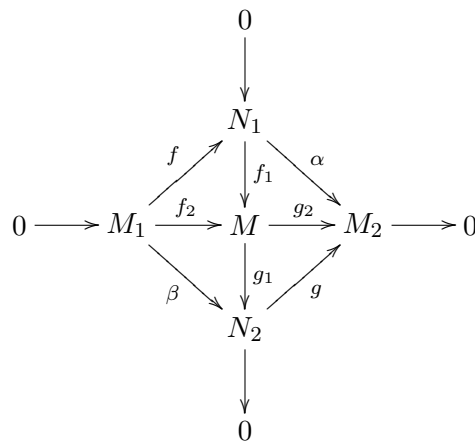


Universidade Federal de Santa Catarina
 Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
 Exame de qualificação para o doutorado
 Data: 31/08/2016
 Área de concentração: Álgebra
 Nome: _____

1) Seja R um anel. Mostre o que se pede em cada item.

(i) Se $f : M \rightarrow M$ é um homomorfismo de R -módulos tal que $f \circ f = f$, então $M = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
 Sugestão: Lembre o que significa uma sequência exata curta cindir.

(ii) Considere o diagrama comutativo abaixo em $R\text{-Mod}$. Admita que as sequências vertical e horizontal sejam exatas.



Faça o que se pede:

- 1) mostre que α é o homomorfismo nulo;
- 2) mostre que $\text{ker}(g_2) = \text{Im}(f_1)$ e conclua que $\text{ker}(g_1) = \text{Im}(f_1) = \text{ker}(g_2) = \text{Im}(f_2)$;
- 3) mostre que β é o homomorfismo nulo;
- 4) mostre que f e g são isomorfismos.

2) Mostre que se X e Y são espaços vetoriais sobre um corpo K com bases $\{x_i\}_{i \in I}$ e $\{y_j\}_{j \in J}$, respectivamente, então $x \otimes y = 0$, onde $x \in X$ e $y \in Y$ implica que $x = 0$ ou $y = 0$.

Sugestão: É sabido que $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I, j \in J}$ é base $X \otimes_K Y$. Você pode usar funcionais lineares $x_\ell^* : X \rightarrow K$ tais que $x_\ell^*(x_i) = \delta_{\ell i}$ (Delta de Kronecker) ou $y_t^* : Y \rightarrow K$ tais que $y_t^*(y_j) = \delta_{tj}$. Lembre que K é corpo.

3) Seja $f: \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ o homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos definido por $f(x, y, z, w) = (3x - 3y + 2z - 4w, 2x + 3z)$.

- (i) f é sobrejetor?
- (ii) O núcleo de f é um submódulo livre de \mathbb{Z}^4 ? Em caso afirmativo, determine uma base de $\text{ker}(f)$.

4) Seja R um anel com unidade.

(i) Prove que existem ideais à esquerda I_1 e I_2 de R tais que ${}_R R = I_1 \oplus I_2$ se, e somente se, existem idempotentes $e_1 \in I_1$ e $e_2 \in I_2$ tais que $1 = e_1 + e_2$ e $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$.

(ii) No caso em que ${}_R R = I_1 \oplus I_2$, prove que $I_i = R e_i$ para $i \in \{1, 2\}$, em que e_1 e e_2 são como no item anterior.

(iii) Seja $A = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua} \}$ o anel com unidade no qual as operações de soma e multiplicação são definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

Mostre que A não é semissimples. (Sugestão: mostre que o ideal $I = \{f \in A \mid f(0) = 0\}$ não é um somando direto de A .)

Bom exame!