Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais

24 de Agosto de 2018

Nome: ____

Assinatura: ____

Questão 1. Determine uma base para o espaço vetorial das soluções reais da EDO

$$x'' + 4x = 0.$$

Então, usando essa informação, resolva o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = f(t), & t \in (0, \pi/4) \\ x(0) = x(\pi/4) = 0 \end{cases}$$

com $f : [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Questão 2. Considere a equação diferencial

$$x''(t) + g\big(x(t)\big)x'(t) + h\big(x(t)\big) = 0,$$

com g e h funções de classe C^1 satisfazendo:

(i) $g(t) > 0$ e $th(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(ii) $\lim_{|t|\to\infty} \displaystyle\int_0^t h(s)\, ds = \infty$.

Mostre que para quaisquer condições iniciais $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ e $x'(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, existe solução única limitada, para todo $t \geq 0$.

Questão 3. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto D, de modo que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}^n$ sejam contínuas em D, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, onde $f_1, \ldots, f_n$ são as componentes de f.

Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = \eta, \end{cases} \tag{1}$$

onde $(t_0, \eta) \in D$. Denote por (α, β) o intervalo máximo de existência da solução $\phi(t)$ de (1). Prove que se $\beta < \infty$ então, para todo compacto $K \subset D$, existe $t \in [t_0, \beta)$ tal que $(t, \phi(t)) \notin K$.

Questão 4. Sejam $T > 0$, Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, $\Omega_T = \Omega \times]0,T]$ e

$$C_1^2(\Omega_T) = \left\{ u : \Omega_T \to \mathbb{R} \mid u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i} \in C(\Omega_T),\ \forall\, 1 \leq i,j \leq n \right\}.$$

(a) Suponha que Ω é limitado e que $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_T.$$

Sendo $\Gamma_T := (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T])$, mostre que

$$\max_{\overline{\Omega_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

(b) Considere $f \in C(\Omega_T)$ e $g \in C(\Gamma_T)$. Prove que existe no máximo uma solução

$$u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$$

para o problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f \quad \text{em} \quad \Omega_T, \\ u = g \quad \text{em} \quad \Gamma_T. \end{cases}$$

Questão 5. Sejam $f \in C(\mathbb{R})$ limitada, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ e o *núcleo de Poisson* de Ω, o qual é dado por

$$P(x,y) = P_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

(a) Prove que

$$\lim_{y \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x-s,y) f(s)\, ds = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

e que esse limite é uniforme em todo intervalo fechado e limitado $I = [a,b]$.

(b) Considere o problema $\mathbf{P}$: encontrar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ limitada que satisfaz o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}.$$

Usando a transformada de Fourier, obtenha a solução formal do problema **P** como sendo

$$u(x,y) = \begin{cases} (f * P_y)(x) & \text{se} \quad y > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ f(x) & \text{se} \quad y = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

(Obs: pode-se usar, sem demonstração, a fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\xi| y} e^{i\xi x} d\xi = \frac{2y}{x^2 + y^2},\ x \in \mathbb{R},\ y > 0.)$$

(c) Prove, rigorosamente, que a função u dada no item (b) é solução do problema **P**. Mostre também que $u \in C^\infty(\Omega)$.