Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de qualificação para o doutorado
Data: 21/03/2016
Área de concentração: Álgebra
Nome: ______________________________

1) Sobre um anel com unidade R, sejam P e Q módulos projetivos, e sejam A, M e N módulos tais que existam sequências exatas curtas

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} P \xrightarrow{p} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} Q \xrightarrow{q} A \longrightarrow 0$$

(i) Seja $X = \{(u, v) \in P \times Q \mid p(u) = q(v)\}$. Mostre que $\pi_1 \colon X \to P$ dado por $\pi_1(u, v) = u$ é um homomorfismo de R-módulos e que $\ker(\pi_1) \cong N$.

(ii) Sendo $\pi_2 \colon X \to Q$ o homomorfismo definido por $\pi_2(u, v) = v$, exiba homomorfismos $M \xrightarrow{f} X$ e $N \xrightarrow{g} X$ tais que o diagrama abaixo seja comutativo e que as linhas e colunas do mesmo sejam sequências exatas curtas:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & N \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"] & N \arrow[d, "j"] & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, equal] & X \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & Q \arrow[r] \arrow[d, "q"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(iii) Prove que $P \oplus N \cong Q \oplus M$.

2) Seja R um domínio de ideais principais.

(i) Se A, B e C são módulos finitamente gerados sobre R e $A \oplus B \cong A \oplus C$, prove que $B \cong C$.

(ii) Mostre que a conclusão do item anterior é falsa se não supusermos que os módulos sejam finitamente gerados.

3) Seja G um grupo abeliano.

(i) Mostre que, para cada $m > 0$, $G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m$ e G/mG são isomorfos como $\mathbb{Z}$-módulos.

(ii) Usando o item (i), mostre que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_d$, em que $d = MDC(m, n)$. Sugestão: lembre-se que $d\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$.

4) Seja M um R-módulo M à esquerda. Sabemos que M é semissimples se, e somente se, todo R-submódulo à esquerda de M é um somando direto de M. Use essa definição para responder se o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}$ é semissimples. Justifique com detalhes a sua resposta.

Bom exame!