto, segundo Hadamard.

**Prova:**

- $\mathcal{A}$  segue bem definido, e linear.

- $\mathcal{A}$  segue sendo contínuo. De fato, seja  $f \in X$  e  $x \in [0, 1]$ . Então

$$|(\mathcal{A}f)(x)| \leq \|f\|_\infty$$

e, então  $\|\mathcal{A}f\|_Y = \sup_{x \in [0,1]} |(\mathcal{A}f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ . Assim,  $\mathcal{A}$  é limitado e, portanto, contínuo.

Agora, mostraremos que o problema não satisfaz a Estabilidade (condição (iii) na definição de Hadamard, a Definição 1). Para isso:

Tome  $g \in Y$ ,  $g_n(x) = g(x) + \epsilon_n \sin(nx)$ ,  $\epsilon_n > 0$ , e  $\epsilon_n \rightarrow 0$ . Então:

$$\begin{aligned} |(g_n - g)(x)| &= |g_n(x) - g(x)| \\ &= \epsilon_n |\sin(nx)| \\ &\leq \epsilon_n, \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Logo,  $\|g_n - g\|_Y = \sup_{x \in [0,1]} |(g_n - g)(x)| \leq \epsilon_n \rightarrow 0$ . Mas,  $g'_n = g'(x) + n\epsilon_n \cos(nx)$ . Daí,  $\forall x \in [0, 1]$ , segue que:

$$|(g_n - g)(x)| = |n\epsilon_n \cdot \cos(nx)| = n \cdot \epsilon_n |\cos(nx)|.$$

Então:  $\|g'_n - g'\|_X = n \cdot \epsilon_n (\sup_{x \in [0,1]} |\cos(nx)|) \rightarrow \infty$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Assim, com  $f = g'$ ,  $f_n = g'_n$ ,  $g \in C^1_*$ , segue que:

$$\mathcal{A}f = g, \mathcal{A}f_n = g_n, \|g_n - g\|_Y \rightarrow 0 \text{ e } \|f_n - f\|_X \rightarrow \infty$$

Ou seja, temos que  $f_n \not\rightarrow f$ .

■

Sendo a definição de Hadamard não tão simples de ser satisfeita, queremos então generalizá-la de modo a satisfazê-la de maneira menos restritiva. Para isso, introduzimos o seguinte tópico.

## 2.1 A Pseudo-Inversa de Moore-Penrose

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert reais e  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$  um operador linear e contínuo,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ , de modo que  $\mathcal{A}x = y$ , com  $y \in Y$ .

Para cumprir a sobrejetividade, de maneira generalizada, buscamos  $\hat{x} \in X$  tal que

$$\|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|\mathcal{A}x - y\|, \forall x \in X.$$

**Teorema 1.** *Sejam  $\hat{x} \in X$  e  $y \in Y$ . Então são equivalentes:*

$$(i) \|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|\mathcal{A}x - y\|, \forall x \in X.$$

$$(ii) \mathcal{A}\hat{x} = \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y).$$

$$(iii) \mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*y.$$

**Observações:** 1)  $\mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(\cdot) : Y \rightarrow Y$  é a projeção ortogonal em  $\overline{R(\mathcal{A})}$ .

2)  $\mathcal{A}^* : Y \rightarrow X$  é a adjunta de  $\mathcal{A}$ .

3) Note que  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*y \iff \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\hat{x} - y) = 0 \iff \mathcal{A}\hat{x} - y \in N(\mathcal{A}^*) = R(\mathcal{A})^\perp$ . Ou seja,  $\mathcal{A}\hat{x} - y$  é "normal", ou ortogonal à  $R(\mathcal{A})^\perp$  e, disto, chamamos a equação (iii) de Equação Normal.

**Prova:** (i)  $\implies$  (ii)

Supondo que (i) é verdadeira. Como  $\hat{x} \in X$  é fato que  $\mathcal{A}\hat{x} \in \overline{R(\mathcal{A})}$ . Seja  $w \in \overline{R(\mathcal{A})}$ . Tome  $(w_k) \subset R(\mathcal{A})$  tal que  $w_k \rightarrow w$ . Agora, considere  $(x_k) \in X$  uma sequência tal que  $\mathcal{A}x_k = w_k$ . Por (i):  $\|\mathcal{A}\hat{x} - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| = \|w_k - y\|, \forall k \in \mathbb{N}$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \|w - y\| &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} (w_k) - y \right\| \\ &= \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} (w_k - y) \right\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|w_k - y\| \geq \|\mathcal{A}\hat{x} - y\|. \end{aligned}$$

Portanto, segue o item (ii).

(ii)  $\implies$  (iii)

Supondo que o item (ii) seja verdadeiro, isto é,  $\mathcal{A}\hat{x} = \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y)$ , temos que  $(y - \mathcal{A}\hat{x}) \in \overline{R(\mathcal{A})}^\perp \subset R(\mathcal{A})^\perp$ . Assim, pela Observação 3) temos que  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*y$ , como queríamos mostrar.

(iii)  $\implies$  (i)

Seja  $\mathcal{A}^*\mathcal{A}\hat{x} = \mathcal{A}^*y$ . Tome  $x \in X$ , então, pela observação 3),  $\mathcal{A}\hat{x} - y \in R(\mathcal{A})^\perp$ . Mas,  $\mathcal{A}x - y = \mathcal{A}(x - \hat{x}) + \mathcal{A}\hat{x} - y$  e como  $\mathcal{A}(x - \hat{x}) \in R(\mathcal{A})$ , pelo teorema de Pitágoras segue que

$$\|\mathcal{A}x - y\|^2 = \|\mathcal{A}(x - \hat{x})\|^2 + \|\mathcal{A}\hat{x} - y\|^2 \geq \|\mathcal{A}\hat{x} - y\|^2.$$

Portanto, como desejávamos mostrar:

$$\|\mathcal{A}x - y\| \geq \|\mathcal{A}\hat{x} - y\|.$$

■

Podemos agora definir para cada  $y \in Y$  o conjunto de soluções de mínimos quadrados por  $S(y) := \{x \in X : \mathcal{A}^*\mathcal{A}x = \mathcal{A}^*y\}$ .

**Teorema 2.** *Seja  $y \in Y$ . Então:*

- (i)  $S(y)$  é convexo e fechado.
- (ii)  $S(y) \neq \emptyset \iff y \in R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp$ .

**Prova:** Veja Pauleti (2021, p. 85). ■

**Teorema 3.** *Suponha que  $y \in R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp$ . Então existe uma única solução de mínimos quadrados  $x^\dagger \in X$  tal que  $\|x^\dagger\| \leq \|x\|, \forall x \in S(y)$ . Isto é, o conjunto das soluções de mínimos quadrados admite um único vetor de norma mínima.*

**Prova:** Veja Pauleti (2021, p. 86). ■

Assim, podemos associar para cada  $y \in R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp$  um único  $x^\dagger \in S(y) \subset X$ , tal  $x^\dagger$  é dito solução de norma mínima. A pseudo-inversa de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^\dagger$ , é o operador que associa cada  $y$  ao  $x^\dagger$  respectivo conforme a definição a seguir. Observe, ainda, que se  $\mathcal{A}$  é inversível, então  $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^\dagger$ .

**Definição 2.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Definimos o conjunto  $D(\mathcal{A}^\dagger) := R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp$  e o operador  $\mathcal{A}^\dagger : D(\mathcal{A}^\dagger) \subset Y \rightarrow X$  tal que  $\mathcal{A}^\dagger y = x^\dagger$ . Onde  $\mathcal{A}^\dagger$  é chamado de **pseudo-inversa, inversa generalizada ou inversa de Moore-Penrose** e,  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  é chamada de **solução de norma mínima** para  $Ax = y$ .* ■

**Teorema 4.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Seja  $y \in D(\mathcal{A}^\dagger)$  e  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ . Então,  $x^\dagger \in N(\mathcal{A})^\perp$  e  $S(y) = x^\dagger + N(\mathcal{A})$ . Em particular,  $x^\dagger$  é a única solução de mínimos quadrados em  $N(\mathcal{A})^\perp$ .*

**Prova:** Veja Pauleti (2021, p. 87). ■

**Teorema 5.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Então,  $\mathcal{A}^\dagger$  possui as seguintes propriedades:*

- (i)  $D(\mathcal{A}^\dagger) = Y \iff R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ .
- (ii)  $R(\mathcal{A}^\dagger) = N(\mathcal{A})^\perp$ .
- (iii)  $N(\mathcal{A}^\dagger) = R(\mathcal{A})^\perp$ .
- (iv)  $\mathcal{A}^\dagger$  é linear.
- (v)  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínua  $\iff R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ .

**Prova:**

• (i)

( $\Rightarrow$ ) Suponha que  $D(\mathcal{A}^\dagger) = Y$ , então  $R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp = Y$ . Seja  $\bar{v} \in \overline{R(\mathcal{A})}$  qualquer,  $v \in R(\mathcal{A})$  e  $\hat{v} \in R(\mathcal{A})^\perp$  tais que  $\bar{v} = v + \hat{v}$  então, como  $\overline{R(\mathcal{A})} = (R(\mathcal{A})^\perp)^\perp$ , temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \bar{v}, \hat{v} \rangle = \langle v + \hat{v}, \hat{v} \rangle \\ &= \langle v, \hat{v} \rangle + \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle \\ &= \langle \hat{v}, \hat{v} \rangle. \end{aligned}$$

Assim,  $\hat{v} = 0$ . Portanto,  $\bar{v} \in R(\mathcal{A})$  e então  $\overline{R(\mathcal{A})} \subseteq R(\mathcal{A})$ . A inclusão  $R(\mathcal{A}) \subset \overline{R(\mathcal{A})}$  é imediata. Por fim, segue que  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ .

( $\Leftarrow$ ) Supondo, agora que,  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ . Como  $\overline{R(\mathcal{A})} = (R(\mathcal{A})^\perp)^\perp$ , segue que  $R(\mathcal{A}) = (R(\mathcal{A})^\perp)^\perp$ . Portanto,  $D(\mathcal{A}^\dagger) = R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp = Y$ .

• (ii)

$R(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq N(\mathcal{A})^\perp$ : Pelo Teorema 4 temos que  $x^\dagger \in N(\mathcal{A})^\perp$ , portanto  $R(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq N(\mathcal{A})^\perp$ , como desejado.

$N(\mathcal{A})^\perp \subseteq R(\mathcal{A}^\dagger)$ : Seja  $x \in N(\mathcal{A})^\perp$  e, seja  $y = \mathcal{A}x \in D(\mathcal{A}^\dagger)$  do que segue  $x \in S(y) = \mathcal{A}^\dagger y + N(\mathcal{A})$  (pelo Teorema 4). Agora, com  $x \in N(\mathcal{A})^\perp$  e  $x \in \{\mathcal{A}^\dagger y + N(\mathcal{A})\}$ , então  $x = \mathcal{A}^\dagger y \in R(\mathcal{A}^\dagger)$ .

Portanto,  $R(\mathcal{A}^\dagger) = N(\mathcal{A})^\perp$ .

• (iii)

$N(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq R(\mathcal{A})^\perp$ : Seja  $y \in N(\mathcal{A}^\dagger)$ . Temos que, para  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y = 0$ ,  $x^\dagger$  é solução de  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y$ . Disto, segue que, como  $x^\dagger = 0$  então  $\mathcal{A}^* y = 0$ , ou seja,  $y \in N(\mathcal{A}^*) = R(\mathcal{A})^\perp$ . Portanto,  $N(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq R(\mathcal{A})^\perp$ .

$R(\mathcal{A})^\perp \subseteq N(\mathcal{A}^\dagger)$ : Seja  $y \in R(\mathcal{A})^\perp = N(\mathcal{A}^*)$ . Então,  $\mathcal{A}^* y = 0$ . Temos que  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  é solução de norma mínima da equação normal  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x = \mathcal{A}^* y = 0$ . Assim,  $\mathcal{A}^\dagger y = x^\dagger = 0$ , e então  $y \in N(\mathcal{A}^\dagger)$ . Logo,  $R(\mathcal{A}^\dagger) \subseteq N(\mathcal{A}^\dagger)$ .

Portanto, segue a igualdade desejada  $N(\mathcal{A}^\dagger) = R(\mathcal{A})^\perp$ .

Para mostrar os próximos itens, precisamos mostrar um resultado auxiliar sobre projeções:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y = \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y), \quad y \in D(\mathcal{A}^\dagger).$$

De fato, seja  $y \in D(\mathcal{A}^\dagger) = R(\mathcal{A}) \oplus R(\mathcal{A})^\perp$ . Segue que, como  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ ,  $x^\dagger$  é solução de mínimos quadrados e, pelo Teorema 1, temos que:

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y = \mathcal{A}x^\dagger = \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y).$$

- (iv)

Para mostrar a linearidade de  $\mathcal{A}^\dagger$  considere  $y_1, y_2 \in D(\mathcal{A}^\dagger)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, pelo resultado auxiliar:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{A}^\dagger(y_1 + \lambda y_2)) &= \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y_1 + \lambda y_2) \\ &= \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y_1) + \lambda \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y_2) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{A}^\dagger y_1 + \lambda \mathcal{A}^\dagger y_2) \end{aligned}$$

Então,  $\mathcal{A}[(\mathcal{A}^\dagger(y_1 + \lambda y_2) - (\mathcal{A}^\dagger y_1 + \lambda \mathcal{A}^\dagger y_2))] = 0$ . Como pelo item anterior  $R(\mathcal{A}^\dagger) = N(\mathcal{A})^\perp$  e, este é um espaço vetorial, então

$$(\mathcal{A}^\dagger(y_1 + \lambda y_2) - (\mathcal{A}^\dagger y_1 + \lambda \mathcal{A}^\dagger y_2)) \subset R(\mathcal{A}^\dagger) \cap N(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A})^\perp \cap N(\mathcal{A}) = \{0\}$$

Assim, temos que

$$\mathcal{A}^\dagger(y_1 + \lambda y_2) = \mathcal{A}^\dagger y_1 + \lambda \mathcal{A}^\dagger y_2$$

Portanto,  $\mathcal{A}^\dagger$  é linear.

- (v) ( $\Rightarrow$ ) Suponha  $\mathcal{A}^\dagger$  contínua. Como  $\mathcal{A}^\dagger$  é linear, pelo item anterior, e está definida em um subespaço denso de  $Y$ , então existe  $E : Y \rightarrow X$  uma extensão linear e contínua de  $\mathcal{A}^\dagger$  tal que  $E(y) = \mathcal{A}^\dagger y, \forall y \in D(\mathcal{A}^\dagger)$ .

Agora, da continuidade de  $\mathcal{A} : X \rightarrow Y$ , temos que  $\mathcal{A}E : Y \rightarrow Y$  é também contínua.

Assim,  $\forall y \in D(\mathcal{A}^\dagger)$  segue que:

$$\mathcal{A}E y = \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger y = \mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y).$$

Como  $\mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(\cdot)$  é um operador contínuo, então  $\mathcal{A}E$  e  $\mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}$  são funções contínuas e iguais em um subespaço denso de  $Y$  e, então são iguais em  $Y$ .

Disto, temos que:

$$\begin{aligned} \overline{R(\mathcal{A})} &= R\left(\mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(\cdot)\right) \\ &= R(\mathcal{A}E) \subset R(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

e, então,  $\overline{R(\mathcal{A})} = R(\mathcal{A})$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ . Defina:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{A}} : N(\mathcal{A})^\perp &\rightarrow R(\mathcal{A}) \\ x &\mapsto \mathcal{A}x. \end{aligned}$$

Então:

- $\hat{\mathcal{A}}$  está bem definida.
- $\hat{\mathcal{A}}$  é linear (coincide com  $\mathcal{A}$  em  $N(\mathcal{A})^\perp$  e  $\mathcal{A}$  é linear).

•  $\hat{\mathcal{A}}$  é injetiva, pois se  $\bar{x} \in N(\mathcal{A})^\perp$  é tal que  $\hat{\mathcal{A}}\bar{x} = 0$  então  $\bar{x} \in N(\mathcal{A})^\perp \cap N(\mathcal{A}) = \{0\}$ . Portanto, injetiva.

•  $\hat{\mathcal{A}}$  é sobrejetiva. Seja  $y \in R(\mathcal{A})$ , então existe  $x \in X$  tal que  $\mathcal{A}x = y$ . Como  $N(\mathcal{A})$  é fechado,  $X = N(\mathcal{A}) \oplus N(\mathcal{A})^\perp$ . Então  $x = x_1 + x_2$ ,  $x_1 \in N(\mathcal{A})$  e  $x_2 \in N(\mathcal{A})^\perp$ . Disto, segue que

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{A}}x_2 &= \mathcal{A}x_2 \\ &= \mathcal{A}x_2 + 0 \\ &= \mathcal{A}x_2 + \mathcal{A}x_1 \\ &= \mathcal{A}(x_1 + x_2) \\ &= \mathcal{A}x = y.\end{aligned}$$

Portanto,  $\hat{\mathcal{A}}$  é sobrejetiva.

•  $\hat{\mathcal{A}}$  é limitada, pois se  $x \in N(\mathcal{A})^\perp$

$$\|\hat{\mathcal{A}}x\| = \|\mathcal{A}x\| \leq \|\mathcal{A}\| \|x\|.$$

Assim, como  $N(\mathcal{A})^\perp$  e  $R(\mathcal{A})$  são subespaços fechados (por hipótese  $R(\mathcal{A})$  é fechado), e por serem subespaços de espaços de Banach são também Banach. Logo,  $\hat{\mathcal{A}}^{-1} : R(\mathcal{A}) \rightarrow N(\mathcal{A})^\perp$  é um operador linear e contínuo. Agora, como  $R(\mathcal{A}^\dagger) = N(\mathcal{A})^\perp$ , temos que  $\hat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger$  está bem definido em  $D(\mathcal{A}^\dagger) = Y$  (pelo item (i)).

Assim,  $\hat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger : Y \rightarrow Y$  está bem definido. Daí,  $\forall y \in Y$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}^\dagger y\| &= \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}(\hat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y)\| \\ &\leq \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \cdot \|\hat{\mathcal{A}}\mathcal{A}^\dagger y\| \\ &= \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \cdot \|\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger y\| \\ &= \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \cdot \|\mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}(y)\| \\ &\leq \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \cdot \|\mathbb{P}_{\overline{R(\mathcal{A})}}\| \cdot \|y\| \\ &= \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \cdot 1 \cdot \|y\| = \|\hat{\mathcal{A}}^{-1}\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínua. ■

Note, que para  $R(\mathcal{A}) \subset Y$  fechada segue que  $D(\mathcal{A}^\dagger) = Y$  e então a equação  $\mathcal{A}x = y$  possui única solução generalizada  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ , para todo  $y \in Y$ . Além disso, tal solução depende continuamente dos dados, visto o item (v) do teorema acima. Assim, para  $R(\mathcal{A})$  fechada, a solução generalizada  $x^\dagger$  satisfaz as condições da definição segundo Hadamard. Isso possibilita a definição a seguir.

**Definição 3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . A tripla  $(\mathcal{A}, X, Y)$  é chamada de **problema bem posto, segundo Nashed**, se  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ . Caso contrário  $(\mathcal{A}, X, Y)$  é um problema mal posto.*

■

A partir de agora, sempre que for mencionado um problema bem posto, será com relação à Definição 3, a definição segundo Nashed (1987).

**Teorema 6.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Sejam  $M = \overline{R(\mathcal{A})}$  e  $W = N(\mathcal{A})^\perp$ . Então,  $\mathcal{A}^\dagger$  é caracterizada pelas chamadas equações de Moore-Penrose:*

$$(i) \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathbb{P}_M|_{D(\mathcal{A}^\dagger)}(\cdot)$$

$$(ii) \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathbb{P}_W(\cdot).$$

$$(iii) \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{A}.$$

$$(iv) \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger.$$

**Prova:** Veja em Pauleti (2021, p. 90).

■

Temos, portanto, a generalização da definição de um problema inverso bem posto. Assim, temos uma caracterização para a pseudo-inversa  $\mathcal{A}^\dagger$ . Em particular, para operadores compactos entre espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{K}(X, Y)$ , a tripla  $(\mathcal{A}, X, Y)$  é um problema bem posto se e somente se  $R(\mathcal{A})$  tem dimensão finita, veja em Margotti, Hafemann e Santana (2023, p. 77). Ou seja, temos ainda em maioria problemas inversos mal postos.

