Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação em Análise Numérica-2018/01

Resolva uma questão de cada bloco.

Bloco A:

1. Para o problema de Cauchy

$$u'(t) = f(t,u), \quad t > t_0$$
$$u(t_0) = u_0,$$

considere o método de Runge-Kutta explicito com dois estágios:

$$u_{n+1} = u_n + h(b_1k_1 + b_2k_2),$$
$$k_1 = f(t_n, u_n), k_2 = f(t_n + \alpha h, u_n + \beta h k_1).$$

Encontre a relação entre parâmetros do método que garantem acurácia de segunda ordem.

2. Para o problema de Cauchy

$$u'(t) = f(t,u), \quad t > 0$$
$$u(0) = u_0,$$

encontre a região de estabilidade absoluta para os métodos de Euler explicito, implícito e método de Crank-Nicolson. Quais destes métodos são A - estáveis?

Bloco B:

1. Considere o problema de valor inicial para a equação hiperbólica de primeira ordem:

$$\begin{aligned} &\partial_t u + a\partial_x u = 0 \quad x \in (0,1), t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned}$$

com condições de contorno periódicos e o método de Lax-Friedrichs para a solução numérica do problema:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n\right) - \frac{ak}{2h}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

a. Use análise de Von Neumann para encontrar as condições de estabilidade do método.

b. Apresente um esquema em termos de fluxos numéricos. Encontre a condição CFL para a estabilidade do método.

2. Considere o problema de valor inicial e de contorno para a equação de difusão:

$$\begin{aligned} &\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad x \in (a,b),\ t > 0, \\ &u(a,t) = u(b,t) = 0, \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned}$$

a. Apresente a formulação do método de Euler explicito para a solução numérica do problema.

b. Estime a ordem de erro de truncamento do método em t e x.

c. Use análise de Von Neumann para encontrar as condições de estabilidade do método.

Bloco C:

1. Considere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, com autovalores: $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ e o método QR iterativo para estimar os autovalores de A. Descreva detalhadamente este método. Explique a vantagem e/ou necessidade de previamente reduzir A a uma matriz Hessenberg superior através de transformações ortogonais.

2. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica. Descreva o algoritmo de Lanczos para a determinação de uma base ortonormal para o subespaço de Krylov

$$\mathcal{K}_k(A, x) = span[x, Ax, A^2x, \ldots, A^{k-1}x], \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

   Como esse algoritmo pode ser combinado ao procedimento de Rayleigh-Ritz com o objetivo de calcular os autovalores de A? Discuta as dificuldades técnicas da aplicação desse método para o cálculo dos autovalores e alternativas para atenuá-las.

Bloco D:

1. Sejam A, B e C matrizes com dimensões tais que o produto $A^T CB^T$ é bem definido. Seja $\mathcal{X}$ o conjunto das matrizes X as quais minimizam

$$||AXB - C||_F,$$

em que $||.||_F$ denota a norma Frobenius. Mostre que $X_0 = A^+ CB^+$ satisfaz

$$||X_0||_F = \min_{X \in \mathcal{X}} ||X||_F,$$

e que X_0 é a única matriz de $\mathcal{X}$ com essa propriedade.
Obs.: A^+ denota a pseudo-inversa (inversa de Moore-Penrose) da matriz A.

2. Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ não singular e o método SOR para solução do sistema linear $Ax = b$:

$$M_\omega x^{k+1} = N_\omega x^k + \omega b,$$

sendo $\omega \neq 0$, $M_\omega = D + \omega L$, $N_\omega = (1 - \omega)D - \omega U$; $A = L + D + U$, com $D = diag(A)$, L e U correspondem às partes (estritamente) triangular inferior e superior de A, respectivamente. Seja $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e

$$A = \begin{bmatrix} I_n & B \\ -B^T & I_n \end{bmatrix}.$$

Denotando σ_{max} como o maior valor singular de B, prove que, se

$$0 < \omega \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \sigma_{max}^2}},$$

a sequência (x^k) converge para a solução do sistema.