



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Juan Carlos Oyola Ballesteros

Método de Galerkin Descontínuo para fluxos em meios porosos fraturados

Florianópolis
2020

Juan Carlos Oyola Ballesteros

Método de Galerkin Descontínuo para fluxos em meios porosos fraturados

Dissertação de mestrado apresentada para o Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática Pura e Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Igor Mozolevski .

Co-Orientadora: Prof. Dr. Luciane I. Assmann Schuh.

Florianópolis
2020

Juan Carlos Oyola Ballesteros

Método de Galerkin Descontínuo para fluxos em meios porosos fraturados

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Márcio Arab Murad
Laboratório Nacional de Computação Científica

Prof. Dr. Lício Hernanes Bezerra
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Luciano Bedin
Universidade Federal de Santa Catarina

Prof. Dr. Rômulo Vermersch
Universidade Federal de Santa Catarina

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em Matemática Pura e Aplicada.

Coordenador do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Igor Mozolevski , Dr.
Orientador

Profa. Luciane Inês Assmann Schuh , Dr.
Co-Orientadora

Florianópolis, 27 de dezembro de 2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Ballesteros , Juan Carlos Oyola
Método de Galerkin Descontínuo para fluxos em meios
porosos fraturados / Juan Carlos Oyola Ballesteros ;
orientador, Igor Mozolevski , coorientador, Luciane Inês
Assmann, 2020.
98 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas,
Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada,
Florianópolis, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Neste documento,
expomos um estudo do método de Galerkin Descontínuo tanto
no domínio quanto na fratura, para o problema de
acoplamento fluxo fratura-domínio. I. Mozolevski , Igor .
II. Assmann, Luciane Inês . III. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura
e Aplicada. IV. Título.

Este trabalho é dedicado a minha mãe, meu pai e a meu irmão, pelo amor e apoio incondicional.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente a meus pais, Nancy e Delly Antonio e a meu irmão José manuel, por sempre me apoiarem em minhas escolhas e desejos. Aos meus colegas e amigos, que de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho. À Érica, pela atenção e disposição com que sempre nos atendeu na secretaria da Pós-Graduação. A CAPES pelo suporte financeiro. Finalmente, agradeço ao meu orientador, professor Igor Mozolevski, e de forma especial a minha co-orientadora, professora Luciane I. Assmann Schuh, pelo auxílio com a programação dos códigos aqui implementados. Ainda quero agradecer à banca examinadora, pelo valioso tempo dedicado à leitura deste trabalho.

RESUMO

Neste documento, expomos um estudo do método de Galerkin Descontínuo, tanto no domínio quanto na fratura, para o modelo de fratura única para alta e baixa permeabilidade no problema de escoamento em meios porosos fraturados, com uma correspondência no malhado computacional fratura-domínio.

Começamos com uma análise do modelo de fratura exclusivo em alta e baixa permeabilidade, gerando a equação modelo a ser tratada. A seguir, efetuamos um estudo da formulação do método de Galerkin Descontínuo para a equação de Poisson, gerando ferramentas para o estudo do método de Galerkin Descontínuo aplicado à equação modelo. Desenhamos um método discreto e comprovamos sua boa colocação e convergência, obtendo estimativas de erro a priori para o problema no domínio e na fratura. Depois, apresentamos nossa implementação computacional, primeiro gerando uma formulação matricial do problema variacional, continuando com as implementações unidimensional, bidimensional e as condições de acoplamento.

Com tudo acima, partindo da Ordem numérica de convergência (ONC), uma série de experiências numéricas são realizadas para comprovar as taxas de convergência teóricas na norma L_2 e na norma $||| \cdot |||_{\mathcal{F}_h}$, bem como para os termos que compõe essa norma.

Palavras-chave: fluxo, fratura, domínio, método de Galerkin Descontínuo.

ABSTRACT

In this document, we present a study of the Galerkin Discontinuous method in both the domain and the fracture, for the single fracture model for high and low permeability in the flow problem in fractured porous media, with a domain meshes conforming to the fracture mesh.

We start with an analysis of the exclusive fracture model in high and low permeability generating the model equation to be treated. Next, we carry out a study of the formulation of the Discontinuous Galerkin method for the Poisson equation, generating tools for the study of the Discontinuous Galerkin method applied to the model equation. We designed a discrete method and proved its good placement and convergence by obtaining a priori error estimates for the problem in the domain and in the fracture. Then, we present our computational implementation generating a matrix formulation of the variational problem, continuing with the unidimensional, bidimensional implementations and the coupling conditions.