### 3 Métodos de Regularização de Problemas Lineares

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert reais e  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Considere, o problema inverso  $\mathcal{A}x = y$ , com  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$ . Temos que  $y^\delta \in Y$  é uma "perturbação" de  $y$ . Nosso objetivo é determinar uma aproximação para  $x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$  a partir de  $y^\delta$ . Sabemos que se a imagem de  $\mathcal{A}$  é fechada, temos que  $y^\delta \in D(\mathcal{A}^\dagger) = Y$ , o que implica em o problema ser bem posto e, da continuidade de  $\mathcal{A}^\dagger$ , podemos aproximar a solução generalizada por um vetor  $x_\delta^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y^\delta$  de maneira que vale a convergência:

$$\|x_\delta^\dagger - x^\dagger\| \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0.$$

Visto que:

$$\begin{aligned} \|x_\delta^\dagger - x^\dagger\| &= \|\mathcal{A}^\dagger y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| \\ &= \|\mathcal{A}^\dagger (y^\delta - y)\| \\ &\leq \|\mathcal{A}^\dagger\| \|y^\delta - y\| \leq \|\mathcal{A}^\dagger\| \delta. \end{aligned}$$

Porém, a continuidade da pseudo-inversa não é garantida quando  $R(\mathcal{A})$  não é fechada, impossibilitando uma boa definição da norma do operador. E, ainda, o problema sendo mal posto implica na possibilidade de  $y^\delta$  não pertencer à imagem de  $\mathcal{A}$ , visto que  $D(\mathcal{A}^\dagger) \neq Y$ . Como meio para assegurar a convergência acima, isto é, a aproximação da solução generalizada, buscamos substituir a pseudo-inversa  $\mathcal{A}^\dagger$  por um operador de reconstrução.

**Definição 4.** Um **operador de reconstrução** para o problema inverso  $\mathcal{A}x = y$  é um operador contínuo (não necessariamente linear)  $\mathcal{R} : Y \rightarrow X$  que satisfaz  $\mathcal{R}(0) = 0$ .

■

Note que se o problema inverso for bem posto, uma opção para o operador de reconstrução será  $\mathcal{R} = \mathcal{A}^\dagger$ . Caso contrário, buscamos aproximar  $\mathcal{A}^\dagger$  por uma família de operadores de reconstrução (conforme definição a seguir).

**Definição 5.** Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Seja  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}$  uma família de Operadores de Reconstrução. Se existe uma função  $\alpha : (0, \infty) \times Y \rightarrow (0, \infty)$  tal que para cada  $y \in R(\mathcal{A})$  vale

$$\sup \{ \alpha(\delta, y^\delta) : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0,$$

e

$$\sup \{ \|\mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0,$$

então, o par  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  é chamado de **Método de Regularização** para o operador  $\mathcal{A}^\dagger$ . Se cada  $\mathcal{R}_\alpha$  for linear, chamamos de **Regularização Linear**. A função  $\alpha$  é chamada **escolha de parâmetro**, e o valor  $\alpha(\delta, y^\delta)$  é chamado de **Parâmetro de Regularização**. Se  $\alpha$  depende apenas de  $\delta$  dizemos que é uma escolha de parâmetros a priori, e se depende de  $\delta$  e  $y^\delta$  dizemos que é uma escolha a posteriori. ■

**Lema 1.** *Sejam  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$  e  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  uma regularização linear para  $\mathcal{A}^\dagger$ . Se  $R(\mathcal{A}) \neq \overline{R(\mathcal{A})}$ , então a família  $(\|\mathcal{R}_\alpha\|)_{\alpha>0}$  é não limitada.*

**Prova:** Veja em Rieder (2003, p. 54). ■

Para uma regularização linear, o **erro de regularização**  $\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\|$  é limitado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| &\leq \underbrace{\|\mathcal{R}_\alpha y^\delta - \mathcal{R}_\alpha y\|}_{\text{erro nos dados}} + \underbrace{\|\mathcal{R}_\alpha y - \mathcal{A}^\dagger y\|}_{\text{erro de aproximação}} \\ &= \|\mathcal{R}_\alpha(y^\delta - y)\| + \|\mathcal{R}_\alpha y - \mathcal{A}^\dagger y\| \\ &\leq \|\mathcal{R}_\alpha\| \delta + \|\mathcal{R}_\alpha y - \mathcal{A}^\dagger y\|. \end{aligned}$$

Se  $y - y^\delta \notin D(\mathcal{A}^\dagger)$  o erro nos dados tende ao infinito, e o erro de aproximação tende a zero quando o  $\alpha \rightarrow 0$ . Mas, para  $\alpha \rightarrow \infty$ , o erro de aproximação pode ser muito grande, veja em Rieder (2003, p.54). Assim, nossa intenção é encontrar um  $\alpha$  **ótimo** responsável por minimizar o erro total.

Veremos a seguir que, além da possibilidade da escolha de parâmetros  $\alpha$  depender ou não de  $y^\delta$ , quando  $\alpha$  não depender do nível de ruídos  $\delta$ , uma regularização existirá apenas no caso de termos um problema bem posto.

**Teorema 7.** *(Veto de Bakushinskii)*

*Seja  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$  com  $X, Y$  espaços de Hilbert reais. Então existe uma regularização  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  para  $\mathcal{A}^\dagger$  de modo que  $\alpha$  não depende de  $\delta$  se, e somente se,  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ .*

**Prova:**

( $\implies$ ) Seja  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  uma regularização e, como  $\alpha$  não depende de  $\delta$ , consideremos  $\alpha = \alpha(y^\delta)$ . Defina uma sequência  $(\delta_k)_{k+1}^\infty \subset (0, \infty)$ , que satisfaz  $\delta \rightarrow 0^+$ . Da definição de regularização segue que,  $\forall y \in R(\mathcal{A})$ ,

$$\sup \left\{ \|\mathcal{R}_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - \mathcal{A}^\dagger y\| : y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \right\} \rightarrow 0, \text{ quando } \delta \rightarrow 0^+. \quad (3.1)$$

Em particular, para  $y \in R(\mathcal{A})$ :  $\mathcal{R}_{\alpha(y)} y = \mathcal{A}^\dagger y$ .

Agora, seja  $y \in R(\mathcal{A})$  e considere a sequência  $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq R(\mathcal{A})$  tal que  $y_n \rightarrow y$ . Considere, ainda, uma sequência  $(\mathcal{A}^\dagger y_n)$  de modo que  $\delta_n := \|y - y_n\|$ , e disto  $\delta_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . De (3.1), segue que  $\mathcal{A}^\dagger y_n = \mathcal{R}_{\alpha(y_n)} y_n \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Logo,  $\mathcal{A}^\dagger y_n \rightarrow \mathcal{A}^\dagger y$ . Assim, temos a continuidade de  $\mathcal{A}^\dagger$  em  $y$ , e portanto em  $Y$ , já que  $\mathcal{A}^\dagger$  é linear. Por fim, pelo item (iv) do Teorema 5 segue que  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ .

( $\Leftarrow$ ) Seja  $R(\mathcal{A}) = \overline{R(\mathcal{A})}$ . Pelo item (i) do Teorema 5 segue que  $D(\mathcal{A}^\dagger) = Y$  e, pelo item (v) do Teorema 5,  $\mathcal{A}^\dagger$  é contínua. Assim, para qualquer  $\alpha$  que independe de  $\delta$ , tomando  $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{A}^\dagger$ , temos um método de regularização. ■

**Teorema 8.** *Sejam  $X, Y$  espaços de Hilbert e  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Suponha que  $R(\mathcal{A}) \neq \overline{R(\mathcal{A})}$  e seja  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha>0}, \alpha)$  uma regularização para  $\mathcal{A}^\dagger$  com  $R_\alpha 0 = 0, \forall \alpha > 0$ . Então **não existe** função  $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ , com  $\lim_{\delta \rightarrow 0} h(\delta) = 0$  tal que*

$$\sup \left\{ \|\mathcal{A}^\dagger y - \mathcal{R}_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta\| : y \in R(\mathcal{A}), \|y\| \leq 1, y^\delta \in Y, \|y - y^\delta\| \leq \delta \right\} \leq h(\delta).$$

**Prova:** Veja Rieder (2003, p.55). ■

Note que, por esse teorema, não é possível definir a velocidade de convergência da regularização de um problema mal posto uniformemente para todos os vetores de  $R(\mathcal{A})$ . Para isso, é necessário que se adicionem restrições com relação à solução generalizada, as quais são chamadas **condições de fonte**. Condições estas que restringem, de forma conveniente, o espaço que contém a solução generalizada, possibilitando a avaliação de qual o melhor método de regularização para um determinado problema inverso. Isso pode ser realizado comparando os métodos através do chamado **erro do pior caso**.

Nesse trabalho não estudaremos, taxas de convergência, condições de fonte e o erro do pior caso, mencionados anteriormente. Para uma visão geral desses temas, consulte Kirsch (2011), seção 1.3.

## 3.1 Métodos Clássicos

### 3.1.1 Método de Tikhonov

Sejam  $X, Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Considere o problema inverso  $\mathcal{A}x = y$ , com  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $\|y^\delta - y\| \leq \delta, \delta > 0$ . Para cada  $\alpha > 0$ , o funcional de Tikhonov  $T_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$T_\alpha(x) := \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x\|^2 \quad (3.2)$$

Esse método busca aproximar a solução do problema inverso através do minimizador do funcional  $T_\alpha$ . Temos  $T_\alpha$  um funcional estritamente convexo e coercivo. Pela Proposição 1.2, em Ekeland e Témam (1999, p.35), segue que  $T_\alpha$  possui um único minimizador.

Defina  $x_\alpha := \arg \min\{T_\alpha(x) : x \in X\}$ .

Sendo  $T_\alpha$  Gâteaux Diferenciável, a derivada de Gâteaux ( $\nabla T_\alpha$ ) existe, e  $\nabla T_\alpha(x_\alpha) = 0$ . No que se segue, vamos determinar a derivada de Gâteaux de  $T_\alpha$ , sejam  $x, v \in X$ . Então, a derivada direcional de  $T_\alpha$  no ponto  $x$  e na direção de  $v$  é dada por:

$$DT_\alpha(x, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_\alpha(x + tv) - T_\alpha(x)}{t} \quad (3.3)$$

Temos que:

$$\begin{aligned} T_\alpha(x + tv) - T_\alpha(x) &= \frac{1}{2} \|\mathcal{A}(x + tv) - y^\delta\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x + tv\|^2 - \frac{1}{2} \|Ax - y^\delta\|^2 - \alpha \frac{1}{2} \|x\|^2 \\ &= \frac{1}{2} [\|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 + 2\langle \mathcal{A}x - y^\delta, \mathcal{A}(tv) \rangle + \|\mathcal{A}(tv)\|^2 + \alpha \|x\|^2 \\ &\quad + 2\alpha \langle x, tv \rangle + \alpha \|tv\|^2 - \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 - \alpha \|x\|^2] \\ &= \frac{1}{2} [2t \langle \mathcal{A}x - y^\delta, \mathcal{A}v \rangle + t^2 \|\mathcal{A}v\|^2 + 2t\alpha \langle x, v \rangle + t^2 \alpha \|v\|^2]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De (3.4), em (3.3), temos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_\alpha(x + tv) - T_\alpha(x)}{t} &= \frac{1}{2} [2 \langle \mathcal{A}x - y^\delta, \mathcal{A}v \rangle + 2\alpha \langle x, v \rangle] \\ &= \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^\delta), v \rangle + \alpha \langle x, v \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^\delta) + \alpha x, v \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde  $\mathcal{A}^* : Y \rightarrow X$  é a adjunta de  $\mathcal{A}$ . Por  $DT_\alpha(x, v) = \langle \nabla T_\alpha(x), v \rangle$ , juntamente com (3.5) segue que  $\langle \nabla T_\alpha(x), v \rangle = \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^\delta) + \alpha x, v \rangle, \forall x \in X$ . Como, para  $x^\delta$  temos  $\nabla T_\alpha(x^\delta) = 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \nabla T_\alpha(x^\delta) &= \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x^\delta - y^\delta) + \alpha x^\delta = 0 \\ &\implies (\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha I)x^\delta = \mathcal{A}^*y^\delta \\ &\implies x^\delta = (\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha I)^{-1} \mathcal{A}^*y^\delta. \end{aligned}$$

E, então, de  $x^\delta = \mathcal{R}_\alpha y^\delta$  segue que  $\mathcal{R}_\alpha = (\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \alpha I)^{-1} \mathcal{A}^*$ .  $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}$  é a família de Operadores de Reconstrução.

**Teorema 9.** *Suponha que  $\alpha = \alpha(\delta) \rightarrow 0$  e  $\frac{\delta^2}{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ . Então,  $x^\delta \rightarrow x^\dagger = \mathcal{A}^\dagger y$ ,  $\forall y \in R(\mathcal{A})$  e  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ .*

**Prova:** Veja em Margotti, Hafemann e Santana (2023, p.87). ■

No método de Tikhonov clássico temos uma escolha de parâmetro *a priori*, isto é, a escolha do parâmetro de regularização é em função do ruído  $\delta$  sem depender do vetor com ruídos  $y^\delta$ . Assim, para  $\mathcal{R}_\alpha = (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1} \mathcal{A}^*$ , com  $\alpha$  de acordo com o teorema acima, o par  $((\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha > 0}, \alpha)$ , satisfaz as condições da Definição 5 e é, portanto, um método de regularização.

### 3.1.2 Método de Tikhonov Iterado

Sejam  $X, Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Como antes, considere o problema inverso  $\mathcal{A}x = y$ , com  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $\|y^\delta - y\| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$ . O Método de Tikhonov Iterado, é um método que gera uma sequência aproximando-se de  $x^\dagger$ , isto é, convergindo à solução generalizada do problema inverso. Definimos o seguinte funcional  $T_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$T_k(x) := \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2 + \alpha_k \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2, k \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Tomamos  $x_0 \in X$  um chute inicial, e  $x_1$  obtido a partir do  $x_0$ . Note que de modo análogo ao Tikhonov Clássico,  $T_k$  é uma função coerciva e estritamente convexa. Assim, podemos definir  $x_1$  o minimizador de  $T_0$ . Assim, para  $k \in \mathbb{N}$ , definimos:

$$x_{k+1} := \arg \min \{T_k(x) : x \in X\}. \quad (3.7)$$

No caso iterado, a escolha da sequência  $(\alpha_k) \subset \mathbb{R}$  pode ser feita de diferentes formas. Para  $(\alpha_k)$  constante dizemos que o método é **iterado estacionário**, caso contrário, é dito **iterado não-estacionário**. Porém, aqui nos limitaremos ao caso estacionário. Acerca do iterado não-estacionário, o conteúdo pode ser encontrado em Engl, Hanke e Neubauer (1996).

Como  $T_k$  é também Gâteaux diferenciável, para  $x_{k+1}$  segue que  $\nabla T_k(x_{k+1}) = 0$ . Seguindo os mesmos passos do caso clássico, temos que  $\nabla T_k(x_{k+1}) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)x_{k+1} - \alpha x_k - \mathcal{A}^* y^\delta$ . Disto:

$$\nabla T_k(x_{k+1}) = (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)x_{k+1} - \alpha x_k - \mathcal{A}^* y^\delta = 0.$$

Assim,  $(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)x_{k+1} = \alpha x_k + \mathcal{A}^* y^\delta$ , o que nos dá:

$$x_{k+1} = (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}(\alpha x_k + \mathcal{A}^* y^\delta). \quad (3.8)$$

Agora, assumindo para o chute inicial  $x_0 = 0$ , com  $\alpha > 0$  constante. Por indução, mostraremos que  $x_k = \mathcal{R}_k y^\delta$ , onde  $\mathcal{R}_k = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^k [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^*$ .

De (3.8), segue que:

Para  $k = 0$

$$\begin{aligned} x_1 &= (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1} (\alpha x_0 + \mathcal{A}^* y^\delta) \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^1 [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta. \end{aligned}$$

Supondo que para  $k$  vale a hipótese de indução:

$$x_k = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^k [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta.$$

Para  $k + 1$ , pela hipótese de indução, segue que:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1} (\mathcal{A}^* y^\delta + \alpha x_k) \\ &= (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1} (\mathcal{A}^* y^\delta) \\ &\quad + (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1} \left( \alpha \left( \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^k [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta \right) \right) \\ &= x_1 + (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1} \left( \sum_{j=1}^k [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta \right) \\ &= x_1 + \sum_{j=1}^k \alpha^j [(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^{j+1} \mathcal{A}^* y^\delta \\ &= x_1 + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^k [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^{j+1} \mathcal{A}^* y^\delta \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^1 [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=2}^{k+1} [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{k+1} [\alpha (\mathcal{A}^* \mathcal{A} + \alpha I)^{-1}]^j \mathcal{A}^* y^\delta. \end{aligned}$$

Mostramos, assim, o desejado.

Agora, para  $x_{k+1}$  como definido em (3.7) segue que  $T_k(x_{k+1}) \leq T_k(x_k)$ , isto é,

$$\frac{1}{2} \|\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x_k - y^\delta\|^2 + \alpha \frac{1}{2} \|x_k - x_k\|^2.$$

Assim,  $\|\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta\|^2 + \alpha \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq \|\mathcal{A}x_k - y^\delta\|^2$ .

Agora, como  $\alpha \|x_{k+1} - x_k\|^2 \geq 0$ , obtemos a **monotonia do resíduo**:

$$\|\mathcal{A}x_{k+1} - y^\delta\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y^\delta\|.$$

É possível mostrar, ainda, que para casos sem ruídos, isto é, para  $\delta = 0$ , temos:

$$x_k \rightarrow x^\dagger, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Para o caso com ruídos é necessário introduzir um critério de parada, sendo mais usual o chamado **princípio da discrepância**<sup>1</sup> que consiste em fixarmos uma constante  $\tau > 1$  de modo que a iteração pára ao atingirmos uma determinada cota para o resíduo. Definimos para isso  $k_\delta$  como:

$$k_\delta := \inf \{ k \in \mathbb{N} : \|\mathcal{A}x_k - y^\delta\| \leq \tau\delta \}. \quad (3.9)$$

Desse modo, quando  $\delta > 0$ , segue que:

$$x_{k_\delta} \rightarrow x^\dagger, \text{ quando } \delta \rightarrow 0.$$

Satisfazendo a Definição 5.

Portanto, temos que o Método de Tikhonov é um método de regularização.

### 3.1.3 Método do Gradiente

Sejam  $X, Y$  espaços de Hilbert,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Considere o problema inverso  $\mathcal{A}x = y$ , com  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $\|y - y^\delta\| \leq \delta, \delta > 0$ . Seja o funcional  $\mathcal{F} : X \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^2. \quad (3.10)$$

Quanto ao seu gradiente, procedendo como em (3.3), obtemos:

$$\nabla \mathcal{F}(x) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y^\delta). \quad (3.11)$$

Assim, para  $x_0$  um chute inicial e um tamanho de passo  $\lambda_k > 0$  o Método do Gradiente é definido por:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \lambda_k \nabla \mathcal{F}(x_k) \\ &= x_k - \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y^\delta). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Esse método é chamado Método do Gradiente, pois usamos o oposto do gradiente da  $\mathcal{F}$  no ponto  $x$ , isto é, como  $\mathcal{F}$  é diferenciável à Gâteaux e o gradiente da  $\mathcal{F}$  em  $x$  é a direção de máxima subida, o oposto do gradiente nos fornece a direção de máxima descida a partir de  $x$ , de modo que a sequência gerada pelo método aproxima-se do minimizador de  $\mathcal{F}$ .

