

Eduardo Pandini Barros

*Existência de Solução para um
Problema de Controle Associado
ao Sistema de Ginzburg-Landau e
um Método Numérico para
Modelos Correlatos*

Florianópolis

2019

Eduardo Pandini Barros

**Existência de Solução para um Problema de
Controle Associado ao Sistema de
Ginzburg-Landau e um Método Numérico para
Modelos Correlatos**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada do Departamento de Matemática, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Matemática Aplicada.

Universidade Federal de Santa Catarina

Orientador: Dr. Fabio Silva Botelho

Florianópolis, SC
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Barros, Eduardo Pandini

Existência de solução para um problema de controle associado ao sistema de Ginzburg-Landau e um método numérico para modelos correlatos / Eduardo Pandini Barros ; orientador, Fabio Silva Botelho, 2019.

103 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

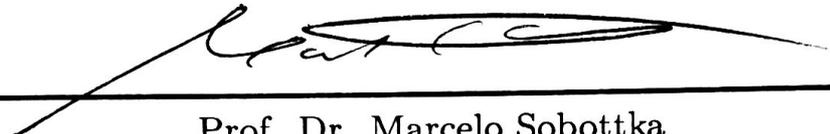
Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Otimização. 3. Problema de Controle Ótimo. 4. Métodos Numéricos. 5. Supercondutividade. I. Botelho, Fabio Silva. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Eduardo Pandini Barros

**Existência de Solução para um Problema de Controle
Associado ao Sistema de Ginzburg-Landau e um Método
Numérico para Modelos Correlatos**

Esta dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre, e
aprovada em sua forma final pelo Curso de Pós-Graduação em
Matemática Pura e Aplicada.



Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador de Curso



Prof. Dr. Fabio Silva Botelho
Orientador



Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Participação via videoconferência
Portaria nº 1099/2018/GR

Profa. Dra. Celene Buriol (UFSC)



Prof. Dr. Juliana de Bem Francisco (UFSC)



Prof. Dr. Maicon Marques Alves (UFSC)

"A dignidade se expressa na capacidade de persistir."

— CORTELLA, M.S.

Agradecimentos

Jamais poderia submeter este trabalho sem deixar registrado meu imenso sentimento de gratidão às pessoas que estiveram presentes ao meu lado ao longo do processo de construção da dissertação.

O conhecimento deve encantar as pessoas, não deve ser um fardo. Agradeço a cada um dos citados a seguir por me ajudarem a continuar acreditando que é possível resgatar este encanto apesar das adversidades.

De maneira especial, dedico os meus agradecimentos a três pessoas que foram absolutamente essenciais para a conclusão do trabalho: À minha mãe, Itatiane Pandini, por toda a confiança em mim depositada, por todo o cuidado e preocupação com que me acompanhou e me amparou. Ao meu orientador Prof. Dr. Fabio Silva Botelho pela imensa paciência, compreensão e solicitude que teve comigo durante todo período de trabalho. E à minha grande amiga, e madrinha da dissertação, Marina Geremia pelo constante incentivo ao meu trabalho e por me mostrar que antes de sermos matemáticos ou cientistas devemos ser humanos e praticar a empatia. Muito obrigado por permanecerem confiando em mim.

Gostaria citar algumas pessoas que também foram especiais ao longo desse processo e que, cada um a sua maneira, me motivaram a persistir e se mantiveram pacientes e compreensivos. Estes amigos possuem, portanto, a minha gratidão pelo fomento moral ao meu trabalho.

Agradeço as minhas grandes amigas Aline Becher pela partilha de nossas angústias, pelo tempo dedicado à nossa amizade e parceria, pelas horas de estudos juntos e também pelas horas de pausa nos estudos. A Daniella Losso agradeço pelo mais que necessário apoio em meus projetos profissionais, também pelos momentos de descontração e otimismo. A Priscilla Saito pela certeza de possuir uma ótima amiga e excelente ouvinte a uma mensagem de distância. Sou grato a Sabrina Viganò por me proporcionar memoráveis momentos e crescimento emocional.

Também gostaria de agradecer aos meus amigos Dionatan Cardozo pelo fornecimento constante de otimismo, e leveza. A Edson Kluck pelo companheirismo, imensa compreensão e por sempre acreditar no meu potencial. E a Ricardo Murdock pelas longas conversas, reflexões e paciência.

Agradeço a professora Dra. Celene Buriol pela cuidadosa revisão neste trabalho também agradeço ao fomento financeiro do CNPq através da bolsa de mestrado.

Também gostaria de deixar registrado os meus agradecimentos a pessoas que dedicam o seu ofício a inspirar e tocar os sentimentos de

outros. Aos artistas que me acompanharam através de suas músicas, textos, obras, o processo de criação deste trabalho.

Chegar para agradecer e louvar.

[...]

A beira do abismo,

O punhal do susto de cada dia.

Agradecer as nuvens que logo são chuva,

Sereniza os sentidos

E ensina a vida a reviver.

Agradecer os amigos que fiz

E que mantém a coragem de gostar de mim, apesar de mim...

[...]

Agradecer as marés altas

E também aquelas que levam para outros costados todos os males.

[...]

Agradecer,

Ter o que agradecer.

Maria Bethânia

Resumo

As equações de Ginzburg-Landau modelam o comportamento de amostras de certos tipos de materiais durante suas mudanças de fase do estado normal para o estado supercondutor, mediante um parâmetro complexo cuja norma ao quadrado representa a densidade de elétrons na fase supercondutora. Diversas são as possíveis aplicações do estudo da supercondutividade, principalmente na presença de um campo magnético externo, influenciando a mudança de fase. Tendo em vista o vasto interesse científico nesta equação, um problema de controle ótimo pode ser associado a mesma, onde desejamos aproximar a distribuição de densidade de elétrons supercondutores a uma densidade pré-estabelecida. Faz-se necessário encontrar uma demonstração formal para existência de uma solução para tal problema. A demonstração de existência proposta neste trabalho baseia-se no teorema de Rellich-Kondrachov, na desigualdade de Friedrichs e na utilização do Gauge de London. No que se refere ao contexto numérico, o método das linhas generalizado pode ser utilizado como alternativa bastante eficiente para encontrar uma solução aproximada para problemas elípticos semelhantes às equações de Ginzburg-Landau, aproximando o estudo teórico do problema com aplicações práticas de interesse científico tecnológico.

PALAVRAS-CHAVE: Supercondutividade, Equações de Ginzburg-Landau, Teorema de Rellich-Kondrachov, Método das linhas generalizado.

Abstract

The Ginzburg-Landau equations model the behavior of some types of material samples during their phase transition from a normal state to a superconducting one, through a complex parameter whose absolute value square represents the density of electrons in the superconducting phase. There are several possible applications of superconductivity, especially in the presence of an external magnetic field, affecting the phase transition process. Given the vast scientific interest in these equations, it is possible to associate them with an optimal control problem, through which we intend to approximate the superconducting electron density of the sample to a known given density distribution. It is necessary for such a problem to develop the formal details relating the proof of existence of a concerning solution. Such a proof of existence proposed in this work is based on the Rellich-Kondrachov theorem, on the Friedrichs inequality and on the so-called gauge of London. About the numerical context, the generalized method of lines may also be used as a very efficient tool to find an approximate solution to elliptical problems similar to the Ginzburg-Landau equations, connecting their theoretical study and practical applications of scientific and technological interest .

KEY-WORDS: Superconductivity, Ginzburg-Landau Equations, Rellich-Kondrachov Theorem, The Generalized Method of Lines.

Sumário

1	Introdução	p. 17
2	Supercondutividade	p. 21
2.1	Supercondutores	p. 22
2.2	Efeito Meissner-Ochsenfeld	p. 24
2.3	Diamagnetismo	p. 26
2.4	Supercondutividade do tipo I e do tipo II	p. 28
2.5	Supercondutividade e mudança de fase	p. 30
2.6	Teoria de Ginzburg-Landau em Sistemas não-homogêneos	p. 33
3	Tópicos em Análise e Análise Funcional	p. 37
	Espaços Normados e espaços métricos	p. 38
	Espaço Dual	p. 41
	Operador Adjunto	p. 46

Conceitos básicos de Cálculo Variacional	p. 48
4 Espaços L^p e Espaços de Sobolev	p. 55
5 Existência de Solução para um problema de Controle Associado ao Sistema de Ginzburg-Landau	p. 67
6 Método das Linhas Generalizado	p. 81
6.1 O método	p. 81
6.2 Exemplo Numérico	p. 90
6.3 Código em MatLab	p. 93
7 Conclusão	p. 99
Referências	p. 101

1 *Introdução*

Na primeira metade do século XX iniciou-se o estudo do comportamento de diversos tipos de materiais a temperaturas muito baixas, próximas do zero absoluto $0K$ (ou aproximadamente $-273,15^\circ C$). Constatou-se, inicialmente, que alguns metais apresentavam propriedades físicas muito exóticas ao atingir determinada temperatura. A principal excentricidade observada foi a súbita ausência de resistividade à corrente elétrica, permitindo que alguns materiais pudessem manter as chamadas super-correntes elétricas. Daí surgiu o termo supercondutores.

O fato de ser possível manter uma corrente permanente ao longo de meses e até mesmo anos com pouca dissipação de energia despertou o interesse e a curiosidade da comunidade científica. Hoje, existem diversas aplicações práticas do uso de materiais supercondutores em diferentes áreas das ciências aplicadas.

A resistividade nula, ou equivalentemente, a condutividade ilimitada de uma amostra acarreta em outros comportamentos físicos

intrigantes como o chamado fenômeno de Meissner-Ochsenfeld, que como consequência do comportamento supercondutor provoca a expulsão de um campo magnético externo de baixa intensidade do interior da amostra.

Diversas são as formas de definir, medir e aferir o comportamento supercondutor de um material, porém o fato destas mudanças abruptas de propriedades ocorrerem com a mudança de temperatura caracteriza este processo como uma mudança de fase termodinâmica, semelhante a mudança de fase de uma substância em estado gasoso para estado líquido, por exemplo. Esta abordagem foi fundamentada pela teoria desenvolvida pelos físicos Ginzburg e Landau no início dos anos de 1950 [2].

A teoria de Ginzburg-Landau (GL) estuda o processo de transição de fase de uma amostra em seu estado normal (com resistividade positiva) e o seu estado supercondutor. Minimizando a energia livre de um sistema quando variamos parâmetros que dependem da temperatura encontramos o estado mais estável de uma amostra, e portanto, o estado em que a mesma se apresenta. Este estado é caracterizado pela densidade de elétrons que apresentam comportamento supercondutor.

A teoria GL mostra a sua verdadeira potencialidade quando incorporamos a presença de um campo magnético externo agindo sobre um material supercondutor. A demonstração da existência de uma solução para um problema de controle ótimo associado às

equações que modelam o problema, onde pretendemos aproximar a distribuição de densidade de elétrons supercondutores a uma distribuição de densidade dada, pode ser feita lançando mão de conceitos de análise funcional, cálculo variacional, equações diferenciais e algumas hipóteses físicas.

Afim de encontrar uma solução numérica para este problema, pode-se utilizar algum método computacional como o método das linhas generalizado, desenvolvido em [4].

O presente trabalho visa ilustrar os conceitos básicos de matemática, bem como noções intuitivas da física que envolvem as equações de Ginzburg-Landau, apresentar uma demonstração para a existência de uma solução para o problema de controle ótimo mencionado e desenvolver (e aplicar) o método das linhas generalizado para encontrar uma solução numérica aproximada de um sistema correlato.

No capítulo 3 o texto traz noções básicas de análise, análise funcional e cálculo variacional. São conceitos necessários ao entendimento da demonstração principal do trabalho e que podem ser revisados neste capítulo. Em seguida, no capítulo 4 são apresentados os conceitos fundamentais que envolvem os espaços de Sobolev. Bem como o teorema de Relich-Kondrachov, pedra fundamental da demonstração da existência de solução para o problema de controle ótimo associado a equação GL na presença de um campo magnético externo.

O capítulo 2 trata de um apanhado da teoria física do problema, com o principal objetivo de contextualizar o leitor e dar uma interpretação intuitiva para a equação estudada e compreensão da complexidade do fenômeno estudado. Aqui, algumas hipóteses físicas e suas consequências são explanadas e utilizadas para modelamento matemático no capítulo seguinte, como o gauge de London, por exemplo, que é uma consequência física do problema que entra como informação complementar na demonstração da existência.

Já o capítulo 5 traz o resultado principal do trabalho: A demonstração da existência de solução para um problema de controle ótimo associado à equação de Ginzburg-Landau. Aqui convergem os conhecimentos prévios de análise funcional, cálculo variacional, espaços de Sobolev e tecnicidades físicas oriundas da aplicação e contidas ao longo do trabalho para culminar no resultado pretendido.

O método das linhas generalizado aplicável a problemas elípticos é desenvolvido em detalhes no capítulo 6, alguns resultados importantes como o desenvolvimento do método, exemplos numéricos e código implementado em Matlab também podem ser encontrados nesta seção.

No capítulo final apresentamos nossas considerações finais a respeito do tema trabalhado.

2 *Supercondutividade*

O presente capítulo pretende apresentar de forma introdutória os conceitos físicos aplicáveis ao estudo de materiais supercondutores. Serão expostos os fatos fundamentais sobre supercondutores, como a definição e características do comportamento desses materiais, além de explanar sobre as Equações de London, que constituem um conceito fundamental para o entendimento das hipóteses na abordagem teórica que se segue no fim do trabalho.

Discutiremos ainda o efeito Meissner-Ochsenfeld, que explica o comportamento de supercondutores na presença de campos magnéticos externos, as diferenças entre supercondutores do tipo I e do tipo II. Finalmente, apresentaremos o problema de Ginzburg-Landau.

As principais referências bibliográficas para este capítulo, onde os detalhes dos conceitos expostos a seguir se encontram, são [2],[4],[5] e [10].

2.1 Supercondutores

A condutividade elétrica é a medida da capacidade de um material transportar carga elétrica. De maneira análoga, existe a sua recíproca resistividade elétrica que é a grandeza física que quantifica o quão fortemente um material se opõe ao fluxo de uma corrente elétrica.

A resistividade elétrica é uma função da temperatura, pois a mesma está associada a mobilidade dos elétrons e suas colisões com outras partículas.

