Florianópolis, 29 de março de 2018.
Universidade Federal de Santa Catarina
Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada
Prova de Qualificação de Doutorado de Análise (2018/01)

Nome: ______________________________

Matrícula: ______________________

Instruções

- Esta prova é composta por 7 questões. Preencha as informações requeridas no topo desta página.
- A prova tem duração de 4 horas.
- Interpretação, compreensão e resolução das questões fazem parte da avaliação. Você deve exibir todos os cálculos e deduções que levaram à obtenção da resposta. Se você usar algum teorema, indique e explique como o teorema se aplica. Organize sua solução de modo coerente e coeso. Respostas não justificadas ou incorretamente justificadas não serão consideradas. Questões parcialmente corretas podem receber pontuação parcial.
- Escreva seu nome em cada folha e indique claramente qual questão está sendo resolvida.

Boa prova!

1. Seja $T : l^2 \to l^2$ definido por $T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. Mostre que T é um operador compacto se e somente se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0$.

2. Seja H espaço de Hilbert e $T \in B(H)$. Mostre que se $Im(T)$ tem dimensão finita então existem $w_1, ..., w_n \in H$ e $v_1, ..., v_n \in H$ tal que para cada $x \in H$, $T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x, v_j \rangle w_j$.

3. Mostre que se um espaço normado X contém m elementos linearmente independentes então X' tem pelo menos m elementos linearmente independentes.

4. Sejam X e Y espaços de Banach e seja $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X, Y)$. Mostre que a sequencia numérica $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se e somente se para cada $x \in X$ e $f \in Y'$ a sequencia $(f(T_n(x)))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada.

5. Fixe $1 \leq p < \infty$. Prove que todo elemento $f \in L^p(\mathbb{R})$ pode ser aproximado por funções com suporte em intervalos limitados. Conclua que $L^p(\mathbb{R})$ é separável como espaço normado.

6. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ função integrável. Prove que se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um família crescente de conjuntos em $\mathcal{M}$, então
$$\int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

7. Prove que um espaço métrico é separável se e somente se possui uma base enumerável quando visto como espaço topológico.