A seguir, analisaremos a convergência da sequência gerada pelo método do gradiente. Para isso, vamos supor inicialmente que não haja ruídos nos dados, ou seja,  $\delta = 0$ .

<sup>1</sup> É a generalização do chamado princípio de Morozov e pode ser encontrado em Engl, Hanke e Neubauer (1996, p. 83), e em Kirsch (2011, p. 46).

**Proposição 1.** *Seja  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  uma possível sequência gerada pelo Método do Gradiente e considere  $\lambda_k^{\max} := 2 \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}$ . Então, para todo  $k$ , tal que  $\lambda_k \leq \lambda_k^{\max}$ , vale a **monotonia do erro**, isto é:*

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 \leq \|x_k - x^\dagger\|^2.$$

**Prova:** Considere  $x^\dagger$  tal que  $\mathcal{A}x^\dagger = y$  (lembre que  $y \in R(\mathcal{A})$ ), e  $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)$  como definido acima, em (3.12). De,

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 &= \|x_{k+1} - x_k + x_k - x^\dagger\|^2 \\ &= \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_k - x^\dagger \rangle + \|x_k - x^\dagger\|^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Temos,  $\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 = \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_k - x^\dagger \rangle$ . Agora, note que para termos um decrescimento a cada iteração em relação ao erro de aproximação da solução, é necessário e suficiente que

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_k - x^\dagger \rangle \leq 0. \quad (3.14)$$

Então, como  $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)$ , segue que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_k\|^2 + 2\langle x_{k+1} - x_k, x_k - x^\dagger \rangle &= \|- \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \\ &\quad + 2\langle -\lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y), x_k - x^\dagger \rangle \\ &= \lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda_k \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y), x_k - x^\dagger \rangle \\ &= \lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda_k \langle \mathcal{A}x_k - y, \mathcal{A}(x_k - x^\dagger) \rangle \\ &= \lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \\ &\quad - 2\lambda_k \langle \mathcal{A}x_k - y, \mathcal{A}x_k - y \rangle \\ &= \lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Assim, para que tenhamos (3.14), é necessário e suficiente que

$$\lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 \leq 0.$$

Mas,  $\lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 \leq 0$  se, e somente se,  $\lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \leq 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2$ . Assim, temos:

$$\lambda_k^2 \leq \frac{2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}.$$

Ou seja, (3.14) segue para

$$\lambda_k \leq 2 \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}.$$

Agora, definindo

$$\lambda_k^{\max} = 2 \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2},$$

temos que para todo tamanho de passo  $\lambda_k$  tal que  $0 < \lambda_k \leq \lambda_k^{\max}$ , obtemos a monotonia do erro

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 \leq \|x_k - x^\dagger\|^2.$$

■

Ao considerarmos  $\hat{\lambda}_k^{\max} := (1 - c_0)\lambda_k^{\max}$ , para  $\lambda_k \leq \hat{\lambda}_k^{\max}$  e  $0 < c_0 < 1$ , obtemos, ainda, o **ganho**

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 \leq -2c_0\lambda_k\|\mathcal{A}x_k - y\|^2. \quad (3.16)$$

De fato:

**Prova:** Por (3.13),

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 = \lambda_k^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2. \quad (3.17)$$

Como  $\lambda_k \leq \hat{\lambda}_k^{\max} := (1 - c_0)\lambda_k^{\max}$ , segue que:

$$\begin{aligned} (3.17) &\leq \lambda_k \hat{\lambda}_k^{\max} \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 \\ &= \lambda_k [(1 - c_0)\lambda_k^{\max}] \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 \\ &= \lambda_k (1 - c_0) 2 \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2} \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 \\ &= 2\lambda_k (1 - c_0) \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 - 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 \\ &= 2\lambda_k \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 [(1 - c_0) - 1] \\ &= -2\lambda_k c_0 \|\mathcal{A}x_k - y\|^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 - \|x_k - x^\dagger\|^2 \leq -2\lambda_k c_0 \|\mathcal{A}x_k - y\|^2.$$

Portanto, além da monotonia, temos também uma cota para a diferença entre os erros das iterações do método.

■

A variação do tamanho de passo  $\lambda_k$  define diferentes tipos do método do gradiente. Os mais usuais são: Landweber, Máxima descida e Erro mínimo.

### Método do tipo Landweber:

Nesta variação do Método do Gradiente<sup>2</sup>, como motivação para a escolha do tamanho de passo  $\lambda_k$ , consideramos  $c_0 \leq \frac{1}{2}$ . Do que segue:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_k^{\max} &= 2(1 - c_0) \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2} \\ &\geq 2(1 - c_0) \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*\|^2 \|\mathcal{A}x_k - y\|^2} \\ &= 2(1 - c_0) \frac{1}{\|\mathcal{A}^*\|^2} \\ &\geq \frac{1}{\|\mathcal{A}^*\|^2} = \frac{1}{\|\mathcal{A}\|^2}\end{aligned}$$

Assim, satisfazendo  $\lambda_{LW} = \lambda_k \leq \lambda_k^{\max}$ , o passo desse método é definido por

$$\lambda_{LW} = \frac{1}{\|\mathcal{A}\|^2}.$$

### Método de Máxima Descida

Sejam  $x_k \in X$  e  $y \in Y$ . Considere a função  $G_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $G_k(\lambda) = \|\mathcal{A}x_\lambda - y\|^2$  onde  $x_\lambda := x_k - \lambda\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)$ . Definimos  $\lambda_{SD} := \arg \min \{G_k(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , que existe e é único, visto a convexidade estrita e coercividade de  $G_k$ . Podemos explicitá-lo, e o faremos a seguir. Note que:

$$\begin{aligned}G_k(\lambda) &= \|\mathcal{A}x_\lambda - y\|^2 \\ &= \|\mathcal{A}(x_k - \lambda\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)) - y\|^2 \\ &= \|\mathcal{A}x_k - y - \lambda\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2 \\ &= \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 - 2\langle \mathcal{A}x_k - y, \lambda\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)) \rangle + \|\lambda\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2 \\ &= \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 - 2\lambda\langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y), \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y) \rangle + \lambda^2\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2 \\ &= \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 - 2\lambda\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 + \lambda^2\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2.\end{aligned}$$

Agora, de  $\nabla\mathcal{F}(x) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y)$ , (3.11), segue que:

$$G_k(\lambda) = \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 - 2\lambda\|\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2 + \lambda^2\|\mathcal{A}\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2.$$

Então,

$$G'(\lambda_{SD}) = -2\|\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2 + 2\lambda_{SD}\|\mathcal{A}\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2.$$

Assim, para  $\lambda_{SD} := \arg \min \{G_k(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , temos que:

$$G'(\lambda_{SD}) = -2\|\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2 + 2\lambda_{SD}\|\mathcal{A}\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2 = 0.$$

Obtemos, por fim:

$$\lambda_{SD} = \frac{\|\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2}{\|\mathcal{A}\nabla\mathcal{F}(x_k)\|^2} = \frac{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}{\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2}.$$

<sup>2</sup> Variação proposta em Landweber (1951). O tipo Landweber, juntamente com as variações a seguir são encontradas em Jin (2012) e também são testadas em Margotti (2018).

Desse modo, o tamanho de passo que define a variação Máxima Descida é dado por  $\lambda_{SD}$ .

### Método do Erro Mínimo

Nesta variação do método, definimos o funcional  $H_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como:

$$H_k(\lambda) := \frac{1}{2} \|x_\lambda - x^\dagger\|^2, \text{ com } x_\lambda := x_k - \lambda \nabla \mathcal{F}(x_k) \text{ e } \nabla \mathcal{F}(x) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x - y).$$

Considere  $x^\dagger$  tal que  $\mathcal{A}x^\dagger = y$ ,  $y \in R(\mathcal{A})$ . Temos:

$$\begin{aligned} H_k(\lambda) &= \frac{1}{2} \|x_\lambda - x^\dagger\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x_k - \lambda \nabla \mathcal{F}(x_k) - x^\dagger\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \|x_k - x^\dagger\|^2 - 2\langle x_k - x^\dagger, \lambda \nabla \mathcal{F}(x_k) \rangle + \lambda^2 \|\nabla \mathcal{F}(x_k)\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \|x_k - x^\dagger\|^2 - 2\lambda \langle x_k - x^\dagger, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y) \rangle + \lambda^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \|x_k - x^\dagger\|^2 - \lambda \langle \mathcal{A}(x_k - x^\dagger), (\mathcal{A}x_k - y) \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x_k - x^\dagger\|^2 - \lambda \langle \mathcal{A}x_k - \mathcal{A}x^\dagger, (\mathcal{A}x_k - y) \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x_k - x^\dagger\|^2 - \lambda \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2. \end{aligned}$$

Assim, temos  $H_k(\lambda) = \frac{1}{2} \|x_k - x^\dagger\|^2 - \lambda \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 + \frac{1}{2} \lambda^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2$ , que é contínua, estritamente convexa e coerciva, e podemos definir  $\lambda_{ME} := \arg \min \{H_k(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ , o mínimo global de  $H_k$ . Note que  $x_{k+1} = x_{\lambda_{ME}}$  é o minimizador do erro de iteração na direção do  $-\nabla \mathcal{F}(x_k)$ . Seguindo, temos  $H'_k(\lambda) = -\|\mathcal{A}x_k - y\|^2 + \lambda \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2$  e, pela definição de  $\lambda_{ME}$ ,  $H'_k(\lambda_{ME}) = 0$ . Assim, o tamanho de passo  $\lambda_k = \lambda_{ME}$ , que define a variação Erro Mínimo é definido por:

$$\lambda_{ME} := \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}.$$

Vejam agora a relação entre os tamanhos de passos das variações.

**Proposição 2.** *Seja  $c_0 \leq \frac{1}{2}$  e sejam  $\lambda_{LW}$ ,  $\lambda_{SD}$ ,  $\lambda_{ME}$  e  $\hat{\lambda}_k^{max}$  como definidos acima. Então*

$$0 < \lambda_{LW} \leq \lambda_{SD} \leq \lambda_{ME} \leq \hat{\lambda}_k^{max}.$$

**Prova:** Como definidos anteriormente, sejam  $\hat{\lambda}_k^{max} = (1 - c_0)\lambda_k^{max} = 2(1 - c_0) \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}$ ,  $\lambda_{ME} = \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}$ ,  $\lambda_{SD} = \frac{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}{\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2}$  e  $\lambda_{LW} = \frac{1}{\|\mathcal{A}\|^2}$ .

Temos que,

$$\begin{aligned} \lambda_{SD} &= \frac{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}{\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2} \\ &\geq \frac{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}{\|\mathcal{A}\|^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|\mathcal{A}\|^2} = \lambda_{LW} > 0.$$

Mostrando, assim, que  $0 < \lambda_{LW} \leq \lambda_{SD}$ .

Agora, note que teremos a desigualdade  $\lambda_{SD} \leq \lambda_{ME}$ , isto é,  $\frac{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}{\|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|^2} \leq \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}$  se, e somente se  $\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2 \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\|$ . De fato, por Cauchy-Schwarz, segue que:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}x_k - y\| \cdot \|\mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y))\| &\geq \langle \mathcal{A}x_k - y, \mathcal{A}\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y) \rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y), \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y) \rangle \\ &= \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2. \end{aligned}$$

Mostrando, assim, que  $\lambda_{SD} \leq \lambda_{ME}$ .

Por fim,  $\hat{\lambda}_k^{\max} = 2(1 - c_0) \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2} \geq \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2} = \lambda_{ME}$ . Assim, temos a desigualdade  $\hat{\lambda}_k^{\max} \geq \lambda_{ME}$ .

Portanto, as desigualdades  $0 < \lambda_{LW} \leq \lambda_{SD} \leq \lambda_{ME} \leq \hat{\lambda}_k^{\max}$  são verdadeiras. ■

O método normalmente utiliza como critério de parada o princípio da discrepância, (3.9). Quando não há ruídos nos dados ( $\delta = 0$ ), não é possível mostrar que a iteração pára após um número finito de iterações, isto é, não é possível afirmar que  $k_\delta < \infty$ . Agora, quando tomamos  $\delta = 0$  e  $k_\delta = \infty$ , pelo ganho em (3.16), para qualquer  $\lambda_k \in [\lambda_{LW}, \hat{\lambda}_k^{\max}]$  e  $c_0 \leq \frac{1}{2}$  temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathcal{A}x_k - y\|^2 &\leq \frac{1}{2c_0\lambda_{LW}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\|x_k - x^\dagger\|^2 - \|x_{k+1} - x^\dagger\|^2) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_0 - x^\dagger\|^2 - \|x_n - x^\dagger\|^2) \\ &\leq \|x_0 - x^\dagger\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, segue a convergência  $\mathcal{A}x_k \rightarrow y$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

**Teorema 10.** *Seja  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  uma sequência gerada pelo Método do Gradiente, com dados sem ruídos ( $\delta = 0$ ). Então, para  $x_0 = 0$ ,*

$$x_k \rightarrow x^\dagger, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

**Prova:** Inicialmente, note que se a iteração pára em um passo  $k = m \in \mathbb{N}$ , então  $x_m$  é tal que  $\|\mathcal{A}x_m - y\| = 0$ , ou seja,  $x_m$  é solução do problema inverso.

Seguindo, mostraremos que a sequência  $(x_k)$  é de Cauchy. O que, por  $X$  ser um espaço de Hilbert, implica na convergência da sequência.

Sejam  $m, n \in \mathbb{N}$  quaisquer, suponha (sem perda de generalidade) que  $m \geq n$  e, ainda, considere  $x^\dagger$  a solução generalizada do problema. Temos que:

$$\begin{aligned} \|x_n - x^\dagger\|^2 &= \|x_n - x_m + x_m - x^\dagger\|^2 \\ &= \|x_n - x_m\|^2 + \|x_m - x^\dagger\|^2 + 2\langle x_n - x_m, x_m - x^\dagger \rangle \\ &= \|x_n - x_m\|^2 + \|x_m - x^\dagger\|^2 - 2\langle x_m - x_n, x_m - x^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (3.18)$$

De onde obtemos a identidade:

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_m - x^\dagger\|^2 + 2\langle x_m - x_n, x_m - x^\dagger \rangle.$$

Como  $Ax_k \rightarrow y$ , então  $\|Ax_k - y\| \rightarrow 0$ .

Agora, suponha  $\hat{k} \in \{n, n+1, \dots, m-1, m\}$ , tal que  $\|Ax_{\hat{k}} - y\| \leq \|Ax_k - y\|, \forall k \in \{n, n+1, \dots, m-1\}$ . Note que,

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{\hat{k}}\| + \|x_{\hat{k}} - x_n\|, \quad (3.19)$$

$$\|x_m - x_{\hat{k}}\|^2 = \|x_m - x^\dagger\|^2 - \|x_{\hat{k}} - x^\dagger\|^2 + 2\langle x_{\hat{k}} - x_m, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle. \quad (3.20)$$

e

$$\|x_{\hat{k}} - x_n\|^2 = \|x_{\hat{k}} - x^\dagger\|^2 - \|x_n - x^\dagger\|^2 + 2\langle x_n - x_{\hat{k}}, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle. \quad (3.21)$$

Ainda,

$$|\langle x_{\hat{k}} - x_m, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |\langle x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle|,$$

visto que,

$$\left| \left\langle \sum_{k=\hat{k}}^{m-1} x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \right\rangle \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |\langle x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle|.$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} |\langle x_n - x_{\hat{k}}, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle| &= \left| \left\langle \sum_{k=n}^{\hat{k}-1} x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \right\rangle \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |\langle x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle|. \end{aligned}$$

Assim, em (3.20) temos

$$\begin{aligned} \|x_m - x_{\hat{k}}\|^2 &\leq \|x_m - x^\dagger\|^2 - \|x_{\hat{k}} - x^\dagger\|^2 + 2 \left| \langle x_{\hat{k}} - x_m, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle \right| \\ &\leq \|x_m - x^\dagger\|^2 - \|x_{\hat{k}} - x^\dagger\|^2 + 2 \sum_{k=n}^{m-1} \left| \langle x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle \right|. \end{aligned}$$

Temos, ainda,

$$2 \sum_{k=n}^{m-1} \left| \langle x_{k+1} - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle \right| \leq 2 \sum_{k=n}^{m-1} \left| \langle (x_k - \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)) - x_k, x_{\hat{k}} - x^\dagger \rangle \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \sum_{k=n}^{m-1} \left| \left\langle -\lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y), x_{\hat{k}} - x^\dagger \right\rangle \right| \\
&\leq 2 \sum_{k=n}^{m-1} |-\lambda_k| \|\mathcal{A}x_k - y\| \|\mathcal{A}x_{\hat{k}} - y\| \\
&\leq 2 \sum_{k=n}^{m-1} \lambda_k \|\mathcal{A}x_{\hat{k}} - y\|^2 \\
&\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{c_0} \left( \|x_k - x^\dagger\|^2 - \|x_{k+1} - x^\dagger\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{c_0} \left( \|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_m - x^\dagger\|^2 \right),
\end{aligned}$$

sendo que a quarta desigualdade segue da definição de  $\hat{k}$ . Disto, segue que:

$$\|x_m - x_{\hat{k}}\|^2 \leq \|x_m - x^\dagger\|^2 - \|x_{\hat{k}} - x^\dagger\|^2 + \frac{1}{c_0} \left( \|x_n - x^\dagger\|^2 - \|x_m - x^\dagger\|^2 \right).$$

Agora, como  $(\|x_k - x^\dagger\|)_k$  é uma sequência monótona e limitada inferiormente, então convergente, sendo também de Cauchy. Assim, fixando  $\varepsilon > 0$ , para algum  $N_1 \in \mathbb{N}$ , tal que  $m > N_1$ . Temos,

$$\|x_m - x_{\hat{k}}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De modo análogo, temos que para algum  $N_2 \in \mathbb{N}$ , tal que  $n > N_2$ ,

$$\|x_{\hat{k}} - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para  $m, n > \max\{N_1, N_2\}$ , obtemos

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{\hat{k}}\| + \|x_{\hat{k}} - x_n\| < \varepsilon.$$

Portanto, a sequência gerada pelo Método do Gradiente é de Cauchy.

Seguindo, considere  $x \in X$  tal que  $x_k \rightarrow x$ . Pela continuidade do operador  $\mathcal{A}$ , temos

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathcal{A}x_k) = y.$$

Ou seja,  $x$  é uma solução do problema inverso.

Agora, seja  $x_0 = 0$  para mostrar que  $x_k \rightarrow x^\dagger$ , note que:

$$x_k = x_k - x_0 = \sum_{j=0}^{k-1} (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=0}^{k-1} -\lambda_j \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_j - y).$$

Disto, segue que  $x_k \in R(\mathcal{A}^*)$ , e de  $R(\mathcal{A}^*) \subset N(\mathcal{A})^\perp$ , então  $x_k \in N(\mathcal{A})^\perp, \forall k \in \mathbb{N}$ . Por hipótese  $x_k \rightarrow x$ , como  $N(\mathcal{A})^\perp$  é um espaço fechado, então  $x \in N(\mathcal{A})^\perp$ .

Agora, como  $x^\dagger \in N(\mathcal{A})^\perp$ , então  $x - x^\dagger \in N(\mathcal{A})^\perp$  e mais ainda,  $x - x^\dagger \in N(\mathcal{A})$  pois  $\mathcal{A}(x - x^\dagger) = y - y = 0$ . Assim,  $x - x^\dagger \in N(\mathcal{A}) \cap N(\mathcal{A})^\perp$ , do que segue  $x - x^\dagger = 0$

e, disto,  $x^\dagger = x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Portanto, quando não há ruídos nos dados, para  $x_0 = 0$ ,  $x_k \rightarrow x^\dagger$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

■

Faremos agora a análise de convergência para o caso em que há ruídos nos dados, isto é,  $\delta > 0$ .