Foi observado que, para a maioria dos metais, a resistividade elétrica se comporta de maneira padrão, como uma função decrescente da temperatura, isto é, com o decréscimo da temperatura uma amostra resiste menos fortemente a um fluxo de corrente elétrica. No entanto, para uma classe de materiais algo completamente diferente acontecia: com o resfriamento, a resistividade inicialmente seguia o comportamento suave simples, mas abruptamente anulava-se.

A temperatura em que esse processo de anulação ocorre T_c é chamada de temperatura crítica e varia de material para material. Em amostras de Titânio, por exemplo, $T_c = 0.39K$, enquanto para o Mercúrio vale $T_c = 4.1K$. Nestas condições, a resistividade não é apenas pequena, em módulo, mas é, na medida em que pode ser mensurada, exatamente zero. Este fenômeno deu origem aos chamados supercondutores elétricos.

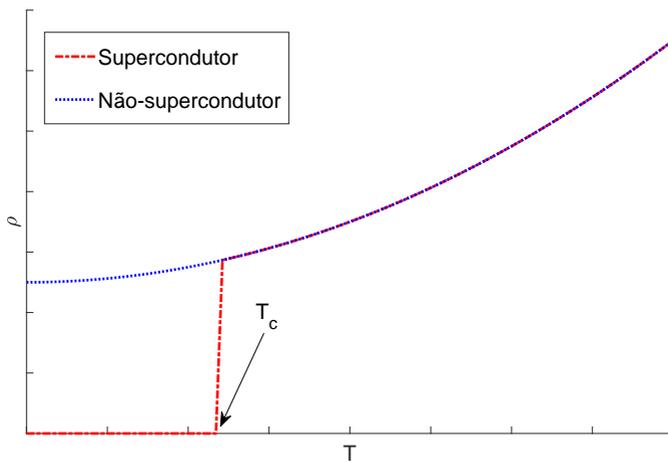


Figura 1: Comportamento da Resistividade ρ em função da temperatura T

A existência de uma resistividade nula no supercondutor é representada por uma transição de fase termodinâmica. As propriedades de cada fase são completamente diferentes. Aqui, denotam-se duas fases distintas: estado normal, quando o material apresenta temperaturas acima da temperatura crítica e estado supercondutor, quando o material apresenta temperaturas abaixo da temperatura crítica. No estado normal, a resistividade e outras propriedades físicas seguem o comportamento de um metal normal, enquanto no estado supercondutor, várias propriedades físicas são diferentes, incluindo a resistividade.

Um dos principais problemas a identificação de materiais na fase supercondutora é ter uma noção precisa para medir e distinguir uma resistividade muito pequena de uma resistividade efetivamente nula. Visto que, na prática, ao medir uma resistência de uma amostra supercondutora, o aparelho de medição (multímetro) também apresenta uma resistência em seus fios, o que resulta em uma medição pequena em módulo mas ainda assim diferente de zero.

2.2 Efeito Meissner-Ochsenfeld

Pela dificuldade de medir a resistividade, uma das formas mais eficientes de caracterizar uma amostra de material supercondutor é através do característico efeito Meissner-Ochsenfeld.

Tal efeito constitui o fato de uma amostra de material super-

condutor expelir campos magnéticos de fraca intensidade se uma temperatura abaixo de T_C é alcançada.

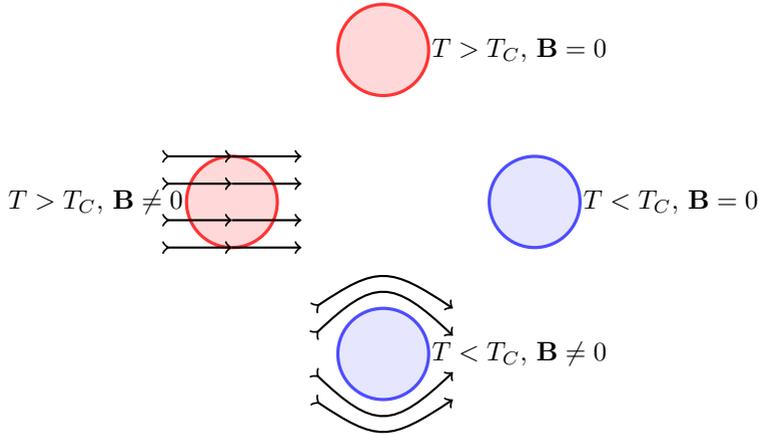


Figura 2: Ilustração do efeito Meissner-Ochsenfeld

Considere a situação ilustrada na figura 2, em que uma esfera de material que apresenta comportamento supercondutor, inicialmente, encontra-se em uma temperatura $T > T_C$, isto é encontra-se em fase normal e não apresenta campo magnético externo (ilustrado na figura de cima do diagrama). Pode-se resfriar a amostra até alcançar uma temperatura $T < T_C$ (lado direito do diagrama), enquanto o campo magnético permanece nulo. E então introduzir, gradualmente o campo externo \mathbf{B} enquanto, devido as características supercondutoras, o campo magnético no interior da amostra permanece nulo (canto inferior do diagrama).

Agora, considerando realizar o procedimento anterior em outra ordem: Suponha tomar uma amostra em estado normal e, primeiramente, aplicar um campo externo. Neste caso, o campo magnético penetra na amostra (como ilustrado na figura 2, à esquerda). Ao resfriar a amostra o efeito Meissner-Ochsenfeld é observado, quando o campo magnético é expelido (voltando ao estado ilustrado abaixo no diagrama).

Tal fenômeno não é explicado apenas pelo fato da resistividade ser nula, este é um fenômeno físico separado e associado aos supercondutores, caracterizando outra fase termodinâmica. Para efeitos experimentais é muito mais prático observar a expulsão do campo do que medir a resistividade nula.

2.3 Diamagnetismo

Outro fenômeno característico de materiais em fase supercondutora é o diamagnetismo perfeito. Ao expor uma amostra a um campo magnético externo, alguns tipos de materiais respondem criando um campo próprio no mesmo sentido do anterior, este comportamento é chamado de paramagnetismo. Em outros casos o campo produzido pela amostra tem sentido contrário ao campo aplicado. Este segundo comportamento é chamado de diamagnetismo.

A fim de produzir o efeito Meissner-Ochsenfeld, uma amostra em fase supercondutora deve induzir uma corrente elétrica nos bor-

dos da mesma, criando um campo magnético de mesmo módulo e sentido contrário ao campo aplicado, ou seja, deve apresentar diamagnetismo perfeito, anulando completamente o campo externo.

O campo magnético é composto pelas grandezas físicas M magnetização e H campo magnético auxiliar. Uma amostra supercondutora pode ser caracterizada pelo efeito Meissner-Ochsenfeld, o que nos garante que o campo magnético é nulo ou seja, $M = -H$.

Podemos assim, definir um parâmetro que meça o comportamento diamagnético. A chamada susceptibilidade magnética é definida por

$$\chi = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=0}.$$

Assim, uma outra caracterização para supercondutores é o parâmetro $\chi = -1$. Sólidos com $\chi < 0$ são chamados de diamagnéticos pois produzem um campo magnético que se opõe ao campo externo.

Para os supercondutores, o campo externo é completamente anulado. Consequentemente, são chamados de perfeitamente diamagnéticos.

Pode-se detectar supercondutividade em uma amostra desconhecida medindo a sua susceptibilidade magnética. O gráfico típico desta grandeza em uma amostra com comportamento supercondutor pode ser observado na figura a seguir.

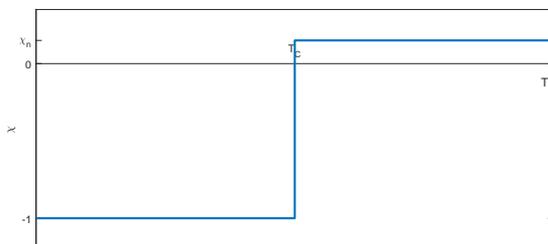


Figura 3: Susceptibilidade magnética para um supercondutor em função da temperatura

2.4 Supercondutividade do tipo I e do tipo II

O processo de transição de uma amostra em fase normal para fase supercondutora ocorre semelhante a uma mudança de fase termodinâmica.

Da mesma maneira que a temperatura crítica T_C marca a mudança de fase e, conseqüentemente, o efeito Meissner-Ochsenfeld, há o chamado campo crítico H_C que limita a capacidade de uma amostra de expelir um campo externo.

A susceptibilidade χ é definida no limite quando $H \rightarrow 0$, quando aumentamos o campo H dois possíveis comportamentos podem ocorrer.

O primeiro caso, é chamado de supercondutor do tipo I, em

que o campo B permanece nulo dentro da amostra até que a supercondutibilidade é destruída de maneira abrupta quando H atinge a intensidade H_C . Ou seja a magnetização obedece $M = -H$ para todos os campos com intensidade menor que H_C e então torna-se nula para campos mais intensos. Conforme ilustrado na figura 4.

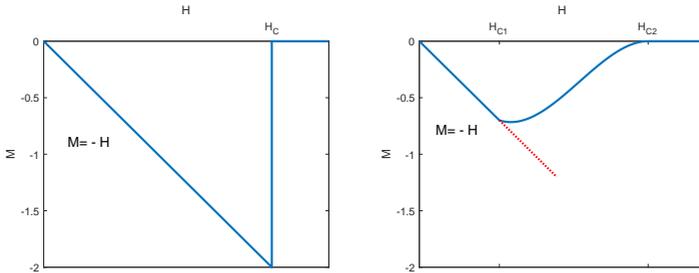


Figura 4: Gráfico $H \times M$ para supercondutores do tipo I (à esquerda) e tipo II (à direita)

Todavia, para alguns tipos de material o comportamento é diferente. Em supercondutores do tipo II existem dois campos críticos H_{C1} e H_{C2} . Ao aumentarmos a intensidade do campo H , inicialmente é respeitada a equação $M = -H$, ao atingir o valor crítico H_{C1} o diamagnetismo começa a ser destruído gradativamente, diminuindo a magnetização M e permitindo que um campo resultante não nulo penetre na amostra. Tal comportamento persiste até que o diamagnetismo é destruído completamente ao atingirmos H_{C2} , trazendo a amostra de volta ao seu estado normal.

Na figura 5 podemos ver os diagramas de fase de cada um dos

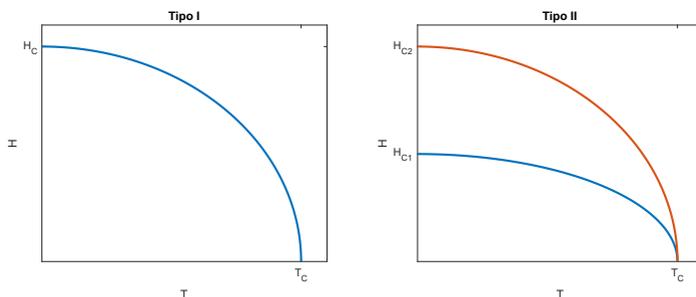


Figura 5: Temperatura crítica T_C em função de H_C ($T_C \times H_C$) para supercondutores do tipo I (a esquerda) e tipo II (a direita)

tipos de supercondutores. No caso dos supercondutores do tipo II a região intermediária corresponde a um estado em que o campo magnético externo é capaz de penetrar na amostra através de pequenos vórtices, em que o interior encontra-se no estado normal e o restante da amostra no estado superconductor.

2.5 Supercondutividade e mudança de fase

Os físicos Ginzburg e Landau (GL) contribuíram muito para o desenvolvimento do estudo acerca de supercondutores por volta de 1950 [2], [10]. A teoria de Ginzburg-Landau postula a existência de um parâmetro de ordem, denotado por Ψ que caracteriza o estado

supercondutor de uma amostra, ou seja

$$\Psi = \begin{cases} 0, & \text{se } T > T_C \\ \Psi(T) \neq 0, & \text{se } T < T_C \end{cases}.$$

Tal parâmetro seria complexo e sua interpretação física de $|\Psi|^2$ representaria a densidade de elétrons supercondutores. GL assumiram que a energia livre deveria depender de forma contínua do parâmetro Ψ .

Como Ψ é complexo e a energia livre é valor real não-negativo, a energia deve depender de $|\Psi|$. Além disso, $\Psi \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow T_C$, podemos aproximar a função energia via expansão de Taylor para valores próximos de T_C . A densidade de energia livre de Helmholtz $f = \frac{F}{V}$ pode ser dada por

$$f_s(T) = f_n(T) + \alpha(T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\Psi|^4$$

Da equação acima é possível assumir que $\beta(T)$ é positivo, caso contrário, a densidade de energia livre não teria minimizante, o que contraria o fenômeno físico modelado.

Plotando o gráfico da função $f_s - f_n$ como função de Ψ é fácil ver que há duas curvas possíveis, dependendo da escolha do sinal de $\alpha(T)$.

Se $\alpha(T) > 0$ a curva possui único minimizante em $\Psi = 0$. Se $\alpha(T) <$

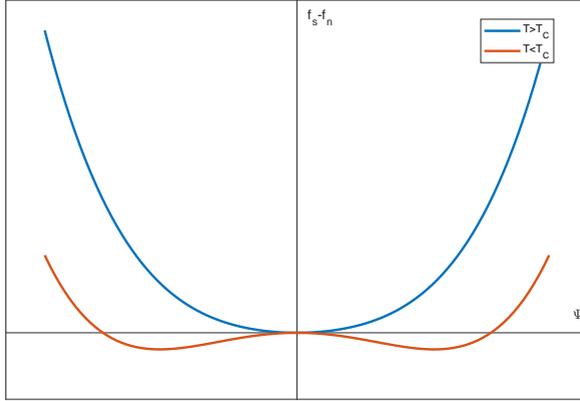


Figura 6: Função de distribuição de elétrons no estado supercondutor para uma amostra homogênea.

0 há mínimos sempre que $|\Psi|^2 = -\frac{\alpha(T)}{\beta(T)}$.

A interpretação física dessas hipóteses é que para $T > T_C$ temos que $\alpha(T) > 0$ e o mínimo ocorre em $\Psi = 0$, ou seja, estado normal.

Quando T diminui, $\alpha(T)$ também o faz até o estado mudar quando $\alpha(T) < 0$ e o mínimo da função energia muda para $\alpha \neq 0$, indicando que um estado mais estável é alcançado para uma fase supercondutora. Podemos identificar a temperatura onde $\alpha(T) = 0$ justamente, como T_C .