With everything ready, , starting from the Numerical Order of Convergence (ONC), several numeric experiments are realized to confirm the theoretical rates of convergence in the norm L_2 and in the norm $||| \cdot |||_{\mathcal{T}_h}$, as well as for the terms that make up this norm.

Keywords: flow, fracture, domain, Discontinuous Galerkin method.

List of Figures

2.1.1 Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela fratura Ω_Γ	16
2.1.2 Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela interface Γ	17
4.1.1 Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela fratura Γ	43
5.1.1 Padrão de distribuição de elementos não nulos na matriz de rigidez A, para $N_h = 8$, $N_p = 3$, $N_\Gamma = 2$ e $N_{p1} = 2$	61
6.1.1 Malha com 640 triângulos no domínio Ω e 16 arestas na interface Γ	83
6.2.1 Teste 1. Solução exata (a esquerda) e solução obtida com o Método de Galerkin Descontínuo (direita), com grau de aproximação polinomial $b=3$, malha de 640 triângulos e $\xi=1$	85
6.3.1 Teste 2. Solução exata (a esquerda) e solução obtida com o Método de Galerkin Descontínuo (direita), com grau de aproximação polinomial $b=3$, malha de 640 triângulos e $\xi=3/4$	88
6.4.1 Teste 3. Solução exata (a esquerda) e solução obtida com o Método de Galerkin Descontínuo (direita), com grau de aproximação polinomial $b=3$, malha de 640 triângulos e $\xi=3/4$	91

List of Tables

6.2.1 Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , para diferentes ordens polinomiais N , com $\xi = 1$	85
6.2.2 Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , para diferentes ordens de aproximação polinomial N , com $\xi = 0.50001$	86
6.2.3 Teste 1: Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido. $\xi = 1$.	86
6.2.4 Teste 1: Taxas de convergência do método DG . $\xi = 0.50001$	87
6.3.1 Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , $\xi = 1$	88
6.3.2 Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , $\xi = 0.50001$	89
6.3.3 Teste 2: Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido. $\xi = 3/4$ e $l_\Gamma=0.000001$	89
6.3.4 Teste 2: Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido. $\xi = 3/4$ e $l_\Gamma=0.01$	90
6.4.1 Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , para diferentes ordens de aproximação, com $\xi = 1$	91
6.4.2 Ordem Numérica de Convergência (ONC) em norma L_2 em meio poroso Ω e em fratura Γ , para diferentes ordens de aproximação, $\xi = 0.50001$	92
6.4.3 Teste 3: Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido, com $\xi = 3/4$	92
6.4.4 Teste 3: Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido, com $\xi = 0.50001$	93

Contents

1	Introdução	12
2	Problema Modelo	15
2.1	Equação para o modelo reduzido de fratura exclusiva em alta e baixa permeabilidade	15
3	DG em problemas elípticos	23
3.1	Malhas	23
3.2	Espaços de Sobolev Particionados	24
3.3	Resultados da análise e propriedades de aproximação	27
3.4	Formulação Fraca do Problema Elíptico	29
3.5	Método de Galerkin Descontínuo para Problemas Elípticos em espaços de Sobolev Particionados	31
3.6	Problema modelo e Método de Galerkin Descontínuo para Problemas Elípticos em espaços de Sobolev Particionados unidimensionais	38
4	DG para problemas elípticos em meios porosos fraturados	42
4.1	Equação do Problema Modelo	42
4.2	Solução discreta do Problema Modelo	45
4.3	Continuidade e coercividade da formulação discreta	49
4.4	Estimativas de Erro	51
5	Implementação	57
5.1	Formulação Matricial	57
5.2	Implementação no Domínio Bidimensional	62
5.3	Implementação no Domínio Unidimensional	71
5.4	Implementação das condições de acoplamento	77
6	Resultados Numéricos	82
6.1	Análise de Convergência	82
6.2	Exemplo 1	85
6.3	Exemplo 2	88
6.4	Exemplo 3	91
7	Conclusões	94
8	Apêndice	95