**Proposição 3.** *Seja  $(x_k^\delta)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$  uma sequência gerada pelo Método do Gradiente com  $\delta > 0$ . Considere  $x_0^\delta = 0$  e defina  $x_{k+1}^\delta = x_k^\delta - \lambda_k^\delta \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)$ , para alguma sequência  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ . Então existe  $k_\delta \in \mathbb{N}$  tal que para algum  $\tau > 1$  fixado:*

$$k_\delta := \inf \left\{ k \in \mathbb{N} : \|\mathcal{A}x_k - y^\delta\| \leq \tau\delta \right\}.$$

é finito, isto é, a iteração pára em um número finito de passos satisfazendo o princípio da discrepância. Além disso, temos o **ganho**:

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 \leq -2c_0\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2.$$

**Prova:** Suponha que  $x_k^\delta$  é tal que  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta$ . De

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 = \|x_{k+1}^\delta - x_k^\delta\|^2 + \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 + 2\langle x_{k+1}^\delta - x_k^\delta, x_k^\delta - x^\dagger \rangle,$$

e pela definição de  $x_{k+1}^\delta$ , temos que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 &= \left\| -\lambda_k^\delta \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta) \right\|^2 + 2\langle -\lambda_k^\delta \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta), x_k^\delta - x^\dagger \rangle \\ &= (\lambda_k^\delta)^2 \left\| \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta) \right\|^2 - 2\lambda_k^\delta \langle \mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta, \mathcal{A}(x_k^\delta - x^\dagger) \rangle. \end{aligned}$$

e, então

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 = (\lambda_k^\delta)^2 \left\| \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta) \right\|^2 - 2\lambda_k^\delta \langle \mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta, \mathcal{A}x_k^\delta - y \rangle \quad (3.22)$$

Note que

$$\begin{aligned} -2\lambda_k^\delta \langle \mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta, \mathcal{A}x_k^\delta - y \rangle &= -2\lambda_k^\delta \left( \langle \mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta, \mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta \rangle + \langle \mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta, y^\delta - y \rangle \right) \\ &\leq -2\lambda_k^\delta \left( \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 - \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \cdot \|y^\delta - y\| \right). \end{aligned}$$

Como  $x_k^\delta$  é tal que  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta$ , então

$$\|y^\delta - y\| \leq \delta < \frac{1}{\tau} \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|,$$

do que segue:

$$\begin{aligned} -2\lambda_k^\delta \left( \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 + \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \|y^\delta - y\| \right) &\leq -2\lambda_k^\delta \left( \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 - \frac{1}{\tau} \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 \right) \\ &= -2\lambda_k^\delta \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2. \end{aligned}$$

Então, em 3.22,

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 \leq (\lambda_k^\delta)^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)\|^2 - 2\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2. \quad (3.23)$$

Observe que, como  $\tau > 1$ ,

$$(\lambda_k^\delta)^2 \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)\|^2 - 2\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 \leq 0 \text{ segue se, e somente se,}$$

$$\lambda_k^\delta \leq \frac{2 \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)\|^2}.$$

Podemos, assim, definir

$$\lambda_k^{max,\delta} := \frac{2 \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)\|^2}.$$

Desse modo, para  $\lambda_k^\delta \leq \lambda_k^{max,\delta}$ , de forma similar ao caso sem ruídos, temos a **monotonia do erro**:

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 \leq \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2. \quad (3.24)$$

Agora, considere  $\lambda_k^\delta \leq \hat{\lambda}_k^{max,\delta}$ , onde  $0 < c_0 < 1$  e

$$\hat{\lambda}_k^{max,\delta} := \frac{2(1 - c_0) \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)\|^2}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 &\leq (\lambda_k^\delta) (\hat{\lambda}_k^{max,\delta}) \|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta)\|^2 - 2\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 \\ &= 2\lambda_k^\delta(1 - c_0) \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 - 2\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 \\ &= -2c_0\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2. \end{aligned}$$

Ou seja, no caso com ruídos obtemos também o **ganho**:

$$\|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 \leq -2c_0\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2. \quad (3.25)$$

Seguindo, considere, agora,  $\lambda_{\min}$  tal que

$$\hat{\lambda}_k^{max,\delta} \geq 2(1 - c_0) \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\|A\|} \geq \lambda_{\min} > 0.$$

Seja  $\lambda_k^\delta \in [\lambda_{\min}, \hat{\lambda}_k^{max,\delta}]$ . Por absurdo, suponha que  $k_\delta = \infty$ , ou seja, que  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta, \forall k \in \mathbb{N}$ . Pelo ganho, 3.26, temos:

$$\|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 \geq 2c_0\lambda_k^\delta \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|^2 > 2c_0\lambda_{\min} \left(1 - \frac{1}{\tau}\right) \tau^2\delta^2$$

Assim, dado  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=0}^n \left( \|x_k^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_{k+1}^\delta - x^\dagger\|^2 \right) > \sum_{j=0}^n 2c_0 \lambda_{\min} \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) \tau^2 \delta^2.$$

Então,

$$\|x_0^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|^2 > (n+1)2c_0 \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) \tau^2 \delta^2.$$

Agora, tomando  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  temos que:

$$\begin{aligned} \|x_0^\delta - x^\dagger\|^2 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \|x_0^\delta - x^\dagger\|^2 - \|x_{n+1}^\delta - x^\dagger\|^2 \right) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)2c_0 \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) \lambda_{\min} \tau^2 \delta^2 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\|x_0^\delta - x^\dagger\|^2 = \infty$  o que é um absurdo!

Portanto, a iteração termina em um número finito de passos  $k_\delta < \infty$ . ■

Provaremos agora a estabilidade do método para  $\delta > 0$ .

**Proposição 4.** *Sejam  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $(y^{\delta_j}) \subset Y$  uma sequência satisfazendo  $\|y^{\delta_j} - y\| \leq \delta_j$ , onde a sequência de ruídos  $(\delta_j) \subseteq (0, \infty)$  é tal que  $\delta_j \rightarrow 0$ . Suponha que  $k_{\delta_j} \rightarrow \infty, \forall j$  e  $\lambda_k^{\delta_j} \rightarrow \lambda_k$ , quando  $\delta_j \rightarrow 0$ , onde*

$$\lambda_k = \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2},$$

com  $\lambda_k \in [\lambda_{\min}, \hat{\lambda}_{\max}]$ , sendo  $\hat{\lambda}_{\max} = 2(1 - c_0)(1 - \tau) \frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|^2}{\|\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y)\|^2}$ .

Suponha ainda  $\lambda_k \in [\lambda_{\min}, \hat{\lambda}_k^{\max, \delta}]$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Defina, pelo método do Gradiente,  $x_{k+1}^{\delta_j} = x_k^{\delta_j} - \lambda_k^{\delta_j} \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j})$ , e assuma  $x_0^{\delta_j} = x_0, \forall j \in \mathbb{N}$ . Então, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , vale a **estabilidade**. Isto é:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^{\delta_j} = x_k,$$

onde  $x_k$  é o  $k$ -ésimo iterado do método do gradiente, gerado com os passos  $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$ .

**Prova:** Seja  $x_{k+1}^{\delta_j} = x_k^{\delta_j} - \lambda_k^{\delta_j} \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j})$ . Por indução segue que:

Para  $k = 0$ :

$$x_0^{\delta_j} = x_0, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Agora, supondo que para  $k \in \mathbb{N}$  a convergência é verdadeira, segue que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_k^{\delta_j} = x_k.$$

Então, para  $k + 1$ , temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k+1}^{\delta_j} &= \lim_{j \rightarrow \infty} (x_k^{\delta_j} - \lambda_k^{\delta_j} \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j})) \\
 &= \lim_{j \rightarrow \infty} x_k^{\delta_j} - \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_k^{\delta_j} \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k^{\delta_j} - y^{\delta_j}) \\
 &= x_k - \lambda_k \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_k - y) \\
 &= x_{k+1}.
 \end{aligned}$$

Ou seja,  $x_k^{\delta_j} \rightarrow x_k$ , quando  $j \rightarrow \infty$ . ■

Agora, usando os resultados acima, podemos mostrar a **propriedade de regularização do método**.

**Proposição 5.** *Sejam  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $(y^{\delta_j}) \subset Y$  uma sequência satisfazendo  $\|y^{\delta_j} - y\| \leq \delta_j$ , onde a sequência de ruídos  $(\delta_j) \subseteq (0, \infty)$  é tal que  $\delta_j \rightarrow 0$ . Então,*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j} = x^\dagger.$$

**Prova:** Seja  $x_0 = 0$ , sabemos pelo Teorema 10 que  $x_k \rightarrow x^\dagger$ , quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que, para  $k > M$  temos  $\|x_k - x^\dagger\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , e

$$\|x_M - x^\dagger\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pela Proposição 4,  $x_M^{\delta_j} \rightarrow x_M$ , quando  $k_{\delta_j} \rightarrow \infty$ . Portanto, existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que para  $j \geq N_1$  segue que

$$\|x_M^{\delta_j} - x_M\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, como  $k_{\delta_j} \rightarrow \infty$ , quando  $j \rightarrow \infty$ , existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tal que para  $j \geq N_2$  temos  $k_{\delta_j} \geq M$ . Assim,  $\forall j \geq \max\{N_1, N_2\}$ , pela monotonia do erro  $\|x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j} - x^\dagger\| \leq \|x_M^{\delta_j} - x^\dagger\|$  temos que:

$$\begin{aligned}
 \left\| x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j} - x^\dagger \right\| &\leq \|x_M^{\delta_j} - x^\dagger\| \\
 &\leq \|x_M^{\delta_j} - x_M\| + \|x_M - x^\dagger\| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Mostrando, assim, que  $x_{k_{\delta_j}}^{\delta_j} \rightarrow x^\dagger$ , quando  $j \rightarrow \infty$ , isto é, quando  $\delta_j \rightarrow 0$ . ■

## 3.2 Método das Projeções Relaxadas

Iniciaremos a presente Subseção com alguns resultados e definições relevantes para o método a ser apresentado. A menos de menção prévia, nesta Subseção,  $X$  denota um espaço normado.

**Definição 6.** *Seja  $C \subset X$  convexo, dizemos que a função  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  é **convexa** se:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall x, y \in C, \forall \lambda \in (0, 1).$$

■

**Definição 7.** *Dizemos que  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função **própria** se  $\text{dom}f(x) \neq \emptyset$ .*

■

**Definição 8.** *Seja  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função própria. Dizemos que  $f$  é **uniformemente convexa** se existe uma função contínua estritamente crescente  $\theta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ , com  $\theta(0) = 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \infty$ , de modo que:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + \lambda(1 - \lambda)\theta(\|x - y\|) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

$\forall \lambda \in (0, 1)$  e  $(x, y) \in \text{dom}(f)$ .

- A função  $\theta$  é chamada de **módulo de convexidade de  $f$** .

■

**Exemplo:** Seja  $H$  um espaço de Hilbert Real. Então  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \|x\|^2$ , é uma função uniformemente convexa.

**Prova:** Para mostrar que  $f$ , como definida acima, é uniformemente convexa, considere o módulo de convexidade de  $f$  definido por  $\theta(t) = t^2$ .

Sejam  $x, y \in H$  e  $\lambda \in (0, 1)$ . Temos que:

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1 - \lambda)y) + \lambda(1 - \lambda)\theta(\|x - y\|) &= \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 + \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \\ &= \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\langle x, y \rangle + (1 - \lambda)^2\|y\|^2 \\ &\quad + \lambda(1 - \lambda)\left[\|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2\right] \\ &= (\lambda^2 + \lambda - \lambda^2)\|x\|^2 \\ &\quad + \left[(1 - \lambda)^2 + \lambda - \lambda^2\right]\|y\|^2 \\ &= \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 \\ &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \end{aligned}$$

■

**Definição 9.** Sejam  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função própria e  $x_0 \in X$ . O **subdiferencial** de  $f$  em  $x_0$  é o conjunto definido por:

$$\partial f(x_0) := \{\xi_0 \in X^* : f(x) \geq f(x_0) + \langle \xi_0, x - x_0 \rangle, \forall x \in X\}.$$

- $X^*$  espaço dual (topológico) de  $X$ .
- Cada elemento em  $\partial f(x_0)$  é chamado **subgradiente** de  $f$  em  $x_0$  e, ainda:

$$\text{dom}(\partial f) := \{x \in \text{dom}(f) : \partial f(x) \neq \emptyset\}.$$

■

**Exemplo:** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $f(x) = |x|$ . Temos que

$$\partial|x| = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0; \\ -1, & \text{se } x < 0; \\ [-1, 1], & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

**Prova:** Note que pela definição da função  $f(x) = |x|$ , temos:  $|x| = x$ , se  $x > 0$ ,  $|x| = -x$ , se  $x < 0$ , e  $|x| = 0$ , se  $x = 0$ . Assim, usando a Definição 9, temos que,  $\partial|x| = 1$  se  $x > 0$ ,  $\partial|x| = -1$  se  $x < 0$ , e  $\partial|x| = [-1, 1]$ , se  $x = 0$ .

■

**Definição 10.** Seja  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função convexa, e sejam  $\xi_0 \in \partial f(x_0)$ ,  $x \in X$  e  $x_0 \in \text{dom}(\partial f)$ . A **distância de Bregman** entre  $x$  e  $x_0$  é definida por:

$$\Delta_{\xi_0} f(x, x_0) := f(x) - f(x_0) - \langle \xi_0, x - x_0 \rangle.$$

■

**Exemplo:** Sejam  $H$  espaço de Hilbert e  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ . Então,

$$\Delta_{\xi_0} f(x, x_0) = \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2.$$

**Prova:** Pela Definição 10, e pela Observação 2.49 de Pauleti (2021, p.42), temos que

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_0} f(x, x_0) &= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|^2 - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|^2 - \langle x_0, x - x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|^2 - \langle x_0, x \rangle + \langle x_0, x_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|x_0\|^2 + \|x_0\|^2 - \langle x, x_0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\|x\|^2 - \langle x, x_0 \rangle + \frac{1}{2}\|x_0\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\|x - x_0\|^2.
\end{aligned}$$

■

**Proposição 6.** *Seja  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função própria. Sejam  $x_0 \in \text{dom}(\partial f)$ ,  $x_1 \in \text{dom}(f)$ ,  $x_2 \in \text{dom}(\partial f)$ ,  $\xi_0 \in \partial f(x_0)$  e  $\xi_2 \in \partial f(x_2)$ . Então, temos a chamada **identidade dos três pontos**:*

$$\Delta_{\xi_2} f(x_1, x_2) - \Delta_{\xi_0} f(x_1, x_0) = -\Delta_{\xi_0} f(x_2, x_0) + \langle \xi_2 - \xi_0, x_2 - x_1 \rangle.$$

**Prova:** Considere  $x_0, x_1, x_2, \xi_0, \xi_2$  como definidos no enunciado. Da Definição 10, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi_2} f(x_1, x_2) - \Delta_{\xi_0} f(x_1, x_0) &= f(x_1) - f(x_2) - \langle \xi_2, x_1 - x_2 \rangle - (f(x_1) - f(x_0) - \langle \xi_0, x_1 - x_0 \rangle) \\
&= -f(x_2) - \langle \xi_2, x_1 - x_2 \rangle + f(x_0) + \langle \xi_0, x_1 - x_0 \rangle \\
&= (-f(x_2) + f(x_0) + \langle \xi_0, x_2 - x_0 \rangle) - \langle \xi_0, x_2 - x_0 \rangle \\
&\quad + \langle \xi_0, x_1 - x_0 \rangle - \langle \xi_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&= -\Delta_{\xi_0} f(x_2, x_0) + \langle \xi_0, x_0 - x_2 \rangle + \langle \xi_0, x_1 - x_0 \rangle - \langle \xi_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&= -\Delta_{\xi_0} f(x_2, x_0) + \langle \xi_0, x_1 - x_2 \rangle - \langle \xi_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&= -\Delta_{\xi_0} f(x_2, x_0) + \langle \xi_0 - \xi_2, x_1 - x_2 \rangle \\
&= -\Delta_{\xi_0} f(x_2, x_0) + \langle \xi_2 - \xi_0, x_2 - x_1 \rangle.
\end{aligned}$$

■

**Proposição 7.** *Seja  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  uma função uniformemente convexa, com módulo de convexidade  $\theta$ . Sejam  $x \in \text{dom}(f)$ ,  $y \in \text{dom}(\partial f)$  e  $\xi \in \partial f(y)$ . Então, temos que*

$$\theta(\|x - y\|) \leq \Delta_{\xi} f(x, y).$$

**Prova:** Veja Pauleti (2021, p. 44).

■

**Definição 11.** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $r > 1$  fixado. Definimos o **Operador de dualidade**  $J_r : X \rightarrow 2^{X^*}$  da seguinte forma:*

$$J_r(x) := \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = \|x^*\| \|x\| \text{ e } \|x^*\| = \|x\|^{r-1}\}.$$

■

**Exemplo:** Seja o espaço  $L^p(\Omega)$ , e  $f \in L^p(\Omega)$ . Seu operador de dualidade é:

$$J_p(f)(x) = \text{sign}(f)|f|^{p-1}(x).$$

**Prova:** Veja em Margotti (2015).

■

**Definição 12.** *Seja  $X$  um espaço de Banach. Temos que  $X$  é **localmente uniformemente suave** se, e somente se  $f(x) := r^{-1}\|x\|^r$  é Fréchet - Diferenciável para todo  $r > 1$ .*

■

**Exemplos:**

- O espaço de Lebesgue  $L^p(\Omega)$ , com  $1 < p < \infty$ .
- O espaço de seqüências  $l^p(\mathbb{R})$ , com  $1 < p < \infty$ .

■

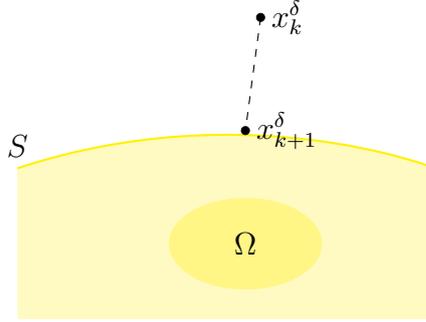
Sejam  $X, Y$  espaços de Banach,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Considere o problema mal posto

$$\mathcal{A}x = y, \tag{3.26}$$

com  $y \in R(\mathcal{A})$  e  $\|y - y^\delta\| \leq \delta, \delta > 0$ .

O **Método das Projeções Relaxadas** é um método de Tikhonov iterado não-estacionário com penalização dada pela **distância de Bregman**, e esta, induzida por uma função uniformemente convexa. Neste método consideramos uma escolha a posteriori dos parâmetros de regularização, isto é, a escolha de  $\alpha$  depende de  $\delta$  e  $y^\delta$ .

O método gera uma seqüência  $(x_k^\delta)_{k \in \mathbb{N}}$  que se aproxima da solução  $x^\dagger$  a cada iteração, e  $x_{k+1}^\delta$  é obtido a partir da iteração anterior com a seguinte motivação: consideramos  $\Omega := \{x \in X : \mathcal{A}x = y\} \subseteq X$  o conjunto das soluções do problema inverso (3.26), fixamos  $x_k^\delta$  de modo que  $x_k^\delta \notin \Omega$ , e definimos um conjunto convexo e fechado  $S$ , tal que  $S$  separa  $x_k^\delta$  de  $\Omega$ . Isto é,  $S$  é tal que  $x_k \notin S$  e  $\Omega \subset S$ . Então, definimos a iteração  $x_{k+1}^\delta$  como sendo a projeção de  $x_k^\delta$  em  $S$ . De modo que, a cada iteração estejamos nos aproximando do conjunto das soluções do problema.

Figura 1 – Representação da projeção de  $x_k, x_{k+1}^\delta$ , em  $S$ 


Fonte: A autora, 2024.

No que se segue, vamos explicar como determinar um conjunto separador  $S$ . Da definição de  $\Omega$  e de  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ , temos que  $\Omega \subseteq \{x \in X : \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \delta\}$  e, escolhendo um  $\mu \geq 0$  conveniente, podemos definir  $S_\mu := \{x \in X : \|\mathcal{A}x - y^\delta\| \leq \mu\}$  que, como desejado, é convexo e fechado.