Como Ψ é um parâmetro complexo, existem infinitas soluções

que satisfazem $\Psi = |\Psi|e^{i\theta}$ e claramente minimizam a energia. O parâmetro θ encontrado em uma amostra real é de fato arbitrário, uma vez que todos os valores de θ levam ao mesmo total de energia livre. Neste caso, o próprio sistema adota espontaneamente um valor particular. Assim, uma amostra supercondutora aquecida a temperatura acima de T_C e, posteriormente, resfriada, podemos obter numericamente outro parâmetro de fase θ .

2.6 Teoria de Ginzburg-Landau em Sistemas não-homogêneos

A teoria de Ginzburg-Landau torna-se mais rica quando consideramos meios não-homogêneos, ou seja, sistemas em que o parâmetro de identificação de fase supercondutora varia com a posição na amostra, ou seja Ψ é uma função da posição \mathbf{r} . Neste caso, a expressão que nos dá informações acerca da energia livre incorpora um termo que depende de $\nabla\Psi$.

$$f_s(T) = f_n(T) + \frac{\hbar^2}{4m} \int_{\Omega} |\nabla\Psi(r)|^2 dx + \frac{\alpha(T)}{4} \int_{\Omega} |\Psi(r)|^4 dx - \frac{\beta(T)}{2} \int_{\Omega} |\Psi(r)|^2 dx,$$

onde \hbar é a constante de Planck e m é a massa de um elétron em repouso. Se buscamos encontrar a fase mais estável, devemos minimizar a função de energia, assim, aplicando as equações de Euler-

Lagrange para o problema, após alguns cálculos é possível obtermos

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi + \alpha|\Psi|^2\Psi - \beta\Psi = 0 & \text{no interior da amostra } \Omega \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{n}} = 0 & \text{no bordo da amostra } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Considerar meios não-homogêneos é particularmente interessante se introduzirmos um campo magnético externo \mathbf{B}_0 agindo no espaço. Tal campo dependendo, da intensidade, acaba destruindo o comportamento supercondutor de alguns elétrons, a medida que o mesmo torna-se mais forte no interior da amostra. Neste contexto, a teoria de Ginzburg-Landau surge em sua maior potencialidade. Neste, caso o funcional energia do sistema torna-se um pouco mais complicado, pois o mesmo dependerá da função Ψ , em sua forma complexa e também do campo externo \mathbf{B}_0 e do potencial magnético \mathbf{A} . A expressão é dada por

$$\begin{aligned} J_1(\Psi, \mathbf{A}) &= \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}^3} |\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_0|_2^2 dx + \frac{\hbar^2}{4m} \int_{\Omega} \left| \nabla\Psi - \frac{2ie}{\hbar c} \mathbf{A}\Psi \right|_2^2 dx + \\ &+ \frac{\alpha}{4} \int_{\Omega} |\Psi|^4 dx - \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} |\Psi|^2 dx, \end{aligned}$$

onde $\alpha > 0$, $\beta > 0$, i é a unidade imaginária, c é velocidade da luz no vácuo e e é a carga de um elétron. Se buscamos encontrar o estado mais estável, vamos abordar o problema de minimizar o funcional J no seguinte espaço apropriado

$$U = W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C}) \times W^{1,2}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange para o problema ficam

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha|\Psi|^2\Psi - \beta\Psi = 0 & \text{em } \Omega \\ \left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\Psi \right) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (\text{rot})^*(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{rot } \mathbf{B}_0 + \frac{4\pi}{c}\tilde{J}, & \text{em } \Omega \\ (\text{rot})^*(\text{rot } \mathbf{A}) = \text{rot } \mathbf{B}_0 & \text{em } \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega} \end{cases}$$

Em que,

$$\tilde{J} = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi|^2\mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{B}_0 \in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$$

é um campo magnético conhecido. Aqui, Ψ^* denota o complexo conjugado de Ψ .

3 Tópicos em Análise e Análise Funcional

Neste capítulo, temos como foco trazer um breve resumo dos principais conceitos e resultados em Análise e Análise Funcional. Tal conteúdo será essencial para o estudo teórico das equações de Gizburg-Landau e constitui uma base matemática para diversos problemas oriundos das ciências aplicadas.

O leitor não familiarizado com Análise Funcional poderá encontrar neste capítulo as definições e os teoremas necessários para o entendimento do restante do trabalho. As demonstrações e detalhes com maior rigor podem ser encontrados na vasta bibliografia existente sobre o assunto, como por exemplo, [4], [3], [7], [11], [14].

Noções sobre espaços normados, espaços métricos, operadores lineares, espaço dual, operador adjunto e convergência fraca estão explanadas ao longo deste capítulo.

Espaços Normados e espaços métricos

Definição 1. Um conjunto U é dito ser um **espaço topológico** se é possível definir uma coleção σ de subconjuntos de U chamada uma **topologia** de U , para a qual as seguintes propriedades são válidas:

- a) $U \in \sigma$
- b) $\emptyset \in \sigma$
- c) se $A \in \sigma$ e $B \in \sigma$, então $A \cap B \in \sigma$,
- d) uniões arbitrárias de elementos de σ também pertencem a σ .

Se $A \in \sigma$, dizemos que A é um **conjunto aberto**.

Definição 2. Seja U um espaço topológico. Um conjunto $A \subset U$ é dito ser **fechado** se $U \setminus A$ é aberto.

Os espaços topológicos constituem uma classe de objetos que busca estudar de maneira bastante generalizada conjuntos que possuam algumas propriedades importantes. Apenas com os conceitos de topologia, já é possível ter alguns resultados que poderiam ser empregados em espaços mais específicos, como \mathbb{R}^n ou espaços de funções, que aparecem amplamente na modelagem de problemas matemáticos.

Definição 3. Um espaço vetorial U sobre o corpo \mathbb{F} é dito ser um **espaço normado** se é possível definir uma função $\|\cdot\|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$, chamada **norma**, a qual satisfaz as seguintes propriedades:

- a) $\|u\|_U > 0$, se $u \neq 0$ e $\|u\|_U = 0 \iff u = 0$,
- b) $\|u + v\|_U \leq \|u\|_U + \|v\|_U, \forall u, v \in U$,
- c) $\|\alpha u\|_U = |\alpha| \|u\|_U, \forall u \in U, \alpha \in \mathbb{F}$.

Definição 4. Um conjunto U é dito ser um **espaço métrico** se é possível definir uma função $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ chamada uma **métrica** em U , tal que

- a) $0 \leq d(u, v), \forall u, v \in U$,
- b) $d(u, v) = 0 \iff u = v, \forall u, v \in U$,
- c) $d(u, v) = d(v, u), \forall u, v \in U$,
- d) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w), \forall u, v, w \in U$.

Uma métrica pode ser definida mediante de uma norma, da seguinte maneira

$$d(u, v) = \|u - v\|_U.$$

Neste caso, dizemos que a métrica é induzida pela norma.

O conjunto $B_r(u) = \{v \in U \text{ tal que } d(u, v) < r\}$ é chamado de **bola aberta** com centro em u e raio r .

Definição 5. Uma métrica $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dita ser **invariante** se

$$d(u + w, v + w) = d(u, v), \forall u, v, w \in U.$$

A partir das definições de norma e métrica, já é possível quantificar, avaliar e mensurar grandezas em espaços abstratos. Discernir quando dois elementos de um espaço vetorial estão "próximos" é o ponto inicial para trabalharmos com o conceito de aproximação. Sendo assim, o estudo dos espaços métricos é essencial para nos familiarizarmos com as primeiras noções e resultados básicos sobre o assunto.

As próximas definições versam sobre sequências e limite de seqüências. O resultado principal deste trabalho será mostrar que existe uma seqüência minimizante para um problema de controle em supercondutibilidade de Ginzburg-Landau. É recomendado que o leitor esteja bastante familiarizado com estes conceitos para um bom entendimento dos capítulos futuros.

Definição 6. *Dado um espaço métrico U , dizemos que $\{u_n\} \subset U$ **converge** para $u_0 \in U$, quando $n \rightarrow \infty$, se para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$, então $d(u_n, u_0) < \epsilon$. Neste caso, escrevemos $u_n \rightarrow u_0$, quando $n \rightarrow +\infty$.*

Definição 7. *$\{u_n\} \subset U$ é dito ser uma **seqüência de Cauchy** se para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(u_n, u_m) < \epsilon, \forall m, n \geq n_0$.*

Definição 8. *Um espaço métrico U é dito ser **completo** se cada seqüência de Cauchy com relação a métrica $d : U \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$ converge para um elemento de U .*

Definição 9. *Seja (U, d) um espaço métrico e seja $E \subset U$. Dizemos que $v \in U$ é um **ponto de acumulação** de E se para cada $r > 0$*

existe $w \in B_r(v) \cap E$ tal que $w \neq v$.

Definição 10. *Seja (U, d) espaço métrico e seja $E \subset U$. Dizemos que $u \in E$ é **ponto interior** de E se existe $r > 0$ tal que $B_r(u) \subset E$. É possível definir uma topologia para o espaço métrico (U, d) declarando como conjuntos abertos todos os conjuntos E tais que todos os seus pontos são interiores. Tal topologia é dita ser induzida pela métrica d .*

Definição 11. *Seja (U, d) um espaço métrico e seja $E \subset U$. Definimos E' como o conjunto de todos os pontos de acumulação de E .*

Teorema 1. *Seja (U, d) um espaço métrico e seja $E \subset U$. Então E é **fechado** se, e somente se, $E' \subset E$.*

Definição 12. *Um espaço normado é dito ser um **espaço de Banach** se cada sequência de Cauchy relacionada à métrica induzida pela norma converge para um elemento de U .*

Espaço Dual

Nesta seção revisaremos os conceitos de funcionais e espaço dual. O estudo dos espaços dos funcionais de um espaço vetorial constitui a base para ferramentas poderosas aplicadas em diversos teoremas, sustentando e embasando diversas abordagens práticas e computacionais para resolução de problemas oriundos das ciências aplicadas.

Através do estudo dos funcionais de determinado espaço é possível retirar um grande número de resultados e propriedades importantes sobre o próprio espaço.

Definição 13. *Seja V um espaço normado sobre um corpo \mathbb{F} , este corpo pode ser assumido como o conjunto dos números reais \mathbb{R} ou dos números complexos \mathbb{C} . Um **funcional linear** é uma função $F : V \rightarrow \mathbb{F}$ que é linear, ou seja, dados $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$, temos que*

$$F(u + \lambda v) = F(u) + \lambda F(v).$$

Se além disso, esta função for contínua, isto é,

Dado $u \in V, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

se $\|u - v\| < \delta$, então $|F(u) - F(v)| < \varepsilon$.

*Então, F é um **funcional linear contínuo**.*

Definição 14. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{F} , uma **forma bilinear** é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ que é linear em ambas as variáveis, isto é,*

a) $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle, \forall u, v, w \in V,$

b) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \forall u, v, w \in V,$

c) $\langle \lambda u, v \rangle = \langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{F}.$

Definição 15. *Para um espaço de Banach U , define-se o **espaço dual topológico** como o conjunto de todos os funcionais lineares*

contínuos definidos em U , identificado por U^* . Assumiremos em nosso trabalho em que tal espaço dual se possa identifica uma forma bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle_U : U \times U^* \rightarrow \mathbb{R}$. Ou seja, dado $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ funcional linear contínuo, existe um único $u^* \in U^*$ tal que

$$f(u) = \langle u, u^* \rangle_U, \forall u \in U.$$

Observação 1. *Aqui estamos nos referindo às representações padrões de espaços duais de espaços de Lebesgue e Sobolev a serem estudadas posteriormente.*

A norma de f é denotada por $\|f\|_{U^*}$ é definida como

$$\|f\|_{U^*} = \sup_{u \in U} \{ |\langle u, u^* \rangle_U|, \text{ tal que } \|u\|_U \leq 1 \}$$

Teorema 2. *Sejam U, V espaços de Banach. Um operador linear $A : U \rightarrow V$ é contínuo se e somente se existe $K \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\|A(u)\|_V < K\|u\|_U, \forall u \in U.$$

Ou seja, A é limitado.

Definição 16. *Seja H um espaço vetorial complexo. Dizemos que H é um **pré-espaço de Hilbert** se existe uma função $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$a) (u, v)_H = \overline{(v, u)_H}, \forall u, v \in H,$$

$$b) (u + v, w)_H = (u, w)_H + (v, w)_H, \forall u, v, w \in H,$$

$$c) (\alpha u, v)_H = \alpha(u, v)_H, \forall u, v \in H, \alpha \in \mathbb{C},$$

$$d) (u, u)_H \geq 0, \forall u \in H \text{ e } (u, u) = 0, \text{ se e somente se } u = 0.$$

Ou seja, $(\cdot, \cdot)_H$ é **sesquilinear** e induz uma norma $\|u\|_H^2 = (u, u)_H$, para $u \in H$.

Observação 2. Uma definição similar é válida para o caso de H ser um espaço vetorial real.

Teorema 3. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz.) Seja H um pré-espaço de Hilbert. Assim,

$$\|u\|_H = \sqrt{(u, u)_H}, \forall u \in H,$$

é uma norma em H e vale a desigualdade

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \forall u, v \in H.$$

Definição 17. Um pré-espaço de Hilbert é dito ser um **Espaço de Hilbert** se ele é completo, isto é, toda sequência de Cauchy em H converge para um elemento de H .

Definição 18. Seja H um espaço de Hilbert e $M \subset H$, definimos o **complemento ortogonal** de M , denotado por M^\perp , por

$$M^\perp = \{u \in H \text{ tal que } (u, m)_H = 0, \forall m \in M\}.$$

Teorema 4. Sejam H um espaço de Hilbert, M um subespaço fechado de H e $u \in H$. Sob tais hipóteses, existe um único $m_0 \in M$

tal que

$$\|u - m_0\|_H = \min_{m \in M} \{\|u - m\|_H\}.$$

Além disso, $n_0 := u - m_0 \in M^\perp$

A seguir, relembremos o Lema de Riesz, que nos fala sobre como ocorre a representação de um elemento do dual através do espaço primal. Tal lema possui grande relevância dentro da análise funcional e aparece em alguns momentos ao longo deste trabalho.