1 Introdução

O estudo de métodos computacionais que permitem a simulação de fenômenos de fluxo, assume uma importância cada dia maior como instrumento capaz de prover soluções para problemas ambientais e energéticos, essencial nas atividades humanas, como a gestão de recursos hídricos, rastreamento de migração de petróleo, isolamento de rejeitos radioativos e contaminação de lençóis freáticos. Deste modo, a modelagem de fluxos em meios porosos fraturados, tornou-se uma ferramenta muito importante nas últimas décadas, conforme [ANTONIETTI et al. 2016]. Nessas aplicações, o fluxo é fortemente influenciado pela presença de fraturas, que podem agir como caminhos preferenciais, fazendo com que o fluido dirija-se para a fratura e, em seguida flui ao longo da fratura (quando sua permeabilidade é maior que a do meio circundante). Ou, ainda, como barreiras geológicas, onde o fluido evade a fratura (quando são preenchidas com material pouco permeável), como afirma [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005]. Uma fratura é definida como uma região caracterizada por uma pequena abertura em relação ao seu comprimento e tamanho do domínio, além de ter uma porosidade diferente do meio circundante.

Uma escolha comum de modelagem para esse tipo de problema consiste na utilização de modelos reduzidos, que tratam fraturas como interfaces $(d - 1)$ -dimensionais entre domínios porosos d -dimensionais, $d = 2; 3$. Mais detalhes relacionados a modelos reduzidos, aplicados a problemas envolvendo fraturas de largura muito pequena, podem ser obtidos nos artigos [SERRES et al. 2002], [ALBOIN et al. 2000] e [FRIH N.; ROBERTS 2008]. Por outro lado, o fluxo no meio poroso é governado pela lei de Darcy, e uma versão reduzida adequada desta lei é formulada na superfície que modela a fratura. Condições de acoplamento fisicamente consistentes são adicionadas para contabilizar a troca de fluido entre a fratura e o meio poroso, [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005]. Deste modo, uma equação de fluxo é obtida ao longo da interface que é acoplada com equações de fluxo nos subdomínios vizinhos. Este trabalho está baseado no modelo apresentado no artigo [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005], no qual trata o modelo de fratura única com alta e baixa permeabilidade em um meio poroso.

Por outra parte, os métodos numéricos para resolver este tipo de modelos, podem ser classificados de acordo com a condição (correspondência ou não) da malha computacional entre o domínio e a fratura. O propósito deste trabalho é justamente estender os já abordados modelos reduzidos de fluxo de Darcy em meios fraturados para o caso em que a malha do domínio e a malha de fratura coincidem. Uma abordagem tradicional que combina elementos

finitos mistos, e malhas no domínio em conformidade com a malha da fratura, é abordado por exemplo em [ALBOIN et al. 2000, FRIH N.; ROBERTS 2008, ANTONIETTI et al. 2016] . Já o uso de grades não acopladas, correspondentes ao Método de Elementos Finitos estendidos (XFEM), foi proposto em [FUMAGALLI A.; SCOTTI 2013, D'ANGELO C.; SCOTTI 2012].

Quando confrontado com a tarefa de resolver uma equação diferencial parcial computacionalmente, percebe-se rapidamente que existe um grande número de métodos diferentes para fazer isso. Considerando a natureza descontínua da solução na fratura, em relação ao domínio, as condições de acoplamento podem ser formuladas naturalmente usando operadores de salto e média, assim, os métodos de Galerkin descontínuo são ferramentas próprias para lidar, de forma eficiente, com nosso modelo diferencial. Os Métodos de Galerkin descontínuo em elementos finitos (em inglês, Discontinuous Galerkin Finite Element Method ou DGFEM) foram introduzidos pela primeira vez no início dos anos 1970 (ver, por exemplo [REED W.; HILL 1973, DOUGLAS J.; DUPONT 1976, BAKER 1977]) como uma técnica para resolver equações diferenciais parciais numericamente. Para equações elípticas de segunda ordem, foram apresentados termos na forma bilinear, que penalizam saltos da descontinuidade da solução numérica nas interfaces entre elementos, e impõe de maneira fraca as condições de fronteira (nós referimos [ARNOLD 1982], [WHEELER 1978] e [NITSCHKE 1971]). Assim, uma escolha correta no parâmetro de penalização pode garantir a coercividade da forma bilinear e, portanto, a estabilidade do método. Recentemente, vários autores desenvolveram DGFEM's para resolver problemas elípticos de segunda ordem, dentre os quais podemos destacar os métodos não-simétricos com penalização interior apresentados nos artigos [RIVIÈRE B.; WHEELER 2000] e [SÜLI E.;SCHAWB 2000], e os métodos simétricos de Galerkin descontínuo com penalização interior introduzidos em [ARNOLD 1982] e por [WHEELER 1978].