A escolha de  $\mu$  será realizada em um intervalo apropriado a cada iteração. Assim, obteremos o **Método das Projeções Relaxadas**. Para determinar esse intervalo de maneira conveniente, precisamos de algumas hipóteses, as quais descrevemos a seguir.

Ainda nas condições iniciais:  $X$  e  $Y$  espaços de Banach, e  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Para definição formal do método, assuma que:

- (i)  $X$  é um espaço reflexivo e  $Y$  é localmente uniformemente suave.
- (ii)  $\varphi \in \Gamma_0(X)$  é uma função uniformemente convexa, onde  $\Gamma_0(X) := \{\varphi : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : \varphi \text{ é convexa, própria e s.c.i.}\}$ . Denote por  $\theta$  o módulo de convexidade de  $\varphi$ .
- (iii) Existe  $x^* \in \text{dom}(\varphi)$  tal que  $\mathcal{A}x^* = y$ , onde  $y \in R(\mathcal{A})$  é o vetor de dados exatos (sem ruídos), ou seja,  $\text{dom}(\varphi) \cap \Omega \neq \emptyset$ .

Seja o chute inicial  $x_0 \in \text{dom}(\partial\varphi)$  e  $\xi \in \partial\varphi(x_0)$ . Fixamos  $\tau > 1$  e  $r > 1$ , de modo que  $\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| > \tau\delta \geq \delta$ . Ou seja, a iteração segue até que, para algum  $k \geq 1$ , tenhamos  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta$ . Assim, pelo critério da discrepância, 3.9, definimos:

$$k_\delta := \inf\{k \geq 1 : \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta\}.$$

Agora, considerando  $x_k^\delta \in \text{dom}(\partial\varphi)$  e  $\xi_k^\delta \in \partial\varphi(x_k^\delta)$ , assumimos que  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta \geq \delta$ . E, seja  $\mu \geq 0$  podemos definir o seguinte conjunto:

$$S_\mu := \{x \in X : \frac{1}{r}\|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r \leq \frac{1}{r}\mu^r\}.$$

Observe que  $\mu \geq \delta$  implica em  $x^\dagger \in \Omega \subset S_\mu$ , e para  $\mu < \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$  segue que  $x_k^\delta$  não pertence ao conjunto  $S_\mu$ , assim  $S_\mu$  é um conjunto que separa  $x_k^\delta$  e  $\Omega$ .

Seguindo, considere o seguinte problema de minimização, acerca do qual provaremos a próxima proposição. Perceba que a solução desse problema é a projeção de  $x_k^\delta$  no conjunto

separador  $S_\mu$ , no sentido de que a solução desse problema será o vetor em  $S_\mu$  mais próximo (na distância de Bregman) de  $x_k^\delta$ :

$$\begin{cases} \min & \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) \\ \text{s.a} & x \in S_\mu. \end{cases} \quad (3.27)$$

**Proposição 8.** *Se  $\delta \leq \mu < \|Ax_k^\delta - y^\delta\|$ , então o problema (3.27) admite uma única solução. Tal solução é distinta de  $x_k^\delta$ .*

**Prova:** Seja o conjunto das soluções  $\Omega := \{x \in X : Ax = y\}$ . Então, como  $\delta \leq \mu$  e  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ ,  $\Omega \subseteq \{x \in X : \|Ax - y^\delta\| \leq \delta\} \subseteq S_\mu$  e  $S_\mu \neq \emptyset$ . Por hipótese,  $\mu < \|Ax_k^\delta - y^\delta\|$ , então  $x_k^\delta \notin S_\mu$  e portanto  $x_k^\delta$  não é solução de  $Ax = y$ . Agora,  $\varphi \in \Gamma_0(X)$  implica em  $\Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(\cdot, x_k^\delta) \in \Gamma_0(X)$ . Como  $\varphi$  é uniformemente convexa, ela é, em particular, estritamente convexa e, portanto,  $\Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(\cdot, x_k^\delta)$  também é. Ainda, pela Proposição 7 juntamente da hipótese de  $\varphi$  ser uniformemente convexa,  $\xi_k^\delta \in \partial\varphi(x_k^\delta)$ , do que segue  $\Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) \geq \theta(\|x - x_k^\delta\|)$ . Assim,  $\Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(\cdot, x_k^\delta)$  é coerciva. Temos, então, que, pela Proposição 1.2 de Ekeland e Témam (1999, p.35),  $\Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(\cdot, x_k^\delta)$  é estritamente convexa, coerciva e s.c.i. e, como  $X$  é reflexivo, o problema (3.27) admite solução, e tal solução é única. ■

**Definição 13.** *(Conjugada de Fenchel). Seja  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  própria. A **conjugada de Fenchel** de  $f$  é a função  $f^* : X^* \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida por:*

$$f^*(x^*) := \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) : x \in X\}.$$
■

**Definição 14.** *Seja o funcional  $\phi : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Definimos o **problema primal** e o **problema dual**, respectivamente, associados a  $\phi$  como:*

$$(\mathcal{P}) \inf_{x \in X} \{\phi(x, 0)\} \text{ e } (\mathcal{P}^*) \sup_{y^* \in Y^*} \{-\phi^*(0, y^*)\}.$$
■

**Definição 15.** *Dizemos que o problema  $(\mathcal{P})$  é normal se  $\sup(\mathcal{P}^*) = \inf(\mathcal{P})$ , e este valor comum é um número finito. Ainda, o problema  $(\mathcal{P})$  é chamado **estável** se  $(\mathcal{P})$  é normal, e se  $(\mathcal{P}^*)$  admite ao menos uma solução. ■*

**Proposição 9.** *(Critério de Estabilidade). Suponha que o ínfimo que aparece em  $(\mathcal{P})$  é um número finito e que exista  $x_0 \in X$  que satisfaz as seguintes condições:*

- $\phi(x_0, 0) < \infty$ .
- A função convexa  $\phi(x_0, \cdot) : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é contínua na origem.

Então, o problema primal ( $\mathcal{P}$ ), Definição 14, é **estável**.

**Prova:** Veja Ekeland e Témam (1999, p. 52). ■

**Definição 16.** O **Lagrangeano** de  $\phi$  é a função  $\mathfrak{L} : X \times Y^* \rightarrow [-\infty, \infty]$  definido por:

$$-\mathfrak{L}(x, y^*) := \sup\{\langle y^*, y \rangle - \phi(x, y) : y \in Y\}, \quad (3.28)$$

$$\forall x \in X, \forall y^* \in Y^*.$$
■

**Definição 17.** Um **Ponto de Sela** do Lagrangeano é um par  $(\hat{x}, \hat{y}^*) \in X \times Y^*$  que satisfaz:

$$\mathfrak{L}(\hat{x}, y^*) \leq \mathfrak{L}(\hat{x}, \hat{y}^*) \leq \mathfrak{L}(x, \hat{y}^*), \quad (3.29)$$

$$\forall (x, y^*) \in X \times Y^*.$$
■

**Proposição 10.** Se o problema ( $\mathcal{P}$ ) é estável, então  $\hat{x}$  é uma solução de ( $\mathcal{P}$ ) se, e somente se, existir algum  $\hat{y}^* \in Y^*$  tal que  $(\hat{x}, \hat{y}^*)$  é ponto de sela do Lagrangeano.

**Prova:** Veja em Ekeland e Témam (1999, p. 57). ■

Na proposição a seguir, vamos mostrar como o problema da projeção, definido em (3.27), está associado ao minimizador de um funcional de Tikhonov.

**Proposição 11.** Se  $\delta \leq \mu < \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ , então existem  $\hat{x} \in X$  é solução de (3.27) se, e somente se, existe  $\hat{\lambda} > 0$  satisfazendo:

$$i) \hat{x} = \arg \min \left\{ \frac{\hat{\lambda}}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) : x \in X \right\};$$

$$ii) \|\mathcal{A}\hat{x} - y^\delta\| = \mu.$$

**Prova:** Para provar o que se pede, considere o funcional  $\phi : X \times \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definido por:

$$\phi(x, \lambda) := \begin{cases} \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) & , \text{ se } \frac{1}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r \leq \frac{1}{r} \mu^r - \lambda; \\ \infty & , \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Então,  $\phi$  é próprio, convexo, semicontínuo inferiormente e, ainda, temos que o problema primal  $(\mathcal{P})$  é equivalente ao problema de minimização (3.27), e para  $\hat{x}$  solução do problema de minimização, existente pela Proposição 8,  $\hat{x}$  é também solução de  $(\mathcal{P})$ . Seguindo, temos então que ínfimo que aparece em  $(\mathcal{P})$  é finito. Seja  $x^*$  uma solução do problema inverso (3.26). Então  $\|\mathcal{A}x^* - y^\delta\| = \|y - y^\delta\| \leq \delta < \mu$ , de onde, segue que  $\phi(x^*, 0) = \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x^*, x_k^\delta) < \infty$  e para  $\lambda$ , tal que  $|\lambda|$  é suficientemente pequeno,  $\frac{1}{r} \|\mathcal{A}x^* - y^\delta\|^r - \frac{1}{r} \mu^r + \lambda < 0$ , portanto  $\phi(x^*, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  é constante numa vizinhança da origem, portanto, contínua na origem e, pela Proposição 9,  $(\mathcal{P})$  é um problema estável. Desse modo, pela Proposição 10, como o problema é estável e  $\hat{x}$  é solução deste, então existe um  $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$  tal que  $(\hat{x}, \hat{\lambda})$  é um ponto de sela do Lagrangeano de  $\phi$ .

Agora, seja o Lagrangeano de  $\phi$  dado por:

$$\mathfrak{L}(x, \lambda) := \begin{cases} \frac{\lambda}{r} \left( \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r - \mu^r \right) + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) & : \text{se } \lambda \geq 0; \\ -\infty & : \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinaremos os pontos de sela de  $\mathfrak{L}$ . Primeiramente, defina os funcionais  $\mathfrak{L}_{\hat{\lambda}} : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , com  $x \mapsto \mathfrak{L}_{\hat{\lambda}}(x, \hat{\lambda})$ , e  $\mathfrak{L}_{\hat{x}} : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , com  $\lambda \mapsto \mathfrak{L}_{\hat{x}}(\hat{x}, \lambda)$ . É claro que um ponto de sela não pode ocorrer em  $\lambda < 0$ . Vamos supor então que  $\lambda \geq 0$ . Em  $\mathfrak{L}_{\hat{\lambda}}$ , temos que (pela definição de subgradiente),

$$0 \in \partial \mathfrak{L}_{\hat{\lambda}}(\hat{x}) \Leftrightarrow \hat{x} = \arg \min \left\{ \frac{\hat{\lambda}}{r} \left( \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r - \mu^r \right) + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) \right\}.$$

Agora, derivando  $\mathfrak{L}_{\hat{x}}$ , temos que

$$\mathfrak{L}'_{\hat{x}}(\lambda) = \frac{1}{r} \left( \|\mathcal{A}\hat{x} - y^\delta\|^r - \mu^r \right) = 0 \Leftrightarrow \|\mathcal{A}\hat{x} - y^\delta\| = \mu.$$

Portanto,  $(\hat{x}, \hat{\lambda}) \in X \times \mathbb{R}$  é ponto de sela do Lagrangeano, satisfazendo a proposição.

Agora, resta mostrar que temos  $\hat{\lambda} > 0$ . De fato, pois caso contrário, isto é, para  $\hat{\lambda} = 0$ , como  $\hat{x} = \arg \min \left\{ \frac{\hat{\lambda}}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) \right\}$ , então  $\hat{x} = x_k^\delta$ , o que contradiz a Proposição 8. Portanto,  $\hat{\lambda} > 0$ . ■

Agora, para que finalmente possamos definir o algoritmo, lembre-se que a cada iteração é necessário que  $\xi_{k+1}^\delta \in \partial \varphi(x_{k+1}^\delta)$ . Desse modo, considere

$$x_{k+1}^\delta = \hat{x} = \arg \min \left\{ \hat{\lambda} r^{-1} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta) : x \in X \right\},$$

disto, segue que

$$0 \in \partial \left\{ \lambda_k^\delta r^{-1} \|\mathcal{A}(\cdot) - y^\delta\|^r + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(\cdot, x_k^\delta) : x \in X \right\} (x_{k+1}^\delta).$$

Pelo Teorema 5.6, em Ekeland e Témam (1999, p. 26),

$$0 \in \partial \left\{ \lambda_k^\delta r^{-1} \|\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta\|^r \right\} + \partial \left\{ \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x_{k+1}^\delta, x_k^\delta) \right\},$$

e pelos Teoremas 2.29 e 2.53, em Pauleti (2021), segue que

$$0 \in \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta) + \partial\varphi(x_{k+1}^\delta) - \xi_k^\delta.$$

Como  $Y$  é localmente uniformemente suave, segue que a função  $f_r = \frac{1}{r} \|\cdot\|^r$  é Fréchet-diferenciável e portanto, o seu subdiferencial,  $J_r$ , é um conjunto unitário em qualquer ponto de  $Y$ . Então,

$$\xi_k^\delta - \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta) \in \partial\varphi(x_{k+1}^\delta).$$

Assim, podemos definir

$$\xi_{k+1}^\delta = \xi_k^\delta - \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta) \quad (3.30)$$

e teremos  $\xi_{k+1}^\delta \in \partial\varphi(x_{k+1}^\delta)$ , como desejado.

Por fim, fixamos  $0 < \hat{\eta} \leq \eta < 1$  e definimos

$$c_k = (1 - \bar{\eta})\delta + \bar{\eta}\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \text{ e } d_k = (1 - \eta)\delta + \eta\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|. \quad (3.31)$$

Assim, podemos definir o Algoritmo do seguinte modo:

---

**Algoritmo 1:** Método Iterativo Não - Estacionário

---

**Entrada:**  $\mathcal{A}, \varphi, y^\delta, \delta, x_0, \xi_0, r > 1, \tau > 1, 0 < \bar{\eta} \leq \eta < 1$ .

- 1  $x_0^\delta = x_0$ ;
- 2  $\xi_0^\delta = \xi_0$ ;
- 3  $k = 0$ ;
- 4 **enquanto**  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau\delta$ , **faça**
- 5      $c_k = (1 - \bar{\eta})\delta + \bar{\eta}\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ ;
- 6      $d_k = (1 - \eta)\delta + \eta\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ ;
- 7     **encontre**  $\hat{x} \in X$  e  $\hat{\lambda} > 0$  tais que  
        $\hat{x} = \arg \min\{\hat{\lambda}r^{-1}\|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \Delta_{\xi_k^\delta}\varphi(x, x_k^\delta) : x \in X\}$ ;
- 8     e  $\|\mathcal{A}\hat{x} - y^\delta\| \in [c_k, d_k]$ ;
- 9      $\lambda_k^\delta = \hat{\lambda}$ ;
- 10     $x_{k+1}^\delta = \hat{x}$ ;
- 11     $\xi_{k+1}^\delta = \xi_k^\delta - \lambda_k^\delta \mathcal{A}^* J_r(\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta)$ ;
- 12     $k = k + 1$ ;
- 13 **fim**

---

Sobre o Algoritmo 1, é importante observar que:

- Os passos 7 e 8 equivalem a projetar a iteração atual  $x_k^\delta$  no conjunto separador  $S_\mu$ , sendo  $\mu$  um número entre  $c_k$  e  $d_k$ , ou seja, entre  $\delta$  e  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$ .
- Temos  $c_k \leq d_k$ . Ainda, no passo  $k$ , o resíduo  $\|\mathcal{A}x_{k+1}^\delta - y^\delta\|$  deve pertencer ao intervalo  $[c_k, d_k]$ , em vez do intervalo maior  $(\delta, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|)$ . Isso é feito dessa forma porque na análise de convergência do algoritmo,  $c_k$  é necessário para garantir a estabilidade do método, enquanto que  $d_k$  é usado para garantir a convergência da sequência no caso sem ruídos.

- O passo 10 garante que  $\xi_{k+1}^\delta$  pertence ao subdiferencial de  $\varphi$  em  $x_{k+1}^\delta$ , permitindo, assim, que a distância de Bregman esteja bem definida na iteração seguinte.

Definido o algoritmo, seguindo o estudo do método, temos que no caso sem ruídos, podemos estimar uma cota superior e uma inferior para o resíduo  $\|\mathcal{A}x_k - y\|$ . O resultado a seguir nos mostra essa afirmação.

**Proposição 12.** *Seja  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência gerada pelo Algoritmo 1, com  $\delta = 0$ . Então, para  $k \geq 1$  temos que:*

$$\bar{\eta} \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta \|\mathcal{A}x_{k-1} - y\|,$$

e também que:

$$\bar{\eta}^k \|\mathcal{A}x_0 - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta^k \|\mathcal{A}x_0 - y\|.$$

**Prova:** A primeira afirmação segue diretamente do passo 9 do algoritmo com  $\delta = 0$  e a segunda afirmação segue da primeira usando indução. ■

Ainda no caso sem ruídos, temos a **monotonia** da distância de Bregman.

**Proposição 13.** *Sejam  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  e  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sequências geradas pelo Algoritmo 1 com dados exatos. Seja  $x^* \in \text{dom}(\varphi) \cap \Omega$  uma solução do problema inverso (3.26). Então, para todo  $k \geq 1$ , segue que:*

$$\Delta_{\xi_k} \varphi(x^*, x_k) = \Delta_{\xi_{k-1}} \varphi(x^*, x_{k-1}) - \Delta_{\xi_{k-1}} \varphi(x_k, x_{k-1}) - \lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r. \quad (3.32)$$

Em particular,  $\Delta \varphi(x^*, x_k) < \Delta \varphi(x^*, x_{k-1})$ , para todo  $k$  natural. Além, disso

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{k-1} \|\mathcal{A}x_k - y\|^r < \infty \quad (3.33)$$

**Prova:** Temos que a equação (3.32) segue da identidade dos 3 pontos (Proposição 6), com  $x_0 = x_{k-1}$ ,  $x_1 = x^*$  e  $x_2 = x_k$ , e do passo 13 do Algoritmo 1. Por sua vez, a equação (3.33) segue aplicando-se uma soma telescópica em (3.32). ■

A análise de convergência para o método, no caso sem ruídos, é realizada de maneira análoga ao método de Tikhonov iterado clássico, e pode ser verificada em Pauleti (2021).

A seguir veremos o resultado que envolve o decaimento do resíduo  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\|$  na presença de ruídos. Isto é, considerando  $\delta > 0$ .

**Proposição 14.** *Seja  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  uma possível sequência gerada pelo Algoritmo 1, com  $\delta > 0$  e  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Então, para todo  $k = 1, 2, 3, \dots, k_\delta$  temos que:*

$$\bar{\eta} (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta) \leq \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta \leq \eta (\|\mathcal{A}x_{k-1}^\delta - y^\delta\| - \delta), \quad (3.34)$$

além disso,

$$\bar{\eta}^k(\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \leq \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta \leq \eta^k(\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta). \quad (3.35)$$

**Prova:** Análoga à prova da Proposição 13. ■

O resultado anterior permite-nos, além de provar que a sequência  $(x_k^\delta)_{k \in \mathbb{N}}$  termina, estimar a seguinte cota para o número de iterações  $k_\delta < \infty$ :

**Corolário 1.1.** *Seja  $(x_k^\delta)_{k=0}^{k_\delta}$  uma possível sequência gerada pelo Algoritmo 1, com  $\delta > 0$  e  $y^\delta \in Y$  satisfazendo  $\|y - y^\delta\| \leq \delta$ . Então a iteração termina em um número finito de passos e temos as estimativas:*

$$|\ln \bar{\eta}|^{-1} \ln \left( \frac{\tau \delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta} \right) \leq k_\delta \leq |\ln \eta|^{-1} \ln \left( \frac{(\tau - 1)\delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta} \right) + 1.$$

**Prova:** Primeiro mostraremos que  $k_\delta < \infty$ , isto é, que o critério da discrepância é satisfeito e a iteração pára em um número finito de passos. Para isso, para obter uma contradição, suponha que  $k_\delta = \infty$ . Assim, pelo critério da discrepância, 3.9, temos que:

$$\forall k \geq 1, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau \delta.$$

Então, segue que  $\forall k \geq 1, \|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| - \delta > (\tau - 1)\delta$ . Disto e de (3.35), temos que

$$\forall k \geq 1, \eta^k(\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \geq (\tau - 1)\delta > 0.$$

Mas, como  $\eta \in (0, 1)$ , temos que  $\eta^k \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ , o que resulta numa contradição. Portanto,  $k_\delta < \infty$ , como queríamos.