Teorema 5. (Lema de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert real e seja $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $u_0 \in H$ tal que*

$$f(u) = (u, u_0)_H, \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^*} = \|u_0\|_H.$$

Definição 19. *Para um espaço topológico U e $u_0 \in U$, nós definimos uma **vizinhança fraca** de u_0 denotada por \mathcal{V}_w como*

$$\mathcal{V}_w = \{u \in U \text{ tal que } |\langle u - u_0, u_i^* \rangle_U| < \varepsilon_i, \forall i \in \{1, \dots, m\}\},$$

para algum $m \in \mathbb{N}, \varepsilon_i > 0$ e $u_i^* \in U^*, \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Também definimos a **topologia fraca** para U : Dizemos que $E \in U$ é fracamente aberto, quando para cada $u \in E$ existe alguma vizinhança $\mathcal{V}_w(u) \subset E$. Assim, definimos a topologia fraca para U , denotada por $\sigma(U, U^*)$ como o conjunto de todos os conjuntos $E \in U$

fracamente abertos.

Notação: Se $\{u_n\} \in U$ é tal que u_n converge para u em $\sigma(U, U^*)$, então escrevemos $u_n \rightharpoonup u$.

Teorema 6. *Seja U um espaço de Banach. Considerando $\{u_n\} \subset U$, temos*

- a) $u_n \rightharpoonup u$, para $\sigma(U, U^*) \iff \langle u_n, u^* \rangle_U \rightarrow \langle u, u^* \rangle_U, \forall u^* \in U^*$,
- b) se $u_n \rightarrow u$ fortemente (em norma), então $u_n \rightharpoonup u$ fracamente,
- c) se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente, então $\{\|u_n\|_U\}$ é limitada e $\|u\|_U \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|_U$,
- d) se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente e $u_n^* \rightarrow u^*$ fortemente em U^* , então $\langle u_n, u_n^* \rangle_U \rightarrow \langle u, u^* \rangle_U$.

Operador Adjunto

Dado um operador em um espaço de Banach, o seu operador adjunto desempenha um papel muito importante na teoria de análise funcional. Trata-se de um outro operador, que funciona como ferramenta em questões envolvendo o produto de dualidade.

Definição 20. *Sejam U, Y espaços de Banach. Dado um operador linear limitado $A : U \rightarrow Y$ e $v^* \in Y^*$, temos que $T(u) = \langle Au, v^* \rangle_Y$ é tal que*

$$|T(u)| \leq \|Au\|_Y \cdot \|v^*\|_{Y^*} \leq \|A\| \|v^*\|_{Y^*} \|u\|_U.$$

Portanto, $T(u)$ é um funcional linear contínuo em U e da nossa hipótese de representação do espaço dual, existe $u^* \in U^*$ tal que

$$T(u) = \langle u, u^* \rangle_U, \forall u \in U.$$

Definimos A^* por $u^* = A^*v^*$, ou seja,

$$T(u) = \langle u, u^* \rangle_U = \langle u, A^*v^* \rangle_U,$$

isto é,

$$\langle u, A^*v^* \rangle_U = \langle Au, v^* \rangle_Y, \forall u \in U, v^* \in Y^*.$$

Nós chamamos $A^* : Y^* \rightarrow U^*$ o **operador adjunto** de $A : U \rightarrow Y$.

Teorema 7. *Sejam U, Y espaços de Banach e seja $A : U \rightarrow Y$ um operador linear limitado. Então*

$$\|A\| = \|A^*\|,$$

onde A^* é o adjunto Hilbertiano de A .

No caso particular em que $U = Y = H$, com H espaço de Hilbert, o seguinte teorema é válido:

Teorema 8. *Dados operadores lineares limitados $A, B : H \rightarrow H$, temos que*

$$a) (AB)^* = B^*A^*,$$

$$b) (A^*)^* = A,$$

c) se A possui inversa limitada A^{-1} , então A^* possui inversa limitada e

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

d)

$$\|AA^*\| = \|A\|^2.$$

Definição 21. *Seja H um espaço de Hilbert. Um operador $A : H \rightarrow H$ é dito **auto-adjunto** se*

$$A = A^*.$$

Conceitos básicos de Cálculo Variacional

O cálculo variacional estuda extremização de funcionais. Trata-se de uma área de grande interesse do ponto de vista científico e tecnológico, possuindo uma série de aplicações dentro dos mais diversos ramos das ciências aplicadas.

Minimizar um funcional é encontrar uma solução ótima para um dado problema. Na natureza, comumente, os fenômenos ocorrem de forma que a energia é minimizada. Por essa razão, o cálculo variacional aparece como ferramenta fundamental na abordagem de diversos problemas; entre eles o problema de controle e supercondutibilidade que será o foco central de seções futuras deste trabalho.

Nesta seção, denotaremos por $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional, onde U é um espaço de Banach. Alguns casos particulares serão de inte-

resse especial ao longo do trabalho, pois modelam grande parte das equações do tipo energia em problemas físicos, tais como:

a) $F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto limitado e conexo.

b) $F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u, D^2 u) dx$ em que

$$Du = \nabla u = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}$$

e

$$D^2 u = \{D^2 u_i\} = \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\},$$

para $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

Também, $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ é denotado por $f(x, s, \xi)$ e assumimos que

a)

$$\frac{\partial f(x, s, \xi)}{\partial s},$$

b)

$$\frac{\partial f(x, s, \xi)}{\partial \xi}$$

são contínuas $\forall (x, s, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N \times n}$.

Agora definimos nosso problema geral, denotado problema \mathcal{P}

Problema \mathcal{P} : minimizar $F(u)$ em U ,

isto é, encontrar $u_0 \in U$ tal que

$$F(u_0) = \min_{u \in U} \{F(u)\}.$$

Podemos interpretar o problema acima como a intenção de encontrar um estado u para o qual a energia associada $F(u)$ seja mínima.

Definição 22. Dado $F : D \subset U \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o **espaço das variações admissíveis** para F , denotado por \mathcal{V} como

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in U \text{ tal que } u + \varphi \in D, \forall u \in D\}.$$

Ou seja, φ é uma perturbação de u para a qual o estado perturbado $u + \varphi$ ainda está no conjunto D .

Definição 23. Dado $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que $u_0 \in U$ é um **mínimo local** para F se existe $\delta > 0$ tal que

$$F(u) \geq F(u_0), \forall u \in U, \text{ tal que } \|u - u_0\|_U < \delta,$$

ou equivalentemente,

$$F(u_0 + \varphi) \geq F(u_0), \forall \varphi \in \mathcal{V}, \text{ tal que } \|\varphi\|_U < \delta$$

Definição 24. Dado $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, nós definimos a **Variação de Gâteaux** de F em $u \in U$ na direção $\varphi \in \mathcal{V}$, denotada por $\delta F(u, \varphi)$ como

$$\delta F(u, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(u + \varepsilon\varphi) - F(u)}{\varepsilon},$$

se tal limite existe e é bem definido. Além disso, se existe $u^* \in U^*$

tal que

$$\delta F(u, \varphi) = \langle \varphi, u^* \rangle_U, \forall \varphi \in U,$$

dizemos que F é Gâteaux diferenciável em $u \in U$ e $u^* \in U^*$ é dito ser o **diferencial à Gâteaux** de F em u . Finalmente, denotamos,

$$u^* = \delta F(u) \text{ ou } u^* = \frac{\partial F(u)}{\partial u}.$$

Observação 3. Para o próximo teorema, o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ corresponde à definição 33 do próximo capítulo.

Teorema 9. Lema fundamental do cálculo das variações

Considere um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u \varphi dx = 0, \forall \varphi \in C^{\infty}_C(\Omega).$$

Então $u = 0$ em quase todo ponto de Ω .

Teorema 10. (Condições Necessárias para um mínimo local). Seja $u \in U$ um mínimo local de $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Então

$$\delta F(u, \varphi) = 0, \forall \varphi \in \mathcal{V}.$$

Teorema 11. Suponha que F alcança mínimo local em $u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e assumamos que $f \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N \times n})$. Então, as condições necessárias para um mínimo local para F são dadas pelas equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial f(x, u, \nabla u)}{\partial s} - \operatorname{div} \left(\frac{\partial f(x, u, \nabla u)}{\partial \xi} \right) = 0, \text{ em } \Omega.$$

Definição 25. (A segunda variação). *Seja U um espaço de Banach. Suponha $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional Gâteaux diferenciável. Dados $\varphi, \eta \in \mathcal{V}$, definimos a segunda variação de F em u , em relação às direções φ, η , denotada por*

$$\delta^2 F(u, \varphi, \eta),$$

por

$$\delta^2 F(u, \varphi, \eta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta F(u + \varepsilon\eta, \varphi) - \delta F(u, \varphi)}{\varepsilon},$$

Se tal limite existe $\forall \varphi, \eta \in \mathcal{V}$, dizemos que F é duas vezes Gâteaux diferenciável em u . Finalmente, se $\eta = \varphi$, denotamos $\delta^2 F(u, \varphi, \eta) = \delta^2 F(u, \varphi)$.

Teorema 12. *Seja U um espaço de Banach. Suponha que $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional duas vezes Gâteaux diferenciável e que*

$$\delta^2 F(u, \varphi) \geq 0, \forall u \in U, \varphi \in \mathcal{V}.$$

Então,

$$F(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda F(u) + (1 - \lambda)F(v), \forall u, v \in U, \lambda \in [0, 1].$$

Ou seja, F é convexo.

Teorema 13. (Condição Suficiente para um Mínimo Local): *Seja U um espaço de Banach. Suponha $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional duas vezes Gâteaux diferenciável em uma vizinhança de u_0 , tal que*

$$\delta F(u_0) = 0$$

e

$$\delta^2 F(u, \varphi) \geq 0, \forall u \in B_r(u_0), \varphi \in \mathcal{V},$$

para algum $r > 0$. Sob tais hipóteses, temos que

$$F(u_0) \leq F(u_0 + \varepsilon\varphi), \forall \varepsilon, \varphi$$

tal que $|\varepsilon| < \min\{r, 1\}$, $\|\varphi\|_U < 1$. Ou seja, u_0 é um mínimo local do funcional F .

4 *Espaços L^p e Espaços de Sobolev*

Neste capítulo estudaremos os espaços de funções L^p e Sobolev. Estes espaços são um campo de estudo fértil, uma vez que as propriedades intrínsecas a eles, garantem bons resultados e uma vasta gama de teoremas e ferramentas apropriadas podem ser empregadas em funções que pertençam aos mesmos.

A principal vantagem de trabalhar com os espaços L^p e de Sobolev é conseguir atribuir ao espaço de funções, normas adequadas que poderão ser utilizadas para garantir convergência de sequências de funções.

As demonstrações dos resultados expostos a seguir podem ser encontrados nas referências bibliográficas [1],[4],[8] com detalhes. Em especial a demonstração da desigualdade de Friedrichs é feita no artigo [12].

Definição 26. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto de elementos em*

Ω tais que f é não nula é chamado de **suporte** de f , denotado por $\text{supp}(f)$. Ou seja,

$$\text{supp}(f) = \{x \in \Omega, \text{ tal que } f(x) \neq 0\}.$$

Definição 27. (*Espaço das Funções Testes $\mathcal{D}(\Omega)$*). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Para cada $K \subset \Omega$ compacto, considere o espaço \mathcal{D}_K o conjunto de todas as funções de classe $C^\infty(\Omega)$ com suporte em K . Definimos o espaço das funções teste, denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$ como

$$\mathcal{D}(\Omega) = \cup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K(\Omega), \text{ com } K \text{ compacto.}$$

Em outras palavras, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ se, e somente se, $\phi \in C^\infty(\Omega)$ e o suporte de ϕ é um conjunto compacto.

Definição 28. (*Topologia para $\mathcal{D}(\Omega)$*). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto.

1. Para cada $K \subset \Omega$ compacto, σ_k denota a topologia gerada por uma base local $\{\mathcal{V}_{N,k}\}$, com $N, k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{V}_{N,k} = \left\{ \phi \in \mathcal{D}_K, \text{ tal que } \|\phi\|_N < \frac{1}{k} \right\}$$

e

$$\|\phi\|_N = \max\{|D^\alpha \phi(x)|, \text{ tal que } x \in \Omega, |\alpha| \leq N\}$$

2. Um conjunto U é dito ser balanceado se, para qualquer escalar t com $|t| \leq 1$, $tU \subset U$, em que $tU = \{tu, u \in U\}$.

3. $\hat{\sigma}$ denota a coleção de todos os conjuntos convexos e balanceados $\mathcal{W} \subset \mathcal{D}(\Omega)$, tal que $\mathcal{W} \cap \mathcal{D}_K \subset \sigma_k$ para cada compacto $K \subset \Omega$.
4. $\sigma \in \mathcal{D}(\Omega)$ é a coleção de todas as uniões de conjuntos da forma $\phi + \mathcal{W}$, para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\mathcal{W} \in \hat{\sigma}$

Pode-se verificar que σ da definição anterior é uma topologia em $\mathcal{D}(\Omega)$

Definição 29. (Distribuição). Um funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínuo com respeito a σ é dito ser uma distribuição.

Observação 4. Para a próxima definição, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é um n -upla de inteiros não negativos α_j , dizemos que α é um multi-índice, onde denotamos $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$$

denota o operador diferencial de ordem $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$.

Além disso, denotamos $D^{(0, \dots, 0)}u = u$ e $\beta \leq \alpha$ quando $\beta_j \leq \alpha_j$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

Definição 30. (Derivadas para Distribuições). Dado $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e um multi-índice α , definimos a derivada D^α de T como

$$D^\alpha T(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi), \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Podemos concluir que derivadas de distribuições também são distribuições, pois se T é uma distribuição, então $|T(\phi)| \leq c \|\phi\|_N, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$\mathcal{D}(\Omega)$ para algum $c \in \mathbb{R}^+$, logo

$$|D^\alpha T(\phi)| \leq c \|D^\alpha \phi\|_N \leq c \|\phi\|_{N+|\alpha|}, \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ou seja, $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Definição 31. (Espaços L^p) Para $1 \leq p < \infty$, dizemos que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \in L^p(\Omega)$ se tal função é mensurável e

$$\int_{\Omega} |u|^p dx < \infty.$$

Também denota-se $\|u\|_p = [\int_{\Omega} |u|^p dx]^{\frac{1}{p}}$. Que, de fato, é uma norma.