O objetivo deste trabalho é empregar o Método Galerkin descontínuo (DG) tanto no domínio quanto na fratura, para tratar numericamente o modelo de fratura única para alta e baixa permeabilidade, com uma correspondência na malha computacional fratura-domínio. Para fazer isso, os algoritmos, métodos e implementações Matlab descritos neste trabalho, foram desenvolvidos com base [HESTHAVEN J.; WARBURTON 2007].

A seguir apresentamos a estrutura deste trabalho.

No capítulo dois, abordamos o modelo de fratura exclusiva em alta e baixa permeabilidade para o problema de escoamento em meios porosos fraturados.

No terceiro capítulo, efetuamos um estudo da formulação do método de Galerkin des-

contínuo para a equação de Poisson. Apresentamos alguns resultados técnicos utilizados para garantir a existência e unicidade da solução do método, assim como estimativas de erro a priori. Dentre os resultados, vale ressaltar o teorema do traço, o teorema de Lax-Milgram e alguns teoremas de aproximação polinomial em espaços de Sobolev.

No quarto capítulo, dedicamo-nos à apresentação do método de Galerkin descontínuo para o problema elíptico, aplicado à modelagem do problema de escoamento em meios porosos fraturados. A partir dos estudos do terceiro capítulo, garantimos existência e unicidade da solução para a forma variacional discreta, gerada a partir de um conjunto de equações que modela o problema de escoamento em meios porosos fraturados e, assim, ao final desse capítulo, obtemos estimativas para o erro que garantem a convergência da solução discreta para a solução exata.

Após garantirmos a existência e unicidade da solução discreta para o problema elíptico que modela o problema de escoamento em meios porosos fraturados, no quinto capítulo, trataremos alguns detalhes relacionados com a implementação computacional. Para isso, começaremos com um olhar matricial do problema variacional discreto, o que vai nos guiar para as implementações tanto no domínio quanto na fratura nas seções 5.2, 5.3 e 5.4.

Por fim, no sexto capítulo, apresentamos uma série de experiências numéricas para analisar o desempenho do método Galerkin descontínuo.

2 Problema Modelo

O escoamento de um fluido através de um meio poroso fraturado d -dimensional, $d=2,3$, pode ser descrito pelas seguintes componentes:

1. a equação que determina o fluxo no meio poroso.
2. a equação que determina o fluxo na fratura.
3. um conjunto de condições que conectam os problemas de fluxo na fratura e no meio poroso.

Com base no trabalho de [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005], neste capítulo, efetuaremos um estudo detalhado das três componentes acima que determinam o modelo reduzido de fratura exclusivo para alta e baixa permeabilidade.

2.1 Equação para o modelo reduzido de fratura exclusiva em alta e baixa permeabilidade

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, com $d = 2, 3$, um aberto poligonal limitado e convexo e $\gamma = \partial\Omega$ a fronteira de Ω . Vamos assumir que o fluxo em Ω seja governado por uma equação de conservação, juntamente com a lei de Darcy, que relaciona o gradiente da pressão p e a velocidade de Darcy u , [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u) &= f, \text{ em } \Omega \\ u &= -K \nabla p, \text{ em } \Omega \\ p &= \bar{p}, \text{ sobre } \gamma, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

com $K \in \mathbb{R}^{d \times d}$ o tensor de condutividade hidráulica (ou permeabilidade), diagonal, cujas entradas $K_{jj}, j = 1, \dots, d$ são positivas, com K_{min} e $K_{max} > 0$, tal que:

$$0 < K_{min} \leq K_{jj} \leq K_{max}, j = 1, 2, \dots, d.$$

Ainda, seja f o termo de fonte e \bar{p} a pressão fornecida na fronteira γ .

