Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Exame de Qualificação - Equações Diferenciais

30 de Março de 2023

Nome: ____

Assinatura: ____

Questão 1. Considere A uma matriz quadrada de ordem n qualquer e defina

$$e^{At} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j t^j}{j!}.$$

Mostre que:

(i) Verifique que para todos $t, s \in \mathbb{R}$ vale a identidade $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$.

(ii) Se $t \in \mathbb{R}$ então $\left[e^{At}\right]^T = e^{A^T t}$ e $\left[e^{At}\right]^{-1} = e^{-At}$.

(iii) Assuma que B é uma matriz quadrada de ordem n que comuta com A. Então para $t \in \mathbb{R}$ temos que $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$.

(iv) Se B uma matriz quadrada de ordem n inversível e $t \in \mathbb{R}$ então $Be^{At}B^{-1} = e^{BAB^{-1}t}$.

$\Big($Dica: Você pode (e deve) assumir que o problema de Cauchy $u'(t) = Au(t)$ possui uma única solução para cada par de condições iniciais $(0, u_0)\Big)$

Questão 2. Considere a equação diferencial de segunda ordem não linear

$$x''(t) + g(x'(t)) + f(t)\sin(x(t)) = 0, \tag{1}$$

com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável e limitada. Mostre que para quaisquer condições iniciais $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ e $x'(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, existe uma única solução para (1) definida em $\mathbb{R}$.

Questão 3. Mostre que a função dada por

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \ln(||x||), x \in R^2, x \neq 0,$$

é solução fundamental do Laplaciano em dimensão 2. Qual a solução fundamental do Laplaciano em $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ quando $n > 2$?

Questão 4. Sabemos que a função

$$\Psi(x,t) := \begin{cases} \left[\dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\right] e^{\dfrac{-\|x\|^2}{4t}}, & \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ 0, & \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0), \end{cases}$$

é chamada solução fundamental da equação do calor. Desta forma, se $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ for contínua e limitada prove que:

(i) A função
$$\psi(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x-y,t) g(y) dy$$
está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$.

(ii) $\psi(x,t)$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(iii) $\psi_t(x,t) = \Delta\psi(x,t)$ em $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$.

(iv) $\lim_{(x,t)\to(x_0,0)} \psi(x,t) = g(x_0)$ para cada $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Questão 5. (i) Considere

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= q(x), \quad 0 < x < \pi, \;\; t > 0, \\ u_x(0,t) &= 0, \\ u_x(\pi,t) &= 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ u_t(x,0) &= f(x), \end{aligned}$$

com a regularidade de $f(x)$ e $q(x)$ adequadas. Encontre pelo método de variação de parâmetros ou a fórmula de Duhamel a solução do problema.

$\Big($Dica: Acha a solução na forma $u = u_f + u_q$.$\Big)$

(ii) Calcule explicitamente a solução para estes dois casos: (i) $f(x) = 0$ e $q(x) = x$; (ii) $f(x) = 0$ e $q(x) = \delta(x - x_0)$, com $x_0 = \pi/2$, sendo que

$$\int_0^\pi \delta(x - x_0)\phi(x)dx = \phi(x_0)$$

se ϕ continua e $x_0 \in (0, \pi)$.

Questão 6. Provar o seguinte principio do máximo para a equação do calor: seja $A = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 \leq t < T\}$ com $T > 0$ fixado e Ω um dominio limitado do R^n com fronteira regular. Se $u(x,t)$ é solução de

$$u_t - \Delta u \leq 0$$

em $\Omega \times (0,T)$ então, $\max_{\overline{A}} u = \max_{\partial\Omega\times[0,t)} u$.