Definição 32. (Espaço L^∞) Dizemos que $u \in L^\infty(\Omega)$ se u é mensurável e existe $M \in \mathbb{R}^+$, tal que $|u(x)| < M$, em quase todo ponto de Ω . Definimos

$$\|u\|_\infty = \inf\{M > 0 \text{ tal que } |u(x)| < M \text{ em quase todo ponto de } \Omega\}.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$, definimos q que satisfaça as relações seguintes

$$q = \begin{cases} +\infty & \text{se } p = 1, \\ \frac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < +\infty \\ 1 & \text{se } p = +\infty. \end{cases}$$

De forma que, simbolicamente, temos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Teorema 14. (Desigualdade de Hölder) Considere $u \in L^p(\Omega)$ e

$v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $uv \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

A desigualdade de Hölder é um dos principais resultados em espaços L^p e busca reproduzir o papel da célebre desigualdade de Cauchy-Schwarz no contexto deste espaço de funções.

Teorema 15. $L^p(\Omega)$ é um espaço vetorial e $\|\cdot\|_p$ é uma norma para todo p tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 16. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo p tal que $1 \leq p \leq \infty$.

Observação 5. Se $p = 2$; $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno $(u, v) = \int_{\Omega} u \cdot v dx$.

Teorema 17. Seja $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ e $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que

- a) $u_{n_k}(x) \rightarrow u(x)$, em quase todo ponto de Ω .
- b) $|u_{n_k}| \leq h(x)$, em quase todo ponto de Ω , $\forall k \in \mathbb{N}$, para algum $h \in L^p(\Omega)$.

Teorema 18. $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo p tal que $1 < p < \infty$

Agora relembremos o teorema de representação no contexto dos espaços L^p .

Teorema 19. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe \hat{C}^1 e $1 < p < \infty$. Seja f um funcional linear contínuo em $L^p(\Omega)$. Então existe um único $u_0 \in L^q$ tal que*

$$f(v) = \int_{\Omega} v u_0 dx, \forall v \in L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))^*} = \|u_0\|_q.$$

Definição 33. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $u|_K \in L^p(\Omega)$ para todo compacto $K \subset \Omega$.*

Este é o conceito de um espaço localmente L^p .

A partir de agora, definiremos o conceito de Espaço de Sobolev, classe de espaços de funções de extrema relevância dentro do campo das equações diferenciais devido às suas boas propriedades, vasta teoria desenvolvida e aplicabilidade a modelos práticos.

Definição 34. (Espaços de Sobolev) *Dizemos que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo α tal que $0 \leq |\alpha| \leq m$, onde as derivadas são entendidas no sentido das distribuições.*

Definição 35. *Definimos a norma $\|\cdot\|_{m,p}$ para $W^{m,p}(\Omega)$ onde $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, como*

$$\|u\|_{m,p} = \left\{ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sup_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

Teorema 20. $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Definição 36. Definimos $S \subset W^{m,p}(\Omega)$ como

$$S = \{\varphi \in C^m(\Omega) \text{ tal que } \|\varphi\|_{m,p} < \infty\}.$$

Além disso, o completamento de S na norma $\|\cdot\|_{m,p}$ é denotado por $H^{m,p}(\Omega)$. Aqui, do fato de $W^{m,p}(\Omega)$ ser completo, pode-se provar que $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 21. $W^{m,p}(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$. Particularmente, $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$(u, v) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Tendo em mente as definições e resultados mais básicos acerca dos espaços de Sobolev, agora definiremos as chamadas imersões. Trata-se de um conceito bastante importante e que compõe parte fundamental do resultado principal deste trabalho.

Definição 37. Sejam X e Y espaços normados. Dizemos que existe uma **imersão** de X em Y , denotada por $X \hookrightarrow Y$ se $X \subset Y$ e existe uma constante $K > 0$ tal que

$$\|u\|_Y \leq K \|u\|_X, \forall u \in X.$$

Além disso, chama-se **imersão compacta**, uma imersão que dada

uma seqüência limitada $\{u_n\} \subset X$ existe uma subseqüência convergente $\{u_{n_k}\}$, que converge para algum u na norma $\|\cdot\|_Y$

Definição 38. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Dize-mos que $\partial\Omega$ é \hat{C}^1 se para cada $x_0 \in \partial\Omega$, denotando $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ para um sistema de coordenadas local, existe $r > 0$ e uma função $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(\hat{x})$ tal que*

$$W = \bar{\Omega} \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \text{ tal que } x_n \leq f(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Além disso, $f(\hat{x})$ é uma função Lipschitz contínua tal que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \leq C_1 |\hat{x} - \hat{y}|_2,$$

em seu domínio para algum $C_1 > 0$. Finalmente, assumimos que

$$\left\{ \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_k} \right\}_{k=1}^{n-1}$$

é definida da forma usual em quase todo o ponto do seu domínio, de forma que $f \in W^{1,2}$.

Teorema 22. *(Teorema das Imersões de Sobolev) Seja Ω um conjunto aberto e limitado em \mathbb{R}^n tal que $\partial\Omega$ é \hat{C}^1 . Seja $j \geq 0$ e $m \geq 1$ inteiros não-negativos e seja $1 \leq p < \infty$.*

1. Parte I

a) **Caso A** *Se $mp > n$ ou então $m = n$ e $p = 1$, então*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Além disso,

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ para } p \leq q \leq \infty,$$

e, em particular

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } p \leq q \leq \infty.$$

b) **Caso B** Se $mp = n$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ para } p \leq q < \infty,$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } p \leq q < \infty.$$

c) **Caso C** Se $mp < n$ ou $p = 1$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ para } p \leq q \leq p^* = \frac{np}{n - mp},$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } p \leq q \leq p^* = \frac{np}{n - mp}.$$

2. **Parte II** Se $mp > n > (m - 1)p$, então

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \text{ para } 0 < \lambda \leq m - (n/p),$$

e se $n = (m - 1)p$, então

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\overline{\Omega}), \text{ para } 0 < \lambda < 1.$$

Além disso, se $n = m - 1$ e $p = 1$, então a equação acima é válida para $\lambda = 1$ também.

3. **Parte III** Todas as imersões das Partes A e B são válidas para domínios arbitrários Ω se o W -espaço envolvido na imersão é substituído pelo W_0 -espaço correspondente.

Teorema 23. (Teorema de Rellich-Kondrachov) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado tal que $\partial\Omega$ é \hat{C}^1 . Sejam j, m inteiros e seja $1 \leq p < \infty$.

1. **(Parte I)** Se $mp \leq n$, então as seguintes imersões são compactas:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ se } 0 < n-mp \text{ e } 1 \leq q < np/(n-mp),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ se } n = mp, 1 \leq p < \infty.$$

2. **(Parte II)** Se $mp > n$, então as seguintes imersões são compactas:

$$W^{j+m,p} \hookrightarrow C_B^j(\Omega),$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \text{ se } 1 \leq q \leq \infty.$$

3. **(Parte III)** As seguintes imersões são compactas:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\bar{\Omega}), \text{ se } mp > n.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), \text{ se } mp > n \geq (m-1)p \text{ e } 0 < \lambda < m-n/p.$$

4. Todas as imersões acima são compactas se substituirmos $W^{j+m,p}(\Omega)$

por $W_0^{j+m,p}(\Omega)$, onde $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$

Teorema 24. (Teorema do Traço). *Seja $1 < p < \infty$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado aberto tal que $\partial\Omega$ é \hat{C}^1 . Então, existe um operador linear limitado*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega),$$

tal que

$$a) Tu = u \Big|_{\partial\Omega} \text{ se } u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),$$

$$b) \|Tu\|_{p,\partial\Omega} \leq K\|u\|_{1,p,\Omega}, \forall u \in W^{1,p}(\Omega), \text{ em que a constante } K \text{ depende apenas de } p \text{ e } \Omega.$$

Teorema 25. (Segunda desigualdade de Friedrichs). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio convexo de classe \hat{C}^1 , $u \in H_0(\text{div}, \Omega) \cap H(\text{rot}, \Omega)$ ou $u \in H(\text{div}, \Omega) \cap H_0(\text{rot}, \Omega)$. Então, a seguinte desigualdade é válida*

$$\|u\|_{1,2,\Omega} \leq C(\|\text{div}u\|_{0,2,\Omega} + \|\text{rot}u\|_{0,2,\Omega}).$$

Em que,

$$H(\text{div}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \text{div} u \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_0(\text{div}, \Omega) = \{u \in H(\text{div}, \Omega), \text{ tal que } \vec{n} \cdot u = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \text{rot} u \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_0(\text{rot}, \Omega) = \{u \in H(\text{rot}, \Omega), \text{ tal que } \vec{n} \times u = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

onde C independe de u .

A prova deste resultado pode ser encontrada em [12].

5 *Existência de Solução para um problema de Controle Associado ao Sistema de Ginzburg-Landau*

A presente seção exibe uma demonstração para a existência de solução de um problema de controle ótimo associado às equações de Ginzburg-Landau na presença de um campo magnético externo. A existência de solução decorre da hipótese extra de assumir o chamado *Gauge de London*.

Alguns autores possuem resultados para problemas semelhantes, como a prova da existência de solução para o problema sem a presença do potencial magnético. Algumas referências onde podem ser encontrados estes resultados são [4] e [9].

Enfatizamos que a novidade aqui é a inclusão de um campo

magnético externo e o potencial magnético \mathbf{A} , os quais tornam o problema bem mais complexo do ponto de vista formal.

A ideia principal da demonstração é tomar uma sequência minimizante e utilizar o teorema de Rellich-Kondrachov em conjunto com a desigualdade de Friedrichs para garantir a convergência no espaço apropriado.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3$ conjuntos abertos, limitados e de classe \hat{C}^1 , tais que $\bar{\Omega} \subset \Omega_1$ e Ω_1 é convexo.

Seja $\Psi_d \in L^4(\Omega, \mathbb{C})$ uma função conhecida. Consideremos o problema de controle de minimizar $\| |\Psi|^2 - |\Psi_d|^2 \|_{0,2,\Omega}$ com a trinca (Ψ, \mathbf{A}, u) sujeita à satisfação das equações de Ginzburg-Landau conforme indicado a seguir em (5.1) e (5.2).

Para tal problema, a variável de controle é $u \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})$ e as variáveis de estado são o parâmetro de Ginzburg-Landau $\Psi \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$ e o potencial magnético $\mathbf{A} \in W^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$.

Nosso principal resultado sobre a existência de solução para tal problema é resumido pelo seguinte teorema:

Teorema 26. *Considere o seguinte funcional*

$$J(\Psi, \mathbf{A}, u) = \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \Psi\|_{0,2,\Omega}^2 + K_1 \| |\Psi|^2 - |\Psi_d|^2 \|_{0,2,\Omega}^2 + K_2 \|u\|_{0,2,\partial\Omega}^2,$$

sujeito a $(\Psi, \mathbf{A}, u) \in \mathcal{C}$, em que $\mathcal{C} = \{(\Psi, \mathbf{A}, u) \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C}) \times W^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^3) \times L^2(\partial\Omega, \mathbb{C}) \text{ tal que (5.1) e (5.2) são satisfeitas}\}$, em

que

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \alpha |\Psi|^2 \Psi - \beta \Psi = 0, & \text{em } \Omega \\ \left(i\hbar\nabla \Psi + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \Psi \right) \cdot \vec{n} = u, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \text{rot}^*(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{rot} \mathbf{B}_0 + \frac{4\pi}{c} \tilde{J}, & \text{em } \Omega, \\ \text{rot}^*(\text{rot} \mathbf{A}) = \text{rot} \mathbf{B}_0, & \text{em } \Omega_1 \setminus \Omega, \\ \text{div} \mathbf{A} = 0, & \text{em } \Omega_1, \\ \mathbf{A} \cdot \vec{n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_1. \end{cases} \quad (5.2)$$

Em que,

$$\tilde{J} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A},$$

e onde $\varepsilon > 0$, $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ e $\text{rot} \mathbf{B}_0 \in L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$. Sob estas condições, o funcional $J(\Psi, A, u)$ admite minimizante em \mathcal{C} .

Demonstração. Inicialmente, tomamos $\{(\Psi_n, \mathbf{A}_n, u_n) \subseteq \mathcal{C}\}$ uma sequência minimizante de J , isto é, $\{(\Psi_n, \mathbf{A}_n, u_n)\}$ é tal que $J(\Psi_n, \mathbf{A}_n, u_n) \rightarrow \eta$ quando $n \rightarrow +\infty$, onde $\eta = \inf_{(\Psi, \mathbf{A}, u) \in \mathcal{C}} J(\Psi, \mathbf{A}, u)$. Tal sequência existe do resultado de existência para $u = 0$ em [5] e do fato que o funcional é limitado inferiormente por zero.

Notemos agora que, da expressão de J , existe $K > 0$ tal que

$$\|\nabla \Psi_n\|_{0,2,\Omega} \leq K$$

$$\|\Psi_n\|_{0,2,\Omega} \leq K$$

$$\|u_n\|_{0,2,\partial\Omega} \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\|\Psi_n\|_{0,4,\Omega} \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$$

e de modo que, pelo Teorema de imersão de Sobolev, para uma subsequência não re-rotulada $\{\Psi_n\}$, K pode ser tal que

$$\|\Psi_n\|_{1,2,\Omega} \leq K.$$

Assim, pelo teorema de Rellich-Kondrachov existem $\Psi_0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$ e $u_0 \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})$ e uma subsequência não-re-rotulada, tais que

$$\Psi_n \rightharpoonup \Psi_0, \text{ fracamente em } W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C}),$$

$$\Psi_n \rightarrow \Psi_0, \text{ em norma em } L^2(\Omega, \mathbb{C}) \cap L^4(\Omega, \mathbb{C}),$$

$$u_n \rightarrow u_0, \text{ fracamente em } L^2(\partial\Omega, \mathbb{C}), \text{ quando } n \rightarrow +\infty.$$

Por outro lado de (5.2) temos que

$$\begin{aligned} \rho_{1,n} &:= \langle \text{rot} \mathbf{A}_n, \text{rot} \mathbf{A}_n \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)} - \langle \text{rot} \mathbf{A}_n, \mathbf{B}_0 \rangle_{L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)} + \\ &+ \frac{4\pi}{c} \left\langle -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi_n^* \nabla \Psi_n - \Psi_n \nabla \Psi_n^*), \mathbf{A}_n \right\rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} + \\ &+ \frac{4\pi}{c} \left\langle \frac{2e^2}{mc} |\Psi_n|^2 \mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n \right\rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)} = 0 \end{aligned}$$

Da desigualdade de Friedrichs (Teorema 25), temos que

$$\|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1}^2 \leq \hat{K} \|\mathbf{A}_n\|_{1,2,\Omega_1}^2 \leq \tilde{K} (\|\text{div} \mathbf{A}_n\|_{0,\Omega_1} + \|\text{rot} \mathbf{A}_n\|_{0,\Omega_1})^2.$$

Mas pelo *Gauge de London* assumimos que $\text{div} \mathbf{A}_n = 0$ em Ω_1 , assim,

temos que

$$\|rot\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1}^2 \geq K_3\|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1}^2$$

Disto e da desigualdade de Hölder generalizada, segue-se que

$$\begin{aligned} 0 = \rho_{1,n} &\geq K_3\|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1}^2 - K_4\|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1}\|\Psi_n\|_{0,4,\Omega}\|\nabla\Psi_n\|_{0,2,\Omega} + \\ &\quad - \|rot\mathbf{B}_0\|_{0,2,\Omega_1}\|\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1} + K_5\langle|\Psi_n|^2\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} \\ &\geq K_3\|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1}^2 - \|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1}K^2 - \hat{K}\|\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1} + \\ &\quad + \langle|\Psi_n|^2\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^3)} =: \rho_{2,n}, \end{aligned}$$

para constantes, K_4 e K_5 apropriadas.