Suponha, ainda, que existe um hiperplano Γ com o vetor unitário n_Γ ortogonal a Γ , de

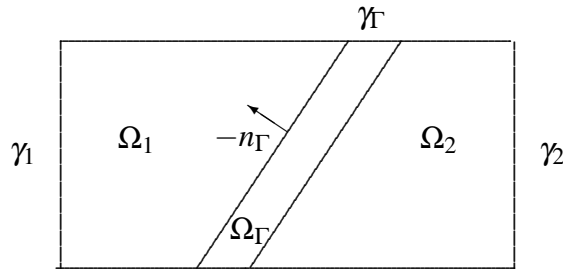


Figure 2.1.1: Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela fratura Ω_Γ .

tal modo que a fratura Ω_Γ é um subdomínio de Ω , dado por:

$$\Omega_\Gamma = \left\{ x \in \Omega : x = s + rn_\Gamma \text{ para algum } s \in \Gamma \text{ e } r \text{ no intervalo } \left(-\frac{l_\Gamma(s)}{2}, \frac{l_\Gamma(s)}{2} \right) \right\},$$

sendo que $l_\Gamma(s)$ denota a espessura da fratura em $s \in \Gamma$. Também assumimos que Ω_Γ separa Ω em dois subdomínios conexos e disjuntos, $\Omega \setminus \Omega_\Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, com n_1 e n_2 vetores normais unitários em Ω_1 e Ω_2 , tal que $n_\Gamma = n_1 = n_2$, como podemos observar na Figura 2.1.1. Denotamos por γ_i a parte da fronteira de Ω_i compartilhada com a fronteira de Ω , $i = 1, 2, \Gamma$, ou seja, $\gamma_i = \partial\Omega_i \cap \gamma$. Além disso, seja Γ_i a parte da fronteira de Ω_i compartilhada com a fratura Ω_Γ , $\Gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_\Gamma$ para $i=1,2$. Se denotamos por p_i , u_i , K_i , e f_i as restrições de p , u , K e f , respectivamente, sobre Ω_i , $i = 1, 2, \Gamma$, podemos reescrever o problema acima como o seguinte problema de transmissão:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_i) &= f_i, \text{ em } \Omega_i \quad i = 1, 2, \Gamma \\ u_i &= -K_i \nabla p_i, \text{ em } \Omega_i \\ p_i &= \bar{p}_i, \text{ sobre } \gamma_i \quad i = 1, 2, \Gamma \\ p_i &= p_\Gamma, \text{ sobre } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ u_i \cdot n &= u_\Gamma \cdot n \text{ sobre } \Gamma_i. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

No modelo apresentado por [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005], a fratura é tratada como uma interface entre os domínios Ω_1 e Ω_2 , como podemos observar na Figura 2.1.2. O modelo é obtido pela média ao longo dos segmentos de reta $[s - l_\Gamma(s)n, s + l_\Gamma(s)n]$, $s \in \Gamma$, normal a Γ . Neste trabalho, assumimos que $l_\Gamma(s) = l_\Gamma > 0$.

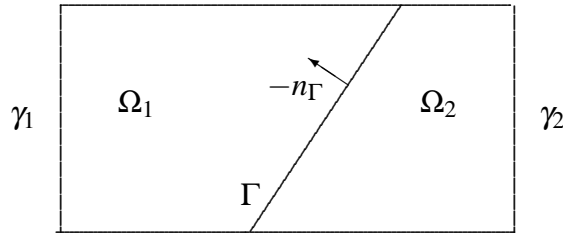


Figure 2.1.2: Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela interface Γ .

Começamos com o tratamento das leis de conservação, assim, vamos obter uma equação de conservação na superfície Γ , além de um termo de fonte que representa o fluxo dos subdomínios para a fratura. Decompondo a velocidade u_Γ como $u_\Gamma = u_{\Gamma,n} + u_{\Gamma,\tau}$, em que $u_{\Gamma,n}, u_{\Gamma,\tau}$ designam as componentes normal e tangencial, respectivamente. Ainda, ∇_τ e div_τ denotam os operadores tangenciais do gradiente e divergente, ∇_n e div_n os operadores normais. Temos para a primeira equação em (2.1.2) com $i = \Gamma$,

$$div_n u_\Gamma + div_\tau u_\Gamma = f_\Gamma \text{ em } \Omega_\Gamma.$$

Integrando na direção normal à fratura, obtém:

$$u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_2} - u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_1} + div_\tau U_\Gamma = F_\Gamma \text{ sobre } \Gamma, \quad (2.1.3)$$

onde os campos médios na direção normal são da forma

$$U_\Gamma = \int_{-l_\Gamma/2}^{l_\Gamma/2} u_{\Gamma,\tau} dn \quad e$$

$$F_\Gamma = \int_{-l_\Gamma/2}^{l_\Gamma/2} f_\Gamma dn.$$

Usando a continuidade dos fluxos através de Γ_1 e Γ_2 da última equação em (2.1.2), para $i=1$ e $i=2$, em (2.1.3), obtemos a equação de conservação na superfície Γ , com o termo fonte adicional $u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2}$,

$$div_\tau U_\Gamma = F_\Gamma + (u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2}) \text{ sobre } \Gamma. \quad (2.1.4)$$