Agora, segue que, para  $0 < k < k_\delta$ ,  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| > \tau \delta$ . Ainda, para  $k = k_\delta - 1$  juntamente de (3.35), temos que:

$$(\tau - 1)\delta < \|\mathcal{A}x_{k_\delta-1}^\delta - y^\delta\| - \delta \leq \eta^{k_\delta-1}(\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta).$$

Do que segue,

$$(\tau - 1)\delta \leq \eta^{k_\delta-1}(\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta)$$

e, disto,

$$\eta^{k_\delta-1} \geq \frac{(\tau - 1)\delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta},$$

do que obtemos:

$$k_\delta \leq (\ln \eta)^{-1} \ln \left( \frac{(\tau - 1)\delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta} \right) + 1.$$

Agora, para  $k = k_\delta$ , segue que  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y^\delta\| \leq \tau \delta$ , do que, juntamente com a Proposição 14, obtemos

$$\bar{\eta}^{k_\delta}(\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta) \leq \tau \delta,$$

e, disto,

$$\bar{\eta}^{k_\delta} \leq \frac{\tau\delta}{\|\mathcal{A}x_0^\delta - y^\delta\| - \delta}.$$

Assim, temos que

$$k_\delta \geq (\ln \bar{\eta})^{-1} \ln \left( \frac{\tau\delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta} \right).$$

Por fim, obtemos,

$$(\ln \eta)^{-1} \ln \left( \frac{(\tau - 1)\delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta} \right) + 1 \geq k_\delta \geq (\ln \bar{\eta})^{-1} \ln \left( \frac{\tau\delta}{\|\mathcal{A}x_0 - y^\delta\| - \delta} \right). \quad (3.36)$$

■

Como no caso sem ruídos, a análise de convergência que prova a estabilidade e regularização do método pode ser encontrada em Pauleti (2021).

Em Penton, Margotti e Leitão (2020) e Boiger e Svaiter (2020), além do estudo do método, temos também critérios para escolha do multiplicador de Lagrange, no método estacionário e não estacionário, respectivamente.

## 4 Aplicação

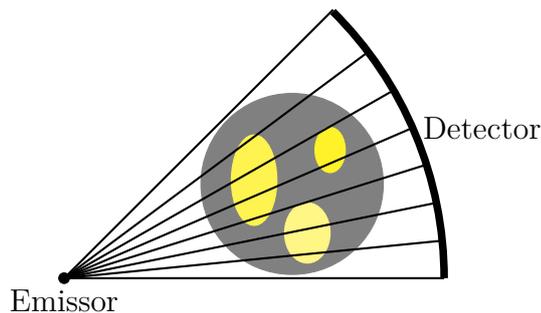
No presente capítulo trataremos da realização de experimentos numéricos com o auxílio do MATLAB. Em tais experimentos aplicaremos os métodos de regularização, estudados na seção anterior, no problema inverso da Tomografia Computadorizada. A primeira seção deste capítulo abordará o problema da Tomografia Computadorizada, e a modelagem matemática que o envolve. A seguir, na subseção, estudaremos a discretização do problema. Por fim, a segunda seção mostrará os testes realizados, uma comparação entre os métodos no problema e algumas observações do que temos em relação à teoria estudada e o comportamento do método em relação aos testes.

Mais sobre esse problema pode ser encontrado em Natterer (1986) e Rieder (2003), os quais foram usados como referência.

### 4.1 Tomografia Computadorizada

Utilizada na medicina como meio para conhecer o tecido presente em uma seção do corpo humano, a tomografia computadorizada consiste em um processo de reconstrução de imagens. Durante o procedimento, feixes de raios X são emitidos sobre uma seção transversal do corpo, e são detectados por um detector, de maneira que emissor e detector estão em posições opostas em relação à seção de interesse, conforme [Figura 2](#). A partir da diminuição da intensidade dos raios X ao passar pela região analisada, é possível determinar a densidade do órgão dentro do corpo.

Figura 2 – Representação do procedimento da Tomografia Computadorizada



Fonte: A autora, 2024.

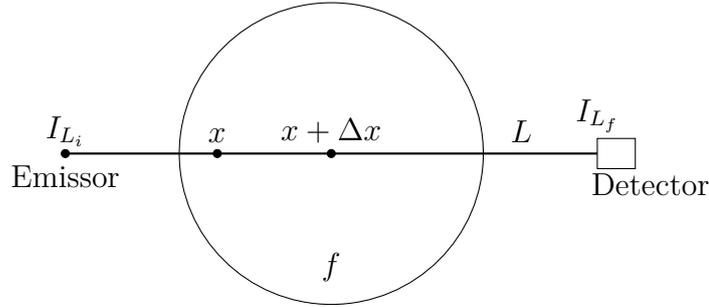
Assumindo que a diminuição da intensidade se dá apenas por meio da absorção dos raios X pelo tecido exposto a eles (de acordo com a densidade do tecido) e que os raios não são refletidos ao entrar em contato com o tecido, consideramos que o feixe de raios X percorre o corpo em linha reta. Desse modo, temos que a diminuição da intensidade dos raios X de um ponto  $x$  para o  $x + \Delta x$ , é proporcional ao produto entre a própria

intensidade em  $x$  e a distância  $\|\Delta x\|$  percorrida pelos raios. Dessa forma, a densidade corresponde ao coeficiente dessa proporcionalidade. Aqui  $x$  é um ponto entre o emissor dos raios  $X$  e o ponto  $x + \Delta x$ , com a distância  $\|\Delta x\|$  pequena.

Consideramos  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  o conjunto fechado e convexo que representa a seção transversal do corpo,  $I_L : L \rightarrow \mathbb{R}$  a função que representa a intensidade dos raios  $X$  em cada um dos pontos da reta  $L$ , a qual por sua vez, representa o percurso dos raios, e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a função densidade. Assumindo, ainda, que  $f(x) = 0, \forall x \notin \Omega$ , obtemos a seguinte aproximação:

$$I_L(x + \Delta x) - I_L(x) \approx -f(x) \cdot I_L(x) \cdot \|\Delta x\| \tag{4.1}$$

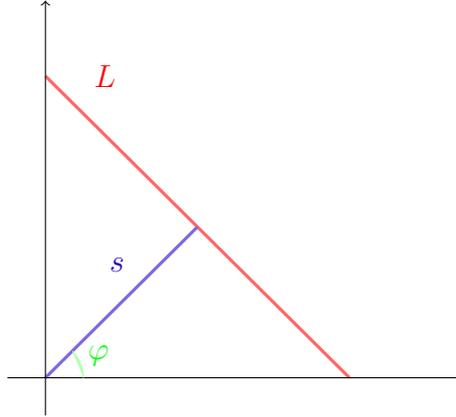
Figura 3 – Representação da reta  $L$ , que descreve o percurso dos feixes e das intensidades emitida ( $I_{L_i}$ ) e detectada ( $I_{L_f}$ )



Fonte: A autora, 2024.

Assim, parametrizamos a reta  $L$  da seguinte maneira: Fixe um sistema cartesiano com eixo das abcissas denotado por  $x_1$  e das ordenadas  $x_2$ . Seja  $s$  a distância de  $L$  à origem, e seja  $\varphi$  o ângulo entre a reta perpendicular à  $L$  que passa pela origem e o eixo  $x_1$ . Tomamos  $s$  e  $\varphi$  como os parâmetros para  $L$  (Figura 4), ou seja,  $L := L(s, \varphi)$ . Agora, sejam  $\omega(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  e  $\omega(\varphi)^\perp = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$  vetores unitários, e a parametrização dada por  $\gamma : L \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , sendo  $\gamma(t) := s\omega(\varphi) + t\omega(\varphi)^\perp$ , obtemos  $L(s, \varphi) := \{\gamma(t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Figura 4 – Parametrização da reta que descreve o feixe de raios X



Fonte: A autora, 2024.

Considerando a intensidade dos raios X ao longo da reta  $L$  como  $I_L = I_L(\gamma(t))$ , denotamos por  $I_{L_i}$  a intensidade inicial no ponto  $x_i := \gamma(t_i) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$  que é o ponto inicial onde o feixe de raios X é emitido. Igualmente, denotamos por  $I_{L_f}$  a intensidade final medida pelo detector no ponto  $x_f := \gamma(t_f) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ . Assim, para  $x = \gamma(t)$ ,  $x + \Delta x = \gamma(t + \Delta t)$ ,  $\Delta t > 0$  e  $\|\Delta x\| = \|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)\|$ , em (4.1) temos que:

$$I_L(\gamma(t + \Delta t)) - I_L(\gamma(t)) \approx -f(\gamma(t)) \cdot I_L(\gamma(t)) \cdot \|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)\| \quad (4.2)$$

Mais ainda, como  $\|\gamma(t + \Delta t) - \gamma(t)\| = \|\Delta t \omega(\varphi)^\perp\| = \Delta t$ , temos que para  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$-f(\gamma(t)) \cdot I_L(\gamma(t)) = \frac{d}{dt} [I_L(\gamma(t))]$$

do que segue:

$$\frac{1}{I_L(\gamma(t))} \cdot \frac{d}{dt} [I_L(\gamma(t))] = -f(\gamma(t)).$$

Agora, integrando em relação a  $t$ , temos:

$$\int_{t_i}^{t_f} f(\gamma(t)) dt = - \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{I_L(\gamma(t))} \cdot \frac{d}{dt} [I_L(\gamma(t))] dt.$$

Note que para o funcional  $g(u) = \ln(u)$ , temos  $g'(u) = \frac{1}{u} \cdot u'$ . Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} f(\gamma(t)) dt &= - \ln(\gamma(t)) \Big|_{t_i}^{t_f} \\ &= \ln(I_L(\gamma(t_i))) - \ln(I_L(\gamma(t_f))) \\ &= \ln\left(\frac{I_L(\gamma(t_i))}{I_L(\gamma(t_f))}\right). \end{aligned}$$

Como  $x_i = \gamma(t_i)$ ,  $x_f = \gamma(t_f)$  e  $\|\gamma'(t)\| = 1$ , e  $f = 0$  fora de  $\Omega$ , segue que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \ln\left(\frac{I_L(x_i)}{I_L(x_f)}\right).$$

Temos, portanto, a integral de linha de  $f$  sobre a reta  $L(s, \varphi)$ , isto é, o valor médio da densidade  $f$  ao longo de  $L$  corresponde ao logaritmo natural entre as intensidades inicial e final dos raios  $X$ . Desse modo:

$$\int_{L(s, \varphi)} f(x) dx = \ln \left( \frac{I_L(x_i)}{I_L(x_f)} \right).$$

Assim, o problema inverso da tomografia computadorizada pede a reconstrução de  $f$  a partir das suas integrais de linha.

A Transformada de Radon  $\mathbf{R}$  descreve uma função integrável em  $\mathbb{R}^2$  a partir de todas as suas integrais de linha. Assim, temos a seguinte igualdade:

$$\mathbf{R}f(s, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} f \left( s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi) \right) dt. \quad (4.3)$$

Ou seja, no problema de reconstrução da Tomografia Computadorizada é necessária a inversão da transformada de Radon em  $\mathbb{R}^2$ . Desse modo, analisaremos a seguir a transformada de Radon.

**Definição 18.** *Considere a seção transversal do corpo sendo representada pelo conjunto compacto  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ , então temos a seguinte representação da interseção da reta  $L(s, \varphi)$  e  $\Omega$ :*

$$L(s, \varphi) \cap \Omega = \{s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi) : t \in [-v(s), v(s)], |s| \leq 1\}.$$

Onde  $v(s)$  é tal que:

$$v(s) := \begin{cases} \sqrt{1 - s^2} & , |s| \leq 1 \\ 0 & , |s| > 1. \end{cases} \quad (4.4)$$

Definimos a **Transformada de Radon**  $\mathbf{R} : L^2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L^2([0, 1] \times [0, \pi]) \subset \mathbb{R}^2$  como:

$$\mathbf{R}f(s, \varphi) := \int_{-v(s)}^{v(s)} f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt. \quad (4.5)$$

■

Perceba que como  $f = 0$  fora de  $\Omega$ , temos que  $\mathbf{R}f(s, \varphi)$  é a integral de linha de  $f$  sobre a reta  $L(s, \varphi)$ , isto é,

$$\mathbf{R}f(s, \varphi) = \int_{L(s, \varphi)} f(x) dx.$$

**Teorema 11.** *A transformada de Radon  $\mathbf{R} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(Z)$ ,  $Z := [0, 1] \times [0, \pi]$ , é linear e contínua, com norma  $\|\mathbf{R}\| \leq \sqrt{2\pi}$ .*

**Prova:** Mostraremos, primeiramente, que a transformada  $\mathbf{R}$  é linear.

Por definição temos que

$$\mathbf{R}f(s, \varphi) = \int_{-v(s)}^{v(s)} f \left( s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi) \right) dt.$$

Desse modo, sejam  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, para todo  $(s, \varphi) \in Z$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}(f_1 + \lambda f_2)(s, \varphi) &= \int_{-v(s)}^{v(s)} (f_1 + \lambda f_2)(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \\
 &= \int_{-v(s)}^{v(s)} f_1(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \\
 &\quad + \int_{-v(s)}^{v(s)} \lambda f_2(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \\
 &= \int_{-v(s)}^{v(s)} f_1(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \\
 &\quad + \lambda \int_{-v(s)}^{v(s)} f_2(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \\
 &= \mathbf{R}(f_1)(s, \varphi) + \lambda \mathbf{R}(f_2)(s, \varphi) \\
 &= \mathbf{R}f_1(s, \varphi) + \lambda \mathbf{R}f_2(s, \varphi) \\
 &= (\mathbf{R}f_1 + \lambda \mathbf{R}f_2)(s, \varphi).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathbf{R}(f_1 + \lambda f_2) = \mathbf{R}f_1 + \lambda \mathbf{R}f_2$ . Ou seja,  $\mathbf{R}$  é linear.

Seguindo, temos que:

$$|\mathbf{R}f(s, \varphi)|^2 = \left| \int_{-v(s)}^{v(s)} f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \right|^2 = \left| \int_{-v(s)}^{v(s)} 1 \cdot f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)) dt \right|^2.$$

Usando a desigualdade de Cauchy - Schwarz para integrais, temos que:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{R}f(s, \varphi)|^2 &\leq \int_{-v(s)}^{v(s)} |1|^2 dt \cdot \int_{-v(s)}^{v(s)} |f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi))|^2 dt \\
 &= 2v(s) \cdot \int_{-v(s)}^{v(s)} |f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi))|^2 dt.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$|\mathbf{R}f(s, \varphi)|^2 \leq 2v(s) \cdot \int_{-v(s)}^{v(s)} |f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi))|^2 dt.$$

Como  $v(s) \leq 1$ , obtemos

$$|\mathbf{R}f(s, \varphi)|^2 \leq 2 \int_{-v(s)}^{v(s)} |f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi))|^2 dt. \quad (4.6)$$

Agora, da definição de  $Z$ , temos que

$$\|\mathbf{R}f\|_{L^2(Z)}^2 = \int_0^\pi \int_0^1 |\mathbf{R}f(s, \varphi)|^2 ds d\varphi.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{R}f\|_{L^2(Z)}^2 &\leq \int_0^\pi \int_0^1 2 \int_{-v(s)}^{v(s)} |f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi))|^2 dt ds d\varphi \\
 &= 2 \int_0^\pi \left( \int_0^1 \int_{-v(s)}^{v(s)} |f(s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi))|^2 dt ds \right) d\varphi.
 \end{aligned}$$

Agora, de (4.4), e considerando uma transformação  $(s, t) \mapsto x = (x_1, x_2) := s\omega(\varphi) + t\omega^\perp(\varphi)$  temos que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}f\|_{L^2(Z)}^2 &\leq 2 \int_0^\pi \left( \int_\Omega |f(x)|^2 dx \right) d\varphi \\ &= 2 \int_0^\pi \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 d\varphi \\ &= 2\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \int_0^\pi d\varphi \\ &= 2\pi\|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Assim,  $\|\mathbf{R}f\|_{L^2(Z)}^2 \leq 2\pi\|f\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Dessa forma, temos  $\|\mathbf{R}\|^2 \leq 2\pi$  o que implica em  $\|\mathbf{R}\| \leq \sqrt{2\pi}$ .

Em particular,  $\mathbf{R}f \in L^2(Z)$  e, portanto, a transformada está bem definida, e é contínua. ■

Desse modo, considerando  $g(s, \varphi) = \ln \left( \frac{I_L(x_i)}{I_L(x_f)} \right)$ , obtemos:

$$(\mathbf{R}f)(s, \varphi) = g(s, \varphi).$$

Assim, nosso objetivo é reconstruir a função  $f$  a partir do conhecimento da função  $g$  no problema inverso  $\mathbf{R}f = g$ . Ou seja, é necessária a inversão da transformada de Radon. Perceba que, numa situação prática, a função  $g(s, \varphi)$  é conhecida apenas para alguns pares  $(s, \varphi)$ . Além disso, como os valores de  $g$  dependem de medições físicas (a saber,  $I_L(x_f)$ ), é razoável imaginar que apenas uma versão perturbada de  $g$  estará disponível.

### 4.1.1 Discretização do problema

Vimos que o problema inverso da Tomografia Computadorizada consiste na reconstrução da função densidade  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com suporte em  $\Omega$ , a partir das suas integrais de linha, obtidas por meio da intensidade inicial (de emissão) e da medição da intensidade final (de detecção) dos raios X sobre uma reta L. Dessa relação obtivemos a seguinte equação:

$$\ln \left( \frac{I_L(x_i)}{I_L(x_f)} \right) = \int_{L(s, \varphi)} f(x) dx. \quad (4.7)$$

Para a discretização do problema, grosso modo, seguiremos os seguintes passos:

1. Fixar a função procurada  $f^\dagger$ ;
2. Fixar um número  $n$  de retas;
3. Fixar uma malha para  $\Omega$ , a qual será usada para gerar um subespaço de dimensão finita (onde aproximaremos a  $f^\dagger$ );

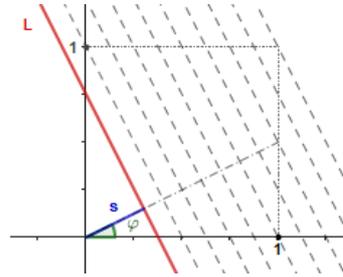
4. Aproximar a função  $g$  por um vetor em  $\mathbb{R}^n$ , usando a fórmula no lado direito de (4.7), e isto, para cada reta fixada no passo 2.
5. Usar a malha fixada no passo 3 para aproximar a transformada de Radon por uma matriz.

Assim, seguindo os passos anteriores, fixamos um conjunto de  $n$  retas  $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ , que descrevem o percurso dos feixes de raios  $X$  emitidos sobre o conjunto  $\Omega$ . Para isso, definimos  $\Omega := [0, 1] \times [0, 1]^1$  e fixamos um número  $m$  de ângulos, que são definidos por  $\varphi_j = j \cdot \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2}$ , com  $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ , e disto segue que  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Definimos, ainda, um conjunto de  $p$  retas paralelas para cada ângulo  $\varphi$ , de modo que cada reta deste conjunto está associada a um valor  $s_{i,j} \in \mathbb{R}^+$ , com  $i = 1, 2, \dots, p$  (Figura 5). Assim, parametrizamos cada  $L_{pj+i}$ , pelas funções  $\gamma_{pj+i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que são dadas por:

$$\gamma_{pj+i}(t) = s_{i,j}(\cos \varphi_j, \sin \varphi_j) + t(-\sin \varphi_j, \cos \varphi_j).$$

Observe que nessa situação temos  $n = m \cdot p$ .