Suponha, para obter contradição, que existe uma subsequência $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\|\mathbf{A}_{n_k}\|_4 \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. Logo, $\rho_{2,n_k} \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. Mas $\rho_{2,n_k} \leq 0$. Logo, obtemos uma contradição. Assim, existe $K_3 > 0$ tal que $\|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega_1} < K_3$ e $\|\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1} \leq K_3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \langle rot\mathbf{A}_n, rot\mathbf{A}_n \rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^3)} - K_3K^2 - \hat{K}K_3 + \\ &\quad + K_5\langle|\Psi|^2\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_n\rangle_{L^2(\Omega_1,\mathbb{R}^3)} := \rho_{3,n} \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Agora, suponha para obter contradição, que existe uma subsequência $\{n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\langle rot\mathbf{A}_{n_k}, rot\mathbf{A}_{n_k} \rangle_{L^2(\Omega_1)} \rightarrow +\infty$, quando $k \rightarrow +\infty$, então $\rho_{3,n} \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$, o que contradiz que $0 \geq \rho_{3,n}$.

Disto e também da desigualdade de Friedrichs, obtemos:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}_n\|_{1,2,\Omega_1}^2 &\leq K_6 (\|rot\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1}^2 + \|div\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1}^2) \\ &= K_6 \|rot\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega_1}^2 \\ &\leq K_8, \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

onde assumimos o gauge de London, isto é, $div\mathbf{A}_n = 0$ em Ω_1 e $\mathbf{A}_n \cdot \vec{n} = 0$ em $\partial\Omega_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, do teorema de Rellich Kondrashov para uma subsequência não-re-rotulada, existe $\mathbf{A}_0 \in W^{1,2}(\Omega_1)$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n &\rightharpoonup \mathbf{A}_0, \text{ fracamente em } W^{1,2}(\Omega_1, \mathbb{R}^3). \\ \text{e } \mathbf{A}_n &\rightarrow \mathbf{A}_0 \text{ em norma em } L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3).\end{aligned}$$

Além disso, também do teorema das imersões de Sobolev, existem constantes reais $\bar{K} > 0$ e $\bar{K}_1 > 0$ tais que

$$\|\Psi_n\|_{0,6,\Omega} \leq \bar{K} \|\Psi_n\|_{1,2,\Omega} < \bar{K}_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disto e da primeira equação em (5.1), existem constantes reais $\bar{K}_2 > 0, \dots, \bar{K}_6 > 0$, tais que

$$\begin{aligned}\|\Delta\Psi_n\|_{0,2,\Omega} &< \bar{K}_2 \|\mathbf{A}_n\|_{0,2,\Omega} \|\nabla\Psi_n\|_{0,2,\Omega} \\ &< \bar{K}_3 \|\mathbf{A}_n\|_{0,4,\Omega} \|\Psi_n\|_{0,2,\Omega} + \bar{K}_4 \|\Psi_n\|_{0,6,\Omega}^3 + \bar{K}_5 \|\Psi_n\|_{0,2,\Omega} \\ &\leq \bar{K}_6, \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Disto, a menos de subsequência, temos

$$\Delta\Psi_n \rightharpoonup \Delta\Psi_0 \text{ fracamente em } L^2(\Omega, \mathbb{C}).$$

Tomamos

$$\begin{cases} \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{C}) \\ \varphi_1 \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3) \\ \varphi_2 \in C_c^\infty(\Omega_1 \setminus \Omega, \mathbb{R}^3) \end{cases}$$

A seguir, provaremos que os seguintes limites são válidos

- a) $\langle \Delta\Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle \Delta\Psi_0, \varphi \rangle_{L^2};$
- b) $\langle i\mathbf{A}_n \nabla\Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle i\mathbf{A}_0 \nabla\Psi_0, \varphi \rangle_{L^2};$
- c) $\langle |\mathbf{A}_n|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle |\mathbf{A}_0|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2};$
- d) $\langle |\Psi_n|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle |\Psi_0|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2};$
- e) $\langle \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} \rightarrow \langle \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2};$
- f) $\langle \text{rot}^*(\text{rot}\mathbf{A}_n), \varphi_1 \rangle_{L^2} \rightarrow \langle \text{rot}^*(\text{rot}\mathbf{A}_0), \varphi_1 \rangle_{L^2};$
- g) $\langle \Psi_n^* \nabla\Psi_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} \rightarrow \langle \Psi_0^* \nabla\Psi_0, \varphi_1 \rangle_{L^2};$
- h) $\langle \Psi_n \nabla\Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} \rightarrow \langle \Psi_0 \nabla\Psi_0^*, \varphi_1 \rangle_{L^2};$
- i) $\langle |\Psi_n|^2 \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} \rightarrow \langle |\Psi_0|^2 \mathbf{A}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2}, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$

Realizando os cálculos necessários:

a)

$$|\langle \Delta\Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \langle \Delta\Psi_0, \varphi \rangle_{L^2}| \rightarrow 0,$$

pois, $\Delta\Psi_n \rightharpoonup \Delta\Psi_0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

b)

$$\begin{aligned}
& |\langle i\mathbf{A}_n \nabla \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \langle i\mathbf{A}_0 \nabla \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} | \\
&= |\langle i\mathbf{A}_n \nabla \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \langle i\mathbf{A}_0 \nabla \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} + \langle i\mathbf{A}_0 \nabla \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} + \\
&\quad - \langle i\mathbf{A}_0 \nabla \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} | \\
&\leq |\langle i(\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0) \nabla \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2}| + |\langle i\mathbf{A}_0 (\nabla \Psi_n - \nabla \Psi_0), \varphi \rangle_{L^2}| \\
&\leq \|\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0\|_2 \|\nabla \Psi_n\|_2 \|\varphi\|_\infty + |\langle i\mathbf{A}_0 (\nabla \Psi_n - \nabla \Psi_0), \varphi \rangle_{L^2}| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_0$ em $L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ e $\Psi_n \rightharpoonup \Psi_0$ em $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$.

c)

$$\begin{aligned}
& |\langle |\mathbf{A}_n|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \langle |\mathbf{A}_0|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} | = \\
&= |\langle |\mathbf{A}_n|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \langle |\mathbf{A}_0|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} + \langle |\mathbf{A}_0|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \\
&\quad - \langle |\mathbf{A}_0|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} | \\
&\leq |\langle (|\mathbf{A}_n|^2 - |\mathbf{A}_0|^2) \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2}| + |\langle |\mathbf{A}_0|^2 (\Psi_n - \Psi_0), \varphi \rangle_{L^2}| \\
&\leq |\langle (|\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_0|)(|\mathbf{A}_n| - |\mathbf{A}_0|) \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2}| \\
&\quad + \|\mathbf{A}_0^2\|_{0,2,\Omega_1} \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} \|\varphi\|_\infty \\
&\leq \|(|\mathbf{A}_n| + |\mathbf{A}_0|)\|_{0,4,\Omega_1} \|\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0\|_{0,2,\Omega_1} \|\Psi_n\|_{0,4,\Omega} \|\varphi\|_\infty \\
&\quad + \|\mathbf{A}_0^2\|_{0,2,\Omega_1} \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} \|\varphi\|_\infty \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_0$ em $L^2(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ e $L^4(\Omega_1, \mathbb{R}^3)$ e $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

d)

$$\begin{aligned}
& \left| \langle |\Psi|^2 \Psi, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle |\Psi_0|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \right| \\
&= \left| \langle |\Psi_n|^2 \Psi_n, \varphi \rangle_{L^2} - \langle |\Psi_n|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} + \langle |\Psi_n|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} \right. \\
&\quad \left. - \langle |\Psi_0|^2 \Psi_0, \varphi \rangle_{L^2} \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} |\Psi_n|^2 (\Psi_n - \Psi_0) \varphi dx + \int_{\Omega} (|\Psi_n|^2 - |\Psi_0|^2) \Psi_0 \varphi dx \right| \\
&\leq \|\Psi_n^2\|_{0,2,\Omega} \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} \|\varphi\|_{\infty} \\
&\quad + \left| \int_{\Omega} (|\Psi_n| + |\Psi_0|) (|\Psi_n| - |\Psi_0|) dx \right| \|\varphi\|_{\infty} \\
&\leq \|\Psi_n^2\|_{0,2,\Omega} \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} \|\varphi\|_{\infty} \\
&\quad + \int_{\Omega} (|\Psi_n| + |\Psi_0|) (|\Psi_n| - |\Psi_0|) dx \|\varphi\|_{\infty} \\
&\leq \|\Psi_n^2\|_{0,2,\Omega} \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} \|\varphi\|_{\infty} \\
&\quad + \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} (\|\Psi_n\| + \|\Psi_0\|)_{0,2,\Omega} \|\varphi\|_{\infty} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$ em $L^2(\Omega)$.

e) Segue imediatamente do fato de $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$, então $\Psi_n \rightharpoonup \Psi_0$ fracamente em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

f)

$$\begin{aligned}
& \left| \langle \text{rot} \mathbf{A}_n, \text{rot} \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \text{rot} \mathbf{A}_0, \text{rot} \varphi_1 \rangle_{L^2} \right| \\
&= \left| \langle \mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0, \text{rot}^*(\text{rot} \varphi_1) \rangle_{L^2} \right| \\
&\leq \|\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0\|_{0,2,\Omega_1} \|\text{rot}^*(\text{rot} \varphi)\|_{0,2,\Omega_1} \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

g)

$$\begin{aligned}
& |\langle \Psi_n^* \nabla \Psi_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \Psi_0^* \nabla \Psi_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&= |\langle \Psi_n^* \nabla \Psi_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \Psi_0^* \nabla \Psi_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \Psi_0^* \nabla \Psi_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} \\
&\quad - \langle \Psi_0^* \nabla \Psi_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&= |\langle \Psi_0^* (\nabla \Psi_n - \nabla \Psi_0), \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle (\Psi_n^* - \Psi_0^*) \nabla \Psi_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&\leq |\langle \Psi_0^* (\nabla \Psi_n - \nabla \Psi_0), \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&\quad + \|\Psi_n^* - \Psi_0^*\|_{0,2,\Omega} \|\nabla \Psi_n\|_{0,2,\Omega} \|\varphi_1\|_\infty \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\Psi_n \rightharpoonup \Psi_0$ em $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$ e $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$.

h)

$$\begin{aligned}
& |\langle \Psi_n \nabla \Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \Psi_0 \nabla \Psi_0^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&= |\langle \Psi_n \nabla \Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \Psi_0 \nabla \Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \Psi_0 \nabla \Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} + \\
&\quad + \langle \Psi_0 \nabla \Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle \Psi_0 \nabla \Psi_0^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&= |\langle (\Psi_n - \Psi_0) \nabla \Psi_n^*, \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \Psi_0 (\nabla \Psi_n^* - \nabla \Psi_0^*), \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&\leq \|\Psi_n - \Psi_0\|_{0,2,\Omega} \|\nabla \Psi_n^*\|_{0,2,\Omega} \|\varphi_1\|_\infty + |\langle \Psi_0 (\nabla \Psi_n^* - \nabla \Psi_0^*), \varphi_1 \rangle_{L^2}| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ e $\Psi_n \rightharpoonup \Psi_0$ em $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{C})$.

i)

$$\begin{aligned}
& |\langle |\Psi_n|^2 \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle |\Psi_0|^2 \mathbf{A}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
&= |\langle |\Psi_n|^2 \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle |\Psi_0|^2 \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle |\Psi_0|^2 \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \langle |\Psi_0|^2 \mathbf{A}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
& \leq | \langle (|\Psi_n|^2 - |\Psi_0|^2) \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} | + | \langle |\Psi_0|^2 (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0), \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
& = | \langle (|\Psi_n| - |\Psi_0|)(|\Psi_n| + |\Psi_0|) \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} | + \\
& + | \langle |\Psi_0|^2 (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0), \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
& \leq | \langle (|\Psi_n - \Psi_0|)(|\Psi_n| + |\Psi_0|) \mathbf{A}_n, \varphi_1 \rangle_{L^2} | + \\
& + | \langle |\Psi_0|^2 (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0), \varphi_1 \rangle_{L^2} | \\
& \leq \| \Psi_n - \Psi_0 \|_{0,4,\Omega} \| |\Psi_n| + |\Psi_0| \|_{0,4,\Omega} \| \mathbf{A}_n \|_{0,2,\Omega_1} \| \varphi \|_\infty + \\
& + \| \Psi_0^2 \|_{0,2,\Omega} \| (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_0) \|_{0,2,\Omega_1} \| \varphi_1 \|_\infty \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

pois, $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$ em $L^4(\Omega, \mathbb{C})$ e $\mathbf{A}_n \rightarrow \mathbf{A}_0$ em $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$.

