

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
EXAME DE QUALIFICAÇÃO - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS  
Semestre 2019-2

1. Obtenha a formula de D'Alembert para a equação de ondas. Usando esta formula, resolva o PVI seguinte:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = x^2 - x, \\ u_t(x, 0) = 2x - 1. \end{cases}$$

2. Encontrar a solução da seguinte equação do calor não homogênea:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}, \\ u_x(0, t) = 0 = u_x(L, t), t > 0, \\ u(x, 0) = 0, 0 < x < L. \end{cases}$$

3. (a) Definir a Transformada de Fourier em  $\mathbb{R}^n$  e enunciar algumas de suas principais propriedades (sem prova).  
(b) Por coordenadas polares, se pode calcular que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-a\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, a > 0.$$

Use isso para provar que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-k\xi^2 t} e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

com  $k > 0, t > 0$ . *Dica: calcule  $\varphi'(x)$  e integre por partes para achar uma EDO para  $\varphi(x)$ . Identifique o valor de  $\varphi(0)$  e encontre  $\varphi(x)$ .*

- (c) Usando a Transformada de Fourier e o item (b) calcule a solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases}$$

com  $f$  continua e limitada. Em que sentido a solução obtida satisfaz o dado inicial?

- (d) Com base na solução obtida no item (c) encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

sendo  $q = q(x, t)$  uma função regular e limitada. *Dica: usar a fórmula de Duhamel.*

4. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- (a) Qual a forma canônica de Jordan de  $A$ . Que propriedade usou para isso?
- (b) Calcule  $e^{tA}$  pelo método de autovalores.

5. Discutir a estabilidade da solução nula da EDO:

$$y'' - y' + 2y + y^2 = 0$$

*Dica: Considere*

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{3}y^3$$

*em uma vizinhança de  $(0, 0)$ . Por que isso é suficiente?*