Figura 5 – Representação da parametrização das retas fixadas.



Fonte: A autora, 2024.

Como  $\|\gamma'_{pj+i}(t)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ , obtemos a integral de linha de  $f$  sobre cada reta  $L_{pj+i}$ , da seguinte forma,

$$\int_{L_{pj+i}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(\gamma_{pj+i}(t)) dt. \quad (4.8)$$

Para simular a geração dos dados do experimento (função  $g$ ), fixamos a função procurada  $f^\dagger$  a qual deve estar suportada no conjunto  $\Omega$ . Em seguida, determinamos para cada reta  $L_{pj+i}$  um intervalo  $[a_{ij}, b_{ij}]$ , o qual representa a interseção da reta com  $\Omega$  e, então, calculamos numericamente, usando o método do trapézio, a seguinte integral

$$g_{pj+i} := \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} f^\dagger(\gamma_{pj+i}(t)) dt. \quad (4.9)$$

Repare que essa é a integral de linha de  $f^\dagger$  sobre a reta  $L_{pj+i}$ . Aproximamos então a função  $g$  por  $\hat{g} = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$ .

<sup>1</sup> Note que aqui definimos  $\Omega$  de modo diferente ao da seção anterior.

Observe que o que temos até agora independe do uso de qualquer malha em  $\Omega$ . Ou seja, a  $f^\dagger$  fixada, bem como os dados gerados, não depende da malha (que será construída a seguir).

Agora, vamos utilizar uma discretização para aproximar a transformada de Radon por uma matriz  $A$ . Para isso, fixamos um número  $M \in \mathbb{N}$ , de modo que  $\Omega$  é dividido em  $M^2$  quadrados de lado  $\frac{1}{M}$ . Obtemos, assim, uma malha sobre  $\Omega$ . Especificamos agora uma ordem para os  $M^2$  elementos dessa malha, e denotamos o  $k$ -ésimo elemento da malha por  $Q_k$ . Cada elemento  $Q_k$  é chamado de pixel. Em seguida, consideramos o subespaço  $V := \text{span} \{\chi_{Q_1}, \chi_{Q_2}, \dots, \chi_{Q_{M^2}}\} \subseteq L^2(\mathbb{R}^2)$ , o qual será usado para a reconstrução da função  $f^\dagger$ . Aqui,

$$\chi_{Q_k}(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \notin Q_k \\ 1 & , \text{ se } x \in Q_k \end{cases} \quad (4.10)$$

Ou seja,  $\chi_{Q_k}$  é a função característica em  $Q_k$ . Associamos, ainda, a função  $\hat{f}$  ao vetor  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M^2}) \in \mathbb{R}^{M^2}$  onde os  $\alpha_k$  são os coeficientes da expansão de  $\hat{f}$  na base  $V$ . E, então, aproximamos a função  $f^\dagger : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  por uma função constante por partes  $\hat{f}$ , tal que

$$\hat{f} = \sum_{k=1}^{M^2} \alpha_k \chi_{Q_k}, \quad (4.11)$$

onde  $\alpha_k$  é o valor que  $f$  assume no centro do quadrado  $Q_k$ . Assim, para cada  $l = 1, \dots, n$ , temos que:

$$\int_{L_l} f^\dagger(x) dx \approx \int_{L_l} \hat{f}(x) dx.$$

Em (4.11) temos que:

$$\int_{L_l} \hat{f}(x) dx = \int_{L_l} \left( \sum_{k=1}^{M^2} \alpha_k \chi_{Q_k}(x) \right) dx.$$

Então, por (4.10) temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_l} \hat{f}(x) dx &= \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} \left( \sum_{k=1}^{M^2} \alpha_k \cdot \chi_{Q_k}(\gamma_l(t)) \right) dt \\ &= \sum_{k=1}^{M^2} \alpha_k \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} \chi_{Q_k}(\gamma_l(t)) dt. \end{aligned}$$

Observe que,

$$\chi_{Q_k}(\gamma_l(t)) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } \gamma_l(t) \notin Q_k \\ 1 & , \text{ se } \gamma_l(t) \in Q_k. \end{cases}$$

Então, tomamos

$$\int_{Q_k} \gamma_l(t) dt = A_{l,k}, \quad (4.12)$$

que é o comprimento do segmento de reta que representa a interseção da reta  $L_l$  com o pixel  $Q_k$ . Agora, como definimos anteriormente  $g(s, \varphi) = \ln \left( \frac{I_L(x_i)}{I_L(x_f)} \right)$ . Assim, segue que a  $l$ -ésima entrada do vetor  $\hat{g}$  será dado por:

$$\begin{aligned} \hat{g}_l &\approx \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\gamma_l(t)) dt \\ &= \sum_{k=1}^{M^2} \alpha_k \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} \chi_{Q_k}(\gamma_l(t)) dt \\ &= \sum_{k=1}^{M^2} A_{l,k} \alpha_k \quad . \end{aligned}$$

Portanto,  $\hat{g}_l \approx \sum_{k=1}^{M^2} A_{l,k} \alpha_k$ , ou seja,  $A\alpha \approx \hat{g}$ .

Em resumo, faremos o seguinte: primeiramente fixaremos a função procurada  $f^\dagger$ , a partir da qual será gerado o vetor  $\hat{g} \in \mathbb{R}^n$ . E, isto, faremos usando integração numérica, conforme a fórmula em (4.9):

$$g_{pj+i} := \int_{a_{ij}}^{b_{ij}} f^\dagger(\gamma_{pj+i}(t)) dt.$$

Em seguida, com o auxílio de uma malha, computamos a matriz  $A \in \mathbb{R}^{M^2 \times n}$  de acordo com (4.12):

$$\int_{Q_k} \gamma_l(t) dt = A_{l,k}.$$

Para melhor compreensão, segue um exemplo mais simples envolvendo a discretização:

**Exemplo:** Considere  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , e suponha que conhecemos as intensidades de emissão  $I_L(x_i) = e^5$  (igual para todas as retas). Fixe as retas  $L_1, L_2, L_3$ . Suponha, ainda, que conhecemos as intensidades dos raios X detectadas referente a cada reta.

Seja  $M = 2$ , então temos uma malha  $4 \times 4$  com lados de tamanho  $\frac{1}{2}$ .

$Q_1$	$Q_2$
$Q_3$	$Q_4$

Suponha que temos a seguinte distribuição das retas sobre a malha:  $L_1$  passa horizontalmente pelo centro dos pixels  $Q_1$  e  $Q_2$ ,  $L_2$  passa horizontalmente pelo centro dos pixels  $Q_3$  e  $Q_4$ , e  $L_3$  passa na diagonal, pelos vértices dos pixels  $Q_1$  e  $Q_4$ . Suponha que as intensidades dois raios X, medidos nos detectores sejam, respectivamente, para as retas  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , dadas por  $e^2, e^{-\frac{1}{2}}$  e  $e^{5-\frac{9\sqrt{2}}{2}}$ .

Suponha que o valor da função  $f$  no pixel  $Q_k$  seja constante e igual a  $d_k$ . Disto, usando (4.7), para cada reta fixada, obtemos:

$$\bullet L_1 : I_{L_1}(x_f) = e^2,$$

$$\ln\left(\frac{e^5}{e^2}\right) = \int_{L_1} f(x)dx \implies 3 = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2.$$

$$\bullet L_2 : I_{L_2}(x_f) = e^{-\frac{1}{2}},$$

$$\ln\left(\frac{e^5}{e^{-\frac{1}{2}}}\right) = \int_{L_2} f(x)dx \implies \frac{11}{2} = \frac{1}{2}d_3 + \frac{1}{2}d_4.$$

$$\bullet L_3 : I_{L_3}(x_f) = e^{5-\frac{9\sqrt{2}}{2}},$$

$$\ln\left(\frac{e^5}{e^{5-\frac{9\sqrt{2}}{2}}}\right) = \int_{L_3} f(x)dx \implies \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}d_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}d_4.$$

Obtemos, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{11}{2} \\ \frac{9\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Nessa situação, a matriz representa a transformada de Radon. O vetor à esquerda, coleta os coeficientes da expansão da aproximação de  $f^\dagger$ , enquanto que o vetor à direita aproxima a função  $g$ . Como o sistema possui mais incógnitas do que equações, não há unicidade de solução.

## 4.2 Testes Numéricos

Antes de apresentarmos, de fato, os experimentos, explicaremos como é realizada a escolha da função convexa  $\varphi$  que induz a Distância de Bregman, [10](#), no método das Projeções Relaxadas, [\(3.2\)](#).

Para isso, usamos o **Método da Variação Total** (TV), o qual faz a escolha da função do seguinte modo:

Seja  $g \in L^1(\Omega)$  fixado,  $\Omega \subset R^2$  limitado. A Variação Total de  $g$  é definida como:

$$TV(g) := \|Dg\|_{L^1(\Omega)},$$

onde  $Dg$  é a derivada fraca de  $g$ . Isto é,

$$TV(g) = \int_{\Omega} |\nabla g(x)| dx.$$

Lembre-se que é necessário para o método das projeções que a  $\varphi$  seja própria, uniformemente convexa e semicontínua inferiormente, o que ainda não obtemos apenas

da definição de  $TV$ . Desse modo, consideramos  $0 < w < 1$ , e  $\varphi : L^2(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  definida, de modo a satisfazer os itens citados anteriormente, por:

$$\varphi(g) := (1 - w)TV(g) + w \frac{\|g\|_{L^2(\Omega)}^2}{2}, \quad (4.13)$$

do que obtemos  $\varphi$  própria, uniformemente convexa, e s.c.i.

Suponha, ainda, que  $g$  seja uma função constante por partes, tal que

$$g := \sum_{i=0}^N \beta_i \chi_{Q_i}, \quad (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N) := \beta \in \mathbb{R}^N. \quad (4.14)$$

Para simplificar, vamos considerar que  $\Omega$  seja um quadrado e  $Q := \{Q_1, Q_2, \dots, Q_N\}$  uma partição composta por quadrados menores, com lados paralelos à fronteira de  $\Omega$ , a qual, na Tomografia Computadorizada, cada  $Q_i, i = 1, \dots, N$ , diz respeito aos pixels pertencentes à malha, veja Subseção 4.1.1. Ao aplicarmos o  $TV$  em  $g$ , obtemos a soma dos produtos dos saltos entre dois elementos de  $Q$ , pelo comprimento da aresta comum a estes dois elementos. Para executar esse cálculo, procedemos do seguinte modo:

Fixe  $1 \leq i \leq j \leq N$ . Seja  $v_{i,j}$  o comprimento de  $e_{i,j} = \overline{Q_i} \cap \overline{Q_j}$ . Temos que  $v_{i,j} \geq 0$ , e  $v_{i,j} = 0 \iff e_{i,j} = \emptyset$ , ou se  $e_{i,j}$  é um conjunto unitário. Para um par  $(i, j)$  tal que  $v_{i,j} > 0$ , dizemos que  $e_{i,j}$  é **aresta** entre  $Q_i$  e  $Q_j$ . Sob essas condições, temos:

$$TV(g) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} |\beta_i - \beta_j| v_{i,j}. \quad (4.15)$$

Para o cálculo da  $TV(g)$ , (4.15): suponha que existam  $n$  arestas e fixe uma ordem para elas. Seja  $L \in \mathbb{R}^{n \times N}$  a matriz cuja  $m$ -ésima linha é dada por  $[0 \cdots 0 v_{i,j} 0 \cdots 0 -v_{i,j} 0 \cdots 0]$ , onde  $v_{i,j}$  representa a  $m$ -ésima aresta de modo que os valores  $v_{i,j}$  e  $-v_{i,j}$  estão nas posições  $i$  e  $j$  respectivamente. Assim, temos que a  $m$ -ésima entrada do vetor  $L\beta$  é dado por

$$(L\beta)_m = (\beta_i - \beta_j)v_{i,j}. \quad (4.16)$$

Portanto, para  $g$ , (4.14), temos

$$\|L\beta\|_1 = \sum_{m=1}^n |(L\beta)_m| = \sum_{m=1}^n |\beta_i - \beta_j| v_{i,j} = TV(g).$$

Ou seja, para uma  $g$  constante por partes, (4.14), temos o  $TV(g)$  como escrito acima.

Lembre-se que nas Projeções Relaxadas temos o funcional de Tikhonov dado por:

$$T_k(x) = \frac{\hat{\lambda}}{r} \|\mathcal{A}x - y^\delta\|^r + \Delta_{\xi_k^\delta} \varphi(x, x_k^\delta).$$

Ainda, para a minimização do funcional o derivamos e igualamos a zero, caso seja possível. Assim, para derivação da  $\varphi$ , (4.13), usamos uma aproximação suave para o  $TV(g)$ .

Considere  $\epsilon > 0$ , pequeno o suficiente, usamos a seguinte aproximação:

$$TV_1(g) = \sum_{m=1}^n \sqrt{|(L\beta)_m|^2 + \epsilon},$$

e reescrevemos a  $\varphi$  como

$$\varphi_1(g) = (1 - w)TV_1(g) + \frac{w}{2}\|g\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Disto, obtemos  $\varphi_1$  própria, uniformemente convexa, e continuamente Fréchet - diferenciável. Sendo possível, assim, sua derivação. Portanto, derivando  $TV_1(g)$ , obtemos

$$\nabla TV_1(g) = L^T q(g)_m, \quad (4.17)$$

onde

$$q(g)_m = \frac{(L\beta)_m}{\sqrt{|(L\beta)_m|^2 + \epsilon}}.$$

Assim, temos a derivada de  $\varphi_1$  dada por:

$$\nabla \varphi_1(g) = (1 - w)L^T q(g) + wg. \quad (4.18)$$

Do que obtemos a seguinte forma para a distância de Bregman:

$$\Delta \varphi_1(g, g_k) = \varphi_1(g) - \varphi_1(g_k) - \langle \nabla \varphi_1(g_k), g - g_k \rangle,$$

onde  $g_k = \sum_{i=1}^N (\beta_k)_i \chi_{Q_i}$ , com  $((\beta_k)_1, (\beta_k)_2, \dots, (\beta_k)_N) \in \mathbb{R}^N$ , e  $\nabla \varphi_1(g_k)$  é dado por (4.18).

Desse modo, obtemos, para  $g$  em (4.14), com  $Y = L^r(\Omega)$ , que:

$$\nabla T_k(g) = \lambda A^* J_r(Ag - y) + \nabla \varphi(g) - \nabla \varphi(g_k),$$

sendo,  $J_r(y) = \text{sign}(y)|y|^{r-1}$ ,  $r > 1$ . Em particular, para  $r = 2$ ,  $J_r(y) = y$ .

Podemos, portanto, minimizar o funcional de Tikhonov com distância de Bregman induzida pela  $\varphi$  escolhida através do Total Variation.

Nos experimentos, usamos o método do Gradiente para minimizar o funcional  $T_k$ .

Para que a escrita siga de acordo com a definição do Algoritmo 1, voltaremos a usar  $x$  ao invés de  $g$ .

Nos testes a seguir usamos os seguintes métodos: Tikhonov Iterado ( $TK$ ), apresentado na Subseção 3.1.2, a variação Landweber do Gradiente ( $LW$ ), apresentado na Subseção 3.1.3, ambos apresentados na Seção 3.1, e Projeções Relaxadas ( $PR$ ), apresentado na Seção 3.2.

Foram realizados 3 testes, neles fixamos uma solução procurada, nela atribuímos valores constantes, como no exemplo na Figura 6, onde os valores são 1 e 2. Fixamos, ainda, o número de ângulos  $m = 40$ , o número de retas paralelas a cada ângulo  $p = 60$ , e para a malha  $M = 30$ . Assim, obtemos uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{M^2 \times m \cdot p} = \mathbb{R}^{900 \times 2400}$ , e  $y \in \mathbb{R}^{2400}$ .

No método das Projeções Relaxadas ( $PR$ ), consideramos as seguintes entradas:

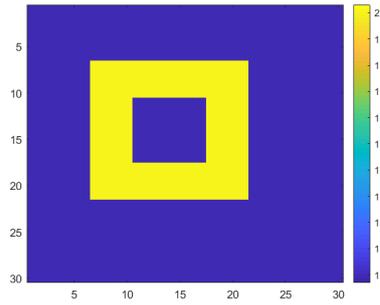


Figura 6 – Exemplo de atribuição de valores

- $\bar{\eta} = 0, 1,$
- $\eta = 0, 95,$
- $x_0 \equiv 1,$
- $\xi_0 \in \partial\varphi(x_0), \xi_0 = \nabla\varphi(x_0),$
- $r = 2$
- $\tau = 1.1$
- $\epsilon = 0.2$

Ainda, seguindo o Algoritmo 1, precisamos que o resíduo  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y\|$  pertença ao intervalo  $[c_k, d_k]$ . Para isso, durante a iteração:

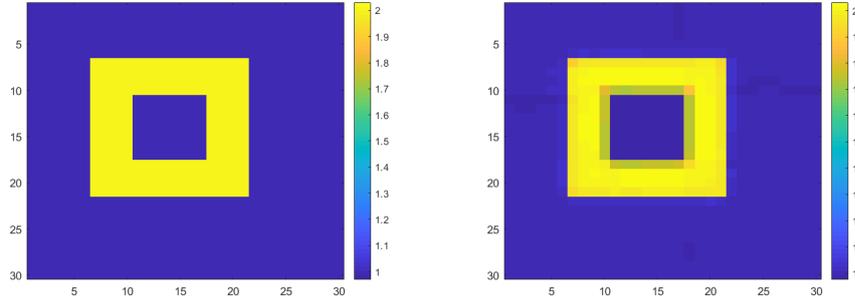
- Se  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y\| < c_k$ , então multiplicamos o multiplicador de Lagrange  $\hat{\lambda}$  por 10;
- Se  $\|\mathcal{A}x_k^\delta - y\| > d_k$ , então dividimos o multiplicador de Lagrange  $\hat{\lambda}$  por 10;
- Se, mesmo após realizar uma das operações acima, o resíduo seguir fora do intervalo, então o algoritmo aplica o método da bissecção.

#### 4.2.1 Teste 1

Para o primeiro teste, consideramos  $\delta = 0$ . Isto é, neste momento, nossos dados não possuem ruídos. Implementamos o método das Projeções Relaxadas (*PR*), com um número de iterações máximas igual a 10.

a) Na Figura 7, a efeito de observação visual da reconstrução realizada pelo *PR*, fixamos a solução procurada, e comparamos com a reconstrução realizada pelo método.

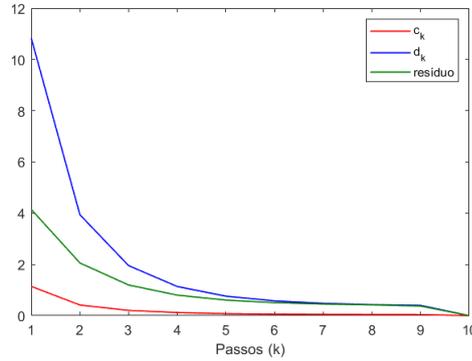
Figura 7 – Reconstrução sem ruídos: à esquerda a solução fixada, e à direita a reconstrução realizada pelo *PR*.



Fonte: A autora, 2024.

b) Como estamos estudando o caso sem ruídos, temos que a iteração pára no número de iterações máximo, visto que o critério de parada não é satisfeito. A Figura 8 mostra o decaimento do resíduo  $\|\mathcal{A}x_k - y\|$ , em comparação ao intervalo  $[c_k, d_k]$ . Observe que  $c_k \leq \|\mathcal{A}x - y\| \leq d_k$ , conforme o esperado (passo 8 do Algoritmo 1).

Figura 8 – Decaimento do Resíduo



Fonte: A autora, 2024.