Assim, com os resultados acima é possível perceber que

$$\begin{aligned}
0 & = \left\langle \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_n)^2 \Psi_n + \alpha |\Psi_n|^2 \Psi_n - \beta \Psi_n, \varphi \right\rangle_{L^2} \rightarrow \\
& \rightarrow \left\langle \frac{1}{2m} (-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0)^2 \Psi_0 + \alpha |\Psi_0|^2 \Psi_0 - \beta \Psi_0, \varphi \right\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned}
0 & = \langle \text{rot} \mathbf{A}_n, \text{rot} \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \text{rot} \mathbf{B}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \left\langle \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{J}}_n, \varphi_1 \right\rangle_{L^2} \rightarrow \\
& \rightarrow \langle \text{rot} \mathbf{A}_0, \text{rot} \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \text{rot} \mathbf{B}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} - \left\langle \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{J}}_0, \varphi_1 \right\rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
0 & = \langle \text{rot} \mathbf{A}_n, \text{rot} \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \text{rot} \mathbf{B}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2} \rightarrow \\
& \rightarrow \langle \text{rot} \mathbf{A}_0, \text{rot} \varphi_1 \rangle_{L^2} + \langle \text{rot} \mathbf{B}_0, \varphi_1 \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$.

Portanto, as expressões *a*) a *i*) são satisfeitas no sentido distribucional.

Agora, seja $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, observamos que

$$\begin{aligned}
 & \langle u_n, \varphi \rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})} \\
 &= \left\langle \left(i\hbar \nabla \Psi_n + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_n \cdot \mathbf{n}, \varphi \right) \right\rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})} \\
 &= \left\langle i\hbar \nabla \Psi_n + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_n \Psi_n, \nabla \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{C})} \\
 &\quad + \left\langle \operatorname{div} \left(i\hbar \nabla \Psi_n + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_n \Psi_n \right), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{C})} \\
 &\rightarrow \left\langle i\hbar \nabla \Psi_0 + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0 \Psi_0, \nabla \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{C})} \\
 &\quad + \left\langle \operatorname{div} \left(i\hbar \nabla \Psi_0 + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0 \Psi_0 \right), \varphi \right\rangle_{L^2(\Omega, \mathbb{C})} \\
 &= \left\langle \left(i\hbar \nabla \Psi_0 + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0 \Psi_0 \right) \cdot \mathbf{n}, \varphi \right\rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})}.
 \end{aligned}$$

Disto e do fato de

$$\langle u_n, \varphi \rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})} \rightarrow \langle u_0, \varphi \rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})}$$

temos que

$$\left\langle \left(i\hbar \nabla \Psi_0 + \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0 \Psi_0 \right) \cdot \mathbf{n} - u_0, \varphi \right\rangle_{L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})} = 0, \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{C}),$$

de modo que, também em sentido distribucional, obtemos

$$\left(i\hbar\nabla\Psi_0 + \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0\Psi_0 \right) \cdot \vec{n} = u_0, \text{ em } \partial\Omega.$$

Um procedimento análogo pode ser realizado na outra condição de fronteira. Portanto, deste último resultado nós podemos concluir que, no sentido distribucional

$$\begin{cases} \frac{1}{2m} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0 \right)^2 \Psi_0 + \alpha|\Psi_0|\Psi_0 - \beta\Psi_0 = 0, & \text{em } \Omega, \\ \left(-i\hbar\nabla\Psi_0 + \frac{2e}{c}\mathbf{A}_0\Psi_0 \right) \cdot \mathbf{n} = u_0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \operatorname{rot}^*\operatorname{rot}\mathbf{A}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{B}_0 + \frac{4\pi}{c}\tilde{J}, & \text{em } \Omega, \\ \operatorname{rot}^*\operatorname{rot}\mathbf{A}_0 = \operatorname{rot}\mathbf{B}_0, & \text{em } \Omega_1 \setminus \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{A}_0 = 0, & \text{em } \Omega_1, \\ \mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{em } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

onde,

$$\tilde{J}_0 = -\frac{ie\hbar}{2m}(\Psi_0^*\nabla\Psi_0 - \Psi_0\nabla\Psi_0^*) - \frac{2e^2}{mc}|\Psi_0|^2\mathbf{A}.$$

Portanto,

$$(\Psi_0, \mathbf{A}_0, u_0) \in \mathcal{C}.$$

Disto, de $\Psi_n \rightharpoonup \Psi_0$ fracamente em $W^{1,2}$, de $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $L^2(\partial\Omega, \mathbb{C})$, da convexidade de J em $\nabla\Psi$ e u e do fato que $\Psi_n \rightarrow \Psi_0$ nas normas L^2 e L^4 , obtemos

$$\eta = \liminf_{n \rightarrow \infty} J(\Psi_n, \mathbf{A}_n, u_n) \geq J(\Psi_0, \mathbf{A}_0, u_0).$$

Finalmente, temos que

$$J(\Psi_0, \mathbf{A}_0, u_0) = \eta = \min_{(\Psi, \mathbf{A}, u) \in \mathcal{C}} J(\Psi, \mathbf{A}, u).$$

Assim, a prova está completa. □

6 Método das Linhas Generalizado

Este capítulo apresenta uma versão matricial do método das linhas generalizado. A apresentação original do mesmo pode ser encontrada em [4] e outras versões em [5]. Tal método computacional é capaz de encontrar aproximações para soluções de equações diferenciais parciais elípticas de maneira bastante eficiente e prática.

A classe de problemas que são modelados em uma EDP elíptica é muito grande, e abrange, por exemplo, as equações de Ginzburg-Landau.

6.1 O método

A seguir, o texto descreve esta nova versão matricial do método das linhas generalizado.

Considere o problema a seguir: Encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) + f = 0, & \text{em } \Omega = [a, b] \times [c, d], \\ u(a, y) = u_a, u(b, y) = u_b, \\ u(x, c) = u_c, u(x, d) = u_d. \end{cases}$$

Discretizando o domínio da variável x em uma malha uniforme de diâmetro d com $N - 1$ pontos interiores $\tau = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b\}$. Com $d = x_i - x_{i-1}, i \in \{1, \dots, N\}$, denotamos $u_i = u(x_i, y)$. Discretizando $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ via diferenças finitas, temos

$$\frac{(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}))d^2}{d^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} d^2 + g(u_n)d^2 + f_n d^2 = 0, \text{ para } n \in \{1 \dots N-1\}.$$

Definindo $T(u_n) = \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + g(u_n)$, temos

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + T(u_n)d^2 + f_n d^2 = 0. \quad (6.1)$$

Assim, tomando $n = 1$

$$u_2 - 2u_1 + u_0 + T(u_1)d^2 + f_1 d^2 = 0,$$

$$u_1 = \frac{u_2}{2} + \frac{u_0}{2} + \frac{T(u_1)d^2}{2} + \frac{f_1 d^2}{2}.$$

Ou ainda,

$$u_1 = a_1 u_2 + b_1 u_0 + c_1 T(u_1) + e_1 + E_1 = 0,$$

com

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = \frac{d^2}{2}, \quad e_1 = \frac{f_1 d^2}{2}, \quad E_1 = 0.$$

Procedendo indutivamente, podemos escrever u_n em função de u_0 , seguinte maneira: Admita que

$$u_{n-1} = a_{n-1}u_n + b_{n-1}u_0 + c_{n-1}T(u_{n-1}) + e_{n-1} + E_{n-1}. \quad (6.2)$$

Portanto, via equações (6.1) e (6.2) temos que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2u_n + a_{n-1}u_n + b_{n-1}u_0 + c_{n-1}T(u_{n-1}) \\ + e_{n-1} + E_{n-1} + T(u_n)d^2 + f_n d^2 = 0. \end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo o termo $c_{n-1}T(u_n)$, somos levados a

$$\begin{aligned} (2 - a_{n-1})u_n = u_{n+1} + b_{n-1}u_0 + (c_{n-1} + d^2)T(u_n) + e_{n-1} \\ + f_n d^2 + c_{n-1}(T(u_{n-1}) - T(u_n)) + E_{n-1}. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes com a equação (6.2) temos que

$$u_n = a_n u_{n+1} + b_n u_0 + c_n T(u_n) + e_n + E_n.$$

Com

$$a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}, \quad b_n = a_n b_{n-1}, \quad c_n = a_n (c_{n-1} + d^2)$$

$$e_n = a_n (e_{n-1} + f_n d^2) \text{ e } E_n = a_n (c_{n-1} (T(u_{n-1}) - T(u_n)) + E_{n-1}).$$

Prosseguindo desta maneira até a última linha

$$u_{N-1} = a_{N-1}u_N + b_{N-1}u_0 + e_{N-1} + c_{N-1} \left(\frac{\partial^2 u_{N-1}}{\partial y^2} + g(u_{N-1}) \right) + E_{N-1}.$$

Os valores de u_0 e u_N são dados do problema de contorno. Assim, considerando $E_n \approx 0$, temos uma Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem cuja solução nos dará u_{N-1} . Procedendo de forma análoga, calculamos u_n de forma retroativa.

$$u_n = a_n u_{n+1} + b_n u_0 + e_n + c_n \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} + g(u_n) \right), \forall n \in \{1, 2, \dots, N-1\}.$$

Adiante neste texto veremos que, de fato $E_n \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$. Vejamos a seguir uma outra forma de descrever as constantes que, torna uma implementação computacional do método mais adequada.

Mostraremos por indução matemática que as seguintes expressões são válidas

$$a_n = \frac{n}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n+1}, \quad c_n = \frac{nd^2}{2} \text{ e } e_n = \frac{d^2}{n+1} \sum_{i=1}^n if_i.$$

a_n :

Notamos que, de fato, $a_1 = \frac{1}{2}$. Além disso, utilizando a hipótese de indução

$$a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}} = \frac{1}{2 - \frac{n-1}{n}} = \frac{1}{\frac{2n-n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}.$$

b_n :

De fato, $b_1 = \frac{1}{2}$. E por indução

$$b_n = a_n b_{n-1} = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}.$$

c_n :

De fato $c_1 = \frac{d^2}{2}$. E via indução

$$\begin{aligned} c_n &= a_n (c_{n-1} + d^2) = \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n-1)d^2}{2} + d^2 \right) \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{nd^2 - d^2 + 2d^2}{2} \right) = \frac{n^2 d^2 + nd^2}{2(n+1)} = \frac{nd^2}{2}. \end{aligned}$$

e_n :

De fato, $e_1 = \frac{d^2 f_1}{2}$. Utilizando indução matemática.

$$\begin{aligned} e_n &= a_n (e_{n-1} + f_n d^2) = \frac{n}{n+1} \left(f_n d^2 + \frac{d^2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i f_i \right) \\ &= \frac{d^2}{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} i f_i + d^2 \frac{n f_n}{n+1} = \frac{d^2}{n+1} \sum_{i=1}^n i f_i. \end{aligned}$$

Estudaremos agora o erro associado ao método E_n , a fim de descrevê-lo de uma forma que seja possível concluir que o erro em cada linha tenda a zero ao refinar a malha, isto é, que $E_n \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.

A expressão de E_n é

$$E_n = a_n(c_{n-1}(T(u_{n-1}) - T(u_n)) + E_{n-1}).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{(n-1)d^2}{2} (T(u_{n-1}) - T(u_n)) + E_{n-1} \right) \\ &= \frac{n(n-1)d^2}{2(n+1)} (T(u_{n-1}) - T(u_n)) + \frac{n}{n+1} E_{n-1}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Calculemos os primeiros E_n para nos familiarizarmos com o comportamento dos termos

$$\frac{E_1}{d^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{E_2}{d^2} &= \frac{2}{6}(T_1 - T_2) + \frac{2}{3} \frac{E_1}{d^2} \\ &= -\frac{1}{3}T_2 + \frac{1}{3}T_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_3}{d^2} &= \frac{6}{8}(T_2 - T_3) + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}T_2 + \frac{1}{3}T_1 \right) \\ &= -\frac{3}{4}T_3 + \frac{2}{4}T_2 + \frac{1}{4}T_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_4}{d^2} &= \frac{12}{10}(T_3 - T_4) + \frac{4}{5} \left(-\frac{3}{4}T_3 + \frac{2}{4}T_2 + \frac{1}{4}T_1 \right) \\ &= -\frac{6}{5}T_4 + \frac{3}{5}T_3 + \frac{2}{5}T_2 + \frac{1}{5}T_1 \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{E_5}{d^2} &= \frac{20}{12}(T_4 - T_5) + \frac{5}{6} \left(-\frac{6}{5}T_4 + \frac{3}{5}T_3 + \frac{2}{5}T_2 + \frac{1}{5}T_1 \right) \\ &= -\frac{10}{6}T_5 + \frac{4}{6}T_4 + \frac{3}{6}T_3 + \frac{2}{6}T_2 + \frac{1}{6}T_1.\end{aligned}$$

Notamos que os primeiros E_n , são combinações lineares de T_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, ou seja,

$$\frac{E_n}{d^2} = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^n T(u_i) \right), \text{ com } n \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad (6.4)$$

Vejamos, por indução, que a expressão acima é válida para qualquer n .

Suponha que

$$\frac{E_{n-1}}{d^2} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{n-1} T(u_i) \right).$$

Da expressão de E_n (6.3), segue que

$$\begin{aligned}\frac{E_n}{d^2} &= \frac{n(n-1)}{2(n+1)} T(u_{n-1}) - \frac{n(n-1)}{2(n+1)} T(u_n) \\ &\quad + \frac{n\alpha_{n-1}^n}{n+1} T(u_{n-1}) + \frac{n}{n+1} \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i^{n-1} T(u_i).\end{aligned} \quad (6.5)$$

O que é suficiente para concluir que (6.4) é válida para qualquer n . Além disso, de (6.5) observa-se que

$$\alpha_n^n = -\frac{n(n-1)}{2(n+1)}. \quad (6.6)$$

Além disso, tem se que

$$\alpha_{n-1}^n = \frac{n(n-1)}{2(n+1)} + \frac{n}{n+1} \alpha_{n-1}^{n-1}.$$

Via equação (6.6) segue que

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1}^n &= \frac{n(n-1)}{2(n+1)} + \frac{n}{n+1} \cdot \left(-\frac{(n-1)(n-2)}{2n} \right) \\ &= \frac{n^2 - n - n^2 + 3n - 2}{2(n+1)} \\ &= \frac{2(n-1)}{2(n+1)} = \frac{n-1}{n+1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_{n-1}^n = \frac{n-1}{n+1} \tag{6.7}$$

Mostraremos a seguir que $\alpha_i^n = \frac{i}{n+1}, \forall 1 \leq j \leq n-2$:

Fixe $i \in \{2, 3, \dots, n-2\}$ mostraremos que a expressão acima é válida para α_i^{i+j} por indução sobre j .