Na Figura 9, o resíduo é plotado na escala semi-logarítmica, de onde é possível observar como, durante o teste, o decaimento do resíduo cumpre o esperado.

Note que, pela teoria, Proposição 12, temos que o resíduo deve ser limitado por

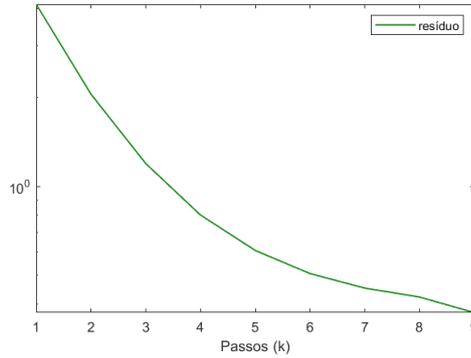
$$\bar{\eta}^k \|\mathcal{A}x_0 - y\| \leq \|\mathcal{A}x_k - y\| \leq \eta^k \|\mathcal{A}x_0 - y\|,$$

do que, tomando o log, temos  $k \log(\bar{\eta}) \leq \log\left(\frac{\|\mathcal{A}x_k - y\|}{\|\mathcal{A}x_0 - y\|}\right) \leq k \log(\eta)$ . Assim,

$$\log(\bar{\eta})k + \log(\|\mathcal{A}x_0 - y\|) \leq \log(\|\mathcal{A}x_k - y\|) \leq \log(\eta)k + \log(\|\mathcal{A}x_0 - y\|).$$

Observa-se que o logaritmo do resíduo se encontra entre duas funções afins:  $f(k) = \log(\bar{\eta})k + \log(\|\mathcal{A}x_0 - y\|)$  e  $g(k) = \log(\eta)k + \log(\|\mathcal{A}x_0 - y\|)$ , cujos gráficos são retas com inclinações dadas por  $\log(\bar{\eta}) = -1$  e  $\log(\eta) = -0,0223$ , respectivamente. Portanto, a inclinação da reta tangente à curva apresentada na Figura 9 deve respeitar esses limites.

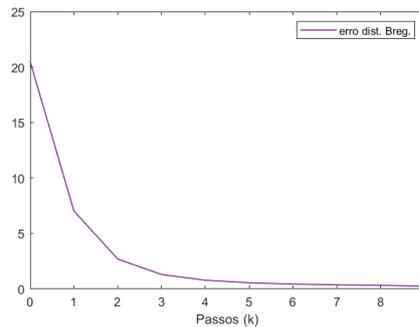
Figura 9 – Decaimento do Resíduo



Fonte: A autora, 2024.

c) Analisamos também o comportamento da Distância de Bregman a cada iteração. Temos que, durante os testes, pela [Figura 10](#), como esperado, há o decaimento a cada iteração. Isto está de acordo com o que diz a teoria (nesse caso, usamos  $x^*$  em (3.32) como sendo a solução procurada, apresentada na [Figura 6](#)).

Figura 10 – Decaimento da Distância de Bregman



Fonte: A autora, 2024.

#### 4.2.2 Teste 2

A partir de agora consideramos dados ruidosos, isto é,  $\delta > 0$ .

Os dados com ruídos são do tipo  $y^\delta = y + \|y\|\zeta\hat{\delta}$ , com  $\zeta$  um vetor com entradas aleatórias e uniformemente distribuídas entre  $[-1, 1]$  e  $\|\zeta\| = 1$ , gerado usando o comando *randn*. Perceba que  $\hat{\delta} = \frac{\|y - y^\delta\|}{\|y\|}$ . Adotamos a discrepância, (3.9), como critério de parada. Nesse caso, usamos  $\delta = \hat{\delta}\|y\|$ , que é o nível de ruídos absoluto, o que resulta em  $\delta = \|y - y^\delta\|$ . Definimos o erro de iteração relativo no passo  $k$ , como sendo

$$E_k = \frac{\|x_k^\delta - x^\dagger\|}{\|x^\dagger\|},$$

onde  $x^\dagger$  é a função procurada, usada para gerar os dados. Para compararmos o desempenho dos métodos de regularização citados anteriormente: a [Tabela 1](#) mostra os resultados durante o Teste 2, e a [Figura 11](#) mostra as reconstruções realizadas por cada método.

Para este experimento, definimos  $\hat{\delta} = 0,02$ . Ainda, para o *TK*, consideramos  $\alpha = 1$ , e no *LW*, consideramos o tamanho de passo  $\lambda_{LW} = 0,1$ .

a) A [Tabela 1](#) mostra os resultados quanto a número de iterações realizadas  $k_\delta$  até atingir o princípio da discrepância, o erro de iteração relativo  $E_{k_\delta}$  na última iteração, e o tempo em segundos, medido usando o comando *tic toc*, para executar a reconstrução.

Tabela 1 – Resultados dos Testes

	$k_\delta$	$E_{k_\delta}$	Tempo (seg)
<i>PR</i>	14	3%	43,5582
<i>TK</i>	15	5%	0,5374
<i>LW</i>	111	7%	0,6074

Fonte: A autora, 2024.

A partir dos dados da tabela, no que diz respeito ao método *LW*, o número de iterações necessárias para a reconstrução e o tempo de iteração total mostram a convergência lenta característica desse método, visto que ele ultrapassou em quase 100 iterações o número de iterações dos outros dois métodos. Porém, seu tempo de execução foi comparável ao *TK* e muito menor do que o método *PR*, evidenciando o fato de que as iterações desse método são computacionalmente baratas. Contudo, além de precisar de mais iterações, ele também obteve maior  $E_{k_\delta}$  que os demais. O método *TK* obteve o menor tempo de iteração, e o segundo menor erro, bem como o segundo menor número de iterações necessárias. O *PR* embora com um tempo maior de execução, apresentou menor erro e menor número de iterações.

Em relação ao número de iterações, o de melhor performance foi *PR*, com o *LW* precisando de um número superior de iterações comparado aos outros dois métodos. Com relação ao erro de iteração, o de melhor performance foi o *PR*, com o *LW* obtendo um erro maior que os outros dois métodos (ou seja, o método *LW* termina mais rápido, porém necessita de mais passos, e o erro não foi o melhor em relação aos outros dois). Com relação ao tempo, o *TK* apresentou o menor tempo de iteração necessária, e sendo o *PR* o com maior tempo de iteração. Porém, observe que nas iterações do *PR* é necessária a minimização de um funcional mais complexo do que no caso dos demais métodos, visto também ser necessário o uso do *TV* o que implica a necessidade resolver um sistema não linear em cada iteração.

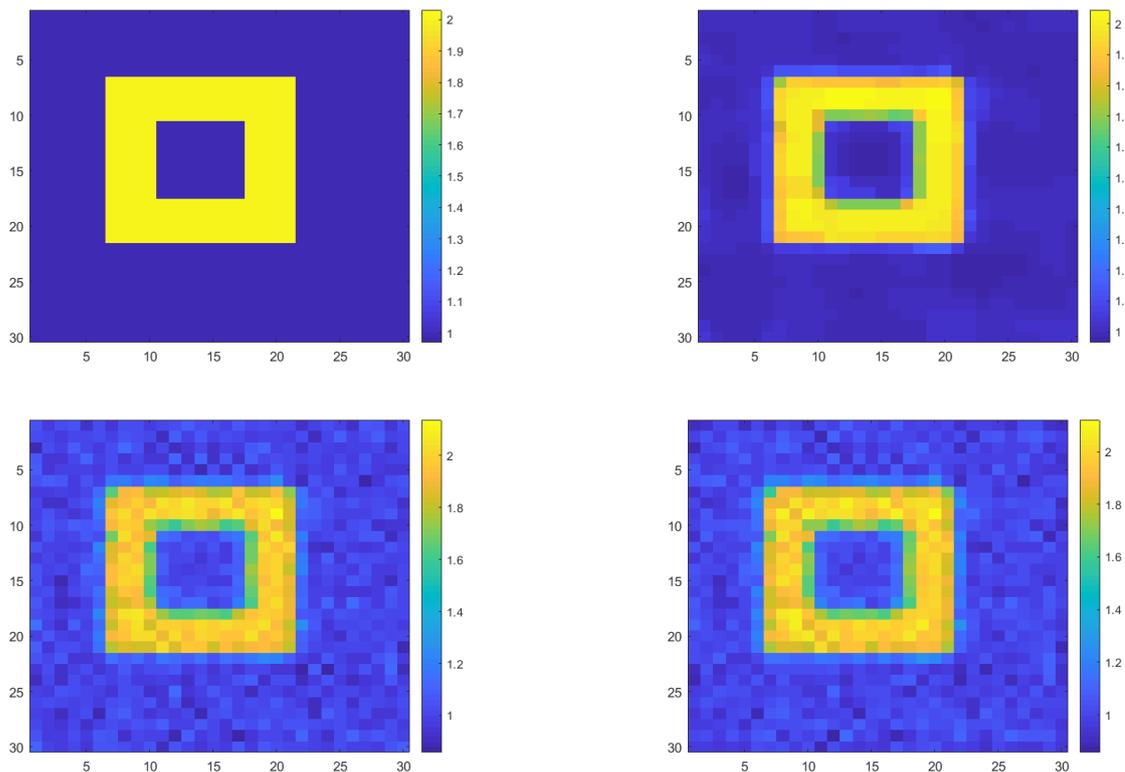
Porém, o *PR* apresentou melhor performance na reconstrução da solução, como observaremos a seguir.

b) Na tabela abaixo, [Figura 11](#), as imagens mostram a reconstrução da solução realizada por cada um dos métodos.

A reconstrução realizada pelo método *PR* mostra mais nitidez e, lembrando que o *TV* penaliza os saltos entre os pixels da malha (o que significa que as partes onde

a solução é constante tendem a ser preservadas), com relação aos outros dois métodos, percebemos que a borda da área em amarelo fica mais evidente, as áreas em azul e em amarelo, onde a função permanece constante, percebemos poucas alterações. Por sua vez, a reconstrução realizada pelo *TK* permite ver a figura central (em amarelo), porém com uma perda de nitidez maior na transição entre a área em amarelo e a em azul, em comparação com a reconstrução do *PR*. O método *LW* apresentou uma reconstrução menos satisfatória, comparada à realizada pelos outros dois métodos, nota-se a perda na resolução das áreas em amarelo e azul. Percebemos uma proximidade das reconstruções realizadas pelos métodos clássicos, e ainda a reconstrução realizada pelo *PR* mais próxima da original.

Figura 11 – Imagem da solução fixada no canto superior esquerdo. Reconstruções realizadas pelos métodos: pelo *PR*, no canto superior direito, pelo *TK* no canto inferior esquerdo e pelo *LW* no canto inferior direito.

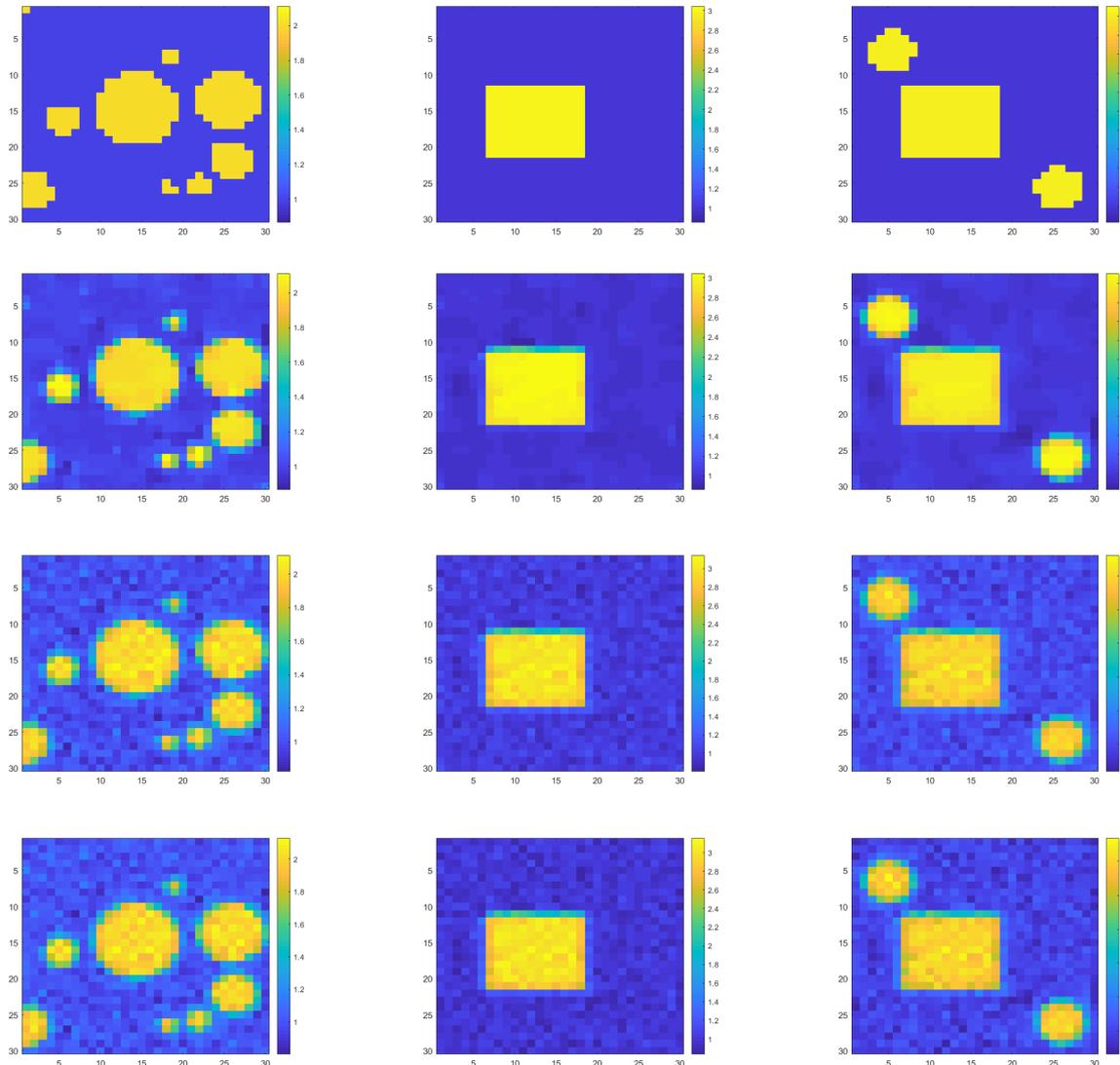


Fonte: A autora, 2024.

### 4.2.3 Teste 3

Neste teste fixamos 3 soluções, e apresentamos a reconstrução realizada por cada um dos métodos para cada uma das soluções, [Figura 12](#). Aqui, definimos  $\hat{\delta} = 0.02$ , nas mesmas condições do teste 2.

Figura 12 – Na primeira linha: soluções fixadas. Na segunda, terceira, e quarta linha: reconstruções realizadas pelo  $PR$ ,  $TK$  e  $LW$ , respectivamente



Fonte: A autora, 2024.

Note que, do mesmo modo que no Teste 2, as reconstruções realizadas pelo  $PR$  apresentam mais nitidez nas áreas em que a função é constante. Os outros dois métodos,  $TK$  e  $LW$ , apresentam reconstruções similares entre eles, em áreas onde a função é constante e nos saltos a reconstrução é menos nítida que a realizada pelo  $PR$ . Nenhum dos três métodos foi capaz de detectar a pequena inclusão existente no canto superior esquerdo da primeira imagem.

Durante as reconstruções, [Figura 12](#), testamos, ainda, as cotas apresentadas no [Corolário 1.1](#) para o número máximo de iterações  $k_\delta$ , no método das Projeções Relaxadas. O número de iterações máximo da primeira reconstrução (da primeira solução fixada) foi  $k_\delta = 12$ , com a cota inferior igual a 0,4803 e a superior igual a 69,3110. Para a reconstrução da segunda solução, a imagem no centro da primeira linha, obtivemos  $k_\delta = 9$ , com 0,6352

e 76,26517 sendo as cotas inferior e superior respectivamente. Para a terceira reconstrução, obtivemos  $k_\delta = 8$ , com cota inferior igual a 0,4577 e superior igual a 68,2971. Desse modo, nos testes realizados o número de interações necessárias segue o que nos diz a teoria.

## 5 Conclusão

Este trabalho abordou técnicas de regularização para problemas inversos lineares, o problema inverso da Tomografia Computadorizada e a aplicação das técnicas estudadas nesse problema.

A partir da definição de problema inverso bem posto, por Hadamard (1902), vimos que por ser uma definição dificilmente satisfeita é aceita uma nova definição, proposta por Nashed (1987), admitindo, assim, soluções aproximadas para um problema inverso. Desse modo, o texto apresentou a teoria da regularização para problemas inversos lineares, que mostra que é possível aproximar a inversa generalizada do operador, por uma família de operadores de reconstrução com uma escolha de parâmetros adequada. Os métodos de Tikhonov (clássico e iterado), Gradiente e Projeções Relaxadas foram os métodos estudados no texto e foi realizada, ainda, a análise de convergência do segundo. No que diz respeito à análise de convergência do método das Projeções Relaxadas, podemos encontrar em Pauleti (2021).

O presente trabalho, permitiu, ainda, o estudo do problema inverso da Tomografia Computadorizada, incluindo a modelagem matemática que envolve o problema, e sua discretização. Neste contexto, foi possível, através de testes numéricos, observar a aplicação e o desempenho dos métodos ao problema prático, e comparar os resultados obtidos durante os testes com as expectativas teóricas.

A partir dos experimentos numéricos realizados, concluímos que a utilização de um funcional convexo apropriado no método de Tikhonov resultou, nos testes executados, em reconstruções mais apropriadas. Como ponto negativo podemos citar o fato que, nesse caso, a determinação do minimizador do funcional de Tikhonov se torna mais lenta e complicada.

# Referências

- BOIGER, R.; SVAITER, B. Range-relaxed criteria for choosing the lagrange multipliers in nonstationary iterated tikhonov method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 40, n. 1, p. 606–627, 2020.
- EKELAND, I.; TÉMAM, R. *Convex Analysis and Variational Problems*. Philadelphia, PA: SIAM, 1999.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
- HADAMARD, J. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, p. 49–52, 1902.
- JIN, Q. Inexact newton-landweber iteration for solving nonlinear inverse problems in banach spaces. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 28, n. 6, p. 065002, 2012.
- KIRSCH, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. 2. ed. S.l.: Springer Nature, 2011. v. 120.
- KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. 1st. ed. New York: John Wiley & Sons, 1978. ISBN 978-0471324223.
- LANDWEBER, L. An iteration formula for fredholm integral equations of the first kind. *American Journal of Mathematics*, v. 73, p. 615–624, 1951.
- MARGOTTI, F. *On Inexact Newton Methods for Inverse Problems in Banach Spaces*. Tese (PhD thesis) — Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2015. Tese de Doutorado.
- MARGOTTI, F. Inexact newton regularization combined with gradient methods in banach spaces. *Inverse Problems*, IOP Publishing, v. 34, n. 7, p. 075007, 2018.
- MARGOTTI, F.; HAFEMANN, E.; SANTANA, L. M. *Implementação computacional da tomografia por impedância elétrica*. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2023.
- NASHED, M. A new approach to classification and regularization of ill-posed operator equations. In: *Inverse and ill-posed problems*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 1987. p. 53–75.
- NATTERER, F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Philadelphia: SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1986. ISBN 9780898714937.
- PAULETI, M. A. *Método das Projeções Relaxadas com Penalização Uniformemente Convexa para Solução de Sistemas Lineares Mal-Postos em Espaços de Banach*. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada), Florianópolis, 2021.
- PENTON, M.; MARGOTTI, F.; LEITÃO, A. On the choice of lagrange multipliers in the iterated tikhonov method for linear ill-posed equations in banach spaces. *Inverse Problems in Science Engineering*, Taylor Francis, v. 28, n. 6, p. 796–826, 2020.

---

RIEDER, A. *Keine Probleme mit Inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. 1. ed. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2003.