Para $j = 1$, o resultado é válido via Eq(6.7), ou seja

$$\alpha_i^{i+1} = \frac{i}{i+2}.$$

Agora, via Eq.(6.5), temos

$$\alpha_i^{i+j} = \frac{i+j}{i+j+1} \alpha_i^{i+j-1}$$

Utilizando a hipótese de indução.

$$\alpha_i^{i+j} = \left(\frac{i+j}{i+j+1} \right) \frac{i}{i+j-1+1} = \frac{i}{(i+j)+1}.$$

Finalmente, conseguimos uma expressão para E_n envolvendo uma combinação linear dos $T(u_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$, isto é,

$$E_n = d^2 \left(-\frac{n(n-1)}{2(n+1)} T(u_n) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+1} T(u_i) \right).$$

Como $d = \frac{b-a}{N}$ temos que

$$\|E_n\| \leq \frac{(b-a)^2}{N^2} \left(\left| \frac{n(n-1)}{2(n+1)} \right| \|T(u_n)\| + \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n-1} i \|T(u_i)\| \right).$$

Notamos que $\frac{n(n-1)}{2(n+1)} \geq 0$ para $n \geq 1$. Definindo

$$M_n = \max_{1 \leq i \leq n} \|T(u_i)\|$$

e fazendo a soma da progressão aritmética de razão 1 e $n-1$ termos, temos que

$$\begin{aligned} \|E_n\| &\leq \frac{(b-a)^2 M_n}{N^2} \left(\frac{n(n-1)}{2(n+1)} + \frac{n(n-1)}{2(n+1)} \right) \\ &= \frac{(b-a)^2 M_n}{N^2} \left(\frac{n(n-1)}{(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Note que $\frac{n(n-1)}{(n+1)}$ é crescente para $n \geq 1$ e como $n \leq N$ temos que

$$\|E_n\| \leq \frac{(b-a)^2 M_n}{N^2} \left(\frac{N(N-1)}{(N+1)} \right),$$

ou seja

$$\|E_n\| \leq (b-a)^2 M_n \left(\frac{N-1}{N(N+1)} \right).$$

Portanto

$$\|E_n\| \rightarrow 0 \text{ quando } N \rightarrow \infty.$$

Podemos resolver as EDOs dadas por (6.1) pelo método dos pontos, por exemplo. Para maiores detalhes veja [4].

6.2 Exemplo Numérico

Como exemplo numérico vamos abordar a EDP elíptica que modela o problema de Ginzburg-Landau. Considere o modelo de problema elíptico dado: Encontrar $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u + g(u) + f = 0, & \text{em } \Omega = [a, b] \times [c, d] \\ u(a, y) = u_a, u(b, y) = u_b \\ u(x, c) = u_c, u(x, d) = u_d \end{cases}$$

Tomando $g(u) = -\alpha u^3 + \beta u$, obtemos o problema associado às equações de Ginzburg-Landau

$$-\varepsilon \Delta u + \alpha u^3 - \beta u + f = 0$$

Em particular, tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$ e $f \equiv 1$, com condições de Dirichlet nulas na fronteira.

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta u + u^3 - u + f = 0, & \text{em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, y) = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Aplicaremos o método das linhas generalizados para diferentes valores de $\varepsilon \in \{1, 0.1, 0.01, 0.001\}$.

Observando o problema a ser trabalhado notamos que a medida que ε tende a zero, a equação se aproxima de uma equação polinomial $x^3 - x - 1 = 0$ que possui única solução real $x \approx 1.3247$. Assim, esperamos que ao tomarmos valores cada vez mais próximos de zero, a solução se comporte, qualitativamente próxima da função constante, mas respeitando as condições nulas na fronteira.

Conforme segue nos gráficos contidos nas figuras 7 a 10, qualitativamente, podemos averiguar que a solução apresenta comportamento compatível com o esperado.

Na figura 7, notamos que a função encontrada pelo método apresenta comportamento típico de solução para problemas elípticos com condições de Dirichlet.

O gráfico da função ainda apresenta formato semelhante a uma membrana para valor de $\varepsilon = 0.1$ (ver figura 8).

Notamos que o padrão do gráfico torna-se mais achatado ao

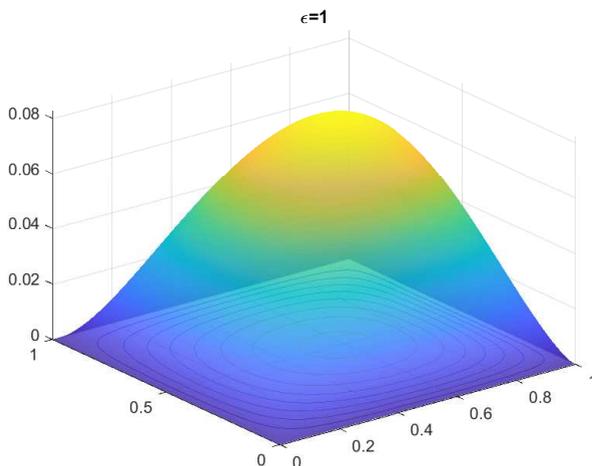


Figura 7: Solução obtida pelo método para valor de parâmetro $\varepsilon = 1$

tomarmos $\varepsilon = 0.01$ (ver gráfico na figura 9). A função apresenta um salto mais acentuado para um valor próximo à solução do polinômio $x^3 - x = 1$

Já para $\varepsilon = 0.001$ (ver gráfico na figura 10) a solução encontrada torna-se bem próxima do esperado intuitivamente, ilustrando que o método é capaz de construir soluções compatíveis com o problema.

Assim, o método das linhas generalizados é capaz de construir a solução de forma bastante eficiente e pode ser aplicado para diversos tipos de problemas elípticos mais complicados, com pouca variação na implementação.

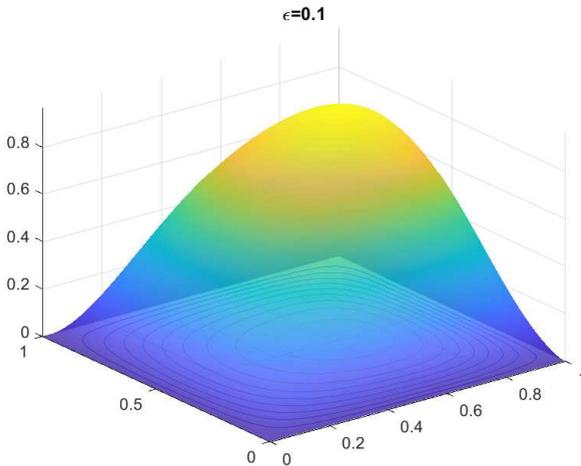


Figura 8: Solução obtida pelo método para valor de parâmetro $\varepsilon = 0.1$

6.3 Código em MatLab

O método implementado em linguagem MatLab pode ser conferido aqui.

```
%Método para resolução do problema elíptico
%\epsilon\delta u+\alpha u^3-\beta u+f=0
% Em um domínio retângular [a,b]x[c,d] através do método das linhas
% generalizado
clear
%close all
```

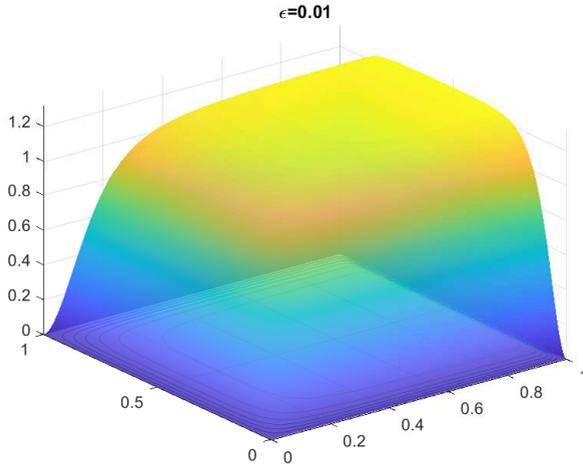


Figura 9: Solução obtida pelo método para valor de parâmetro $\varepsilon = 0.01$

```

%Dados do problema:-----
alphaa=1000;
beta=1000;
aa=0; bb=1; cc=0;dd=1;
%Domínio [aa,bb]X[cc,dd]
%Discretizando o domínio-----
N=1400;%Pontos de discretização em x
d=(bb-aa)/N;
M=300;% Pontos de discretização em y
d1=(dd-cc)/M;
f=1000*ones(N-1,M-1);

```

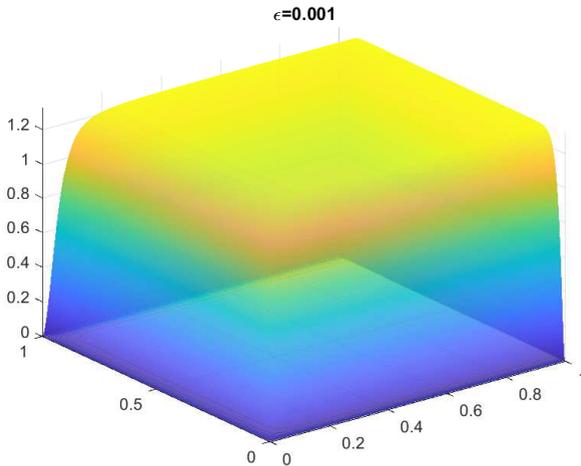


Figura 10: Solução obtida pelo método para valor de parâmetro $\varepsilon = 0.001$

```

%M2 é a matriz de diferenciação de ordem 2
M2=-2*diag(ones(M-1,1))+diag(ones(M-2,1),1)+diag(ones(M-2,1),-1);
M2=M2/d1^2;
%-----
IM=eye(M-1);
%Calculando cada e_n-----
e=zeros(N-1,M-1);e(1,:)=0.5*f(1,:);
for n=2:N-1
e(n,:)=n*(e(n-1,:)+f(n,:))/(n+1);
end
e=e*d^2;

```

```

[PX,PY]=meshgrid(aa:d:bb,cc:d1:dd);
%U=(10*PX.*(PX-1).*PY.*(PY-1))'; %Chute Inicial+Introduzir contorno
U=ones(N+1,M+1);U(1,:)=zeros(1,M+1);U(end,:)=zeros(1,M+1);
U(:,1)=zeros(N+1,1);U(:,end)=zeros(N+1,1);
%O chute inicial dado foi uo=x(x-1)y(y-1).com condições
%de contorno nulas na fronteira do domínio
Ua=U;% U anterior é armazenado para avaliar a evolução das soluções
k=0;
tol=1/100000;
criterio=inf;
while (criterio>tol) && (k<500) % O algoritmo para quando duas
%soluções calculadas estão muito próximas uma da outra
%ou um número máximo de iterações é alcançado
k=k+1;
for i=1:N-1
c=0.5*(n-i)*d^2;
B=(N-i)*U(N-i+2,2:end-1)/(N+1-i)+U(1,2:end-1)/(N+1-i)+...
e(N-i,:)+2*c*alphaa*U(N-i+1,2:end-1).^3;%Lado direito do problema
B=B+c/d1^2*(U(N-i+1,1)*IM(1,:)+U(N-i+1,M+1)*IM(M-1,:));
AA=eye(M-1)-c*M2-c*(-3*alphaa*diag(U(N-i+1,2:end-1))...
.^2+beta*eye(M-1));
%AA é a matriz do problema
x=AA\B';
U(N-i+1,2:end-1)=x';
end
criterio=norm(U-Ua,inf);%/norm(U);

```

```
Ua=U;
end
figure
s=surfc(PX,PY,U')%saída gráfica
shading interp
alpha(s,0.8)
```


7 *Conclusão*

Ao longo dessa dissertação, fomos capazes de estudar a fenomenologia por trás da supercondutividade. Ao visitarmos a teoria de Drude, London e Ginzburg-Landau compreendemos os complexos mecanismos físicos deste fenômeno fascinante.

Com base no conhecimento acerca de fundamentos básicos de análise e equações diferenciais conseguimos mostrar que o problema de controle ótimo estudado associado às equações de Ginzburg-Landau, de fato, possui solução. Através do teorema de Relich-Kondrachov e da hipótese do Gauge de London foi possível construirmos uma sequência minimizante que converge para a solução dentro do espaço de funções adequados.

Experimentos numéricos abordando modelos correlatos às equação de Ginzburg-Landau ilustraram a eficiência do método das linhas generalizado que foi desenvolvido no corpo do trabalho. O método é capaz de construir soluções para uma grande variedade de problemas elípticos de maneira computacionalmente econômica.

Para trabalhos futuros o método das linhas generalizado abre grandes possibilidades, entre elas a aplicação para problemas mais complicados, em domínios tridimensionais ou até mesmo variações diferentes do método para outras classes de problemas que não sejam elípticos.

Referências

- [1] ADAMS, R. *Sobolev Spaces*. Elsevier, Oxford, UK, 2003.
- [2] ANNETT, J. F. *Superconductivity, superfluids and condensates*, vol. 5. Oxford University Press, Oxford, 2004.
- [3] BOTELHO, F. *Topics on Functional Analysis, Calculus of Variations and Duality*. Academic Publications, Sofia, 2011.
- [4] BOTELHO, F. *Functional Analysis and Applied Optimization in Banach Spaces*. Springer, Switzerland, 2014.
- [5] BOTELHO, F. *A Classical Description of Variational Quantum Mechanics and Related Models*. Nova Science Publishing, New York, 2017.
- [6] BOTELHO, F. *Existence of solution for the Ginzburg-Landau system, a related optimal control problem and its computation by the generalized method of lines*. Appl. Math. Comput., vol. 218(2012), pág.11976-1989.
- [7] CONWAY, J. B. *A course in functional analysis*, vol. 96. Springer, New York, 2013.
- [8] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [9] ITO, KAZUFUMI E KUNISCH, K. *Lagrange Multiplier Approach to Variational Problems and Applications*. SIAM, Philadelphia, 2008.

- [10] PUREUR, P. *Supercondutividade e Materiais Supercondutores*, vol. 1. Instituto de Física UFRGS, Porto Alegre, 2004.
- [11] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [12] SCHWEIZER, B. *On Friedrichs Inequality, Helmholtz Decomposition, Vector Potentials, and the div-curl Lemma*. Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, Springer INdAM series, doi: 10.1007/978-3-319-75940-1-4, 2018.
- [13] STRIKWERDA, J. C. *Finite Differences Schemes and Partial Differential Equations*. SIAM, Philadelphia, 2004.
- [14] TROUTMAN, J. L. *Variational calculus and optimal control: optimization with elementary convexity*. Springer, New York, 1996.