A lei de Darcy é uma equação vetorial, a média das componentes tangenciais sobre Γ fornece uma lei de Darcy, que relaciona a componente tangencial do gradiente médio da pressão com a componente tangencial da velocidade média de Darcy. Assim, considerando a segunda equação em (2.1.2), sobre Γ , podemos escrever as parcelas normal e tangencial da velocidade da forma

$$u_{\Gamma,\tau} = -K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} p_{\Gamma} \text{ em } \Omega_{\Gamma} \text{ e} \quad (2.1.5)$$

$$u_{\Gamma,n} = -K_{\Gamma}^n \nabla_n p_{\Gamma} \text{ em } \Omega_{\Gamma}, \quad (2.1.6)$$

aqui $K_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$ e K_{Γ}^n representam as componentes tangencial e normal do tensor de permeabilidade K na fratura Ω_{Γ} . Integrando a equação (2.1.5) na direção normal à fratura, obtemos:

$$U_{\Gamma,\tau} = -K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} l_{\Gamma} \nabla_{\tau} P_{\Gamma} \text{ sobre } \Gamma \quad (2.1.7)$$

em que $P_{\Gamma} = \frac{1}{l_{\Gamma}} \int_{-l_{\Gamma}}^{l_{\Gamma}} p_{\Gamma} dn$ e $K_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$ é assumida constante ao longo da abertura. A equação acima é a lei de Darcy ao longo da interface (d-1) dimensional.

Para construir condições de acoplamento que permitem uma diferença de pressão de um lado de Ω_{Γ} para o outro, a lei de Darcy na forma da componente normal, equação (2.1.6), será reformulada. Assim, integrando (2.1.6), obtemos:

$$\int_{-l_{\Gamma}}^{l_{\Gamma}} u_{\Gamma,n} dn = -K_{\Gamma}^n (p_{\Gamma}|_{\Gamma_2} - p_{\Gamma}|_{\Gamma_1}). \quad (2.1.8)$$

A integral acima pode ser aproximada usando a regra do trapézio,

$$\int_{-l_{\Gamma}}^{l_{\Gamma}} u_{\Gamma,n} dn \approx \frac{l_{\Gamma}}{2} (u_{\Gamma} \cdot n_2|_{\Gamma_2} + u_{\Gamma} \cdot n_1|_{\Gamma_1}) = \frac{l_{\Gamma}}{2} (u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2}),$$

na qual empregamos a continuidade do fluxo através de Ω_1 e Ω_2 , dada na quinta equação em (2.1.2). Explorar a continuidade das pressões em Γ_1 e Γ_2 , e a quarta equação em (2.1.2), permite-nos aproximar a equação (2.1.6), como

$$u_1 \cdot n|_{\Gamma_1} - u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} = \dot{\beta}_{\Gamma} (p_1|_{\Gamma_1} - p_2|_{\Gamma_2}), \quad (2.1.9)$$

sendo que

$$\dot{\beta}_{\Gamma} = \frac{2K_{\Gamma}^n}{l_{\Gamma}}$$

denota o parâmetro resistividade da fratura. A equação acima relaciona o salto da pressão com a velocidade de Darcy e, com ela, chegamos à primeira equação de acoplamento para nosso problema modelo.

Para fechar o sistema na interface Γ , necessitamos ainda uma última equação para o perfil da pressão na direção normal à fratura [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005]. Consideramos a pressão média P_Γ equivalente à média das pressões nos limites Γ_1 e Γ_2 ,

$$p_1|_{\Gamma_1} + p_2|_{\Gamma_2} = 2P_\Gamma. \quad (2.1.10)$$

Deste modo, para representar $p_1|_{\Gamma_1}$ e $p_2|_{\Gamma_2}$ em função da pressão média em (2.1.9), temos:

$$(p_2|_{\Gamma_2} - p_1|_{\Gamma_1}) = \frac{1}{\dot{\beta}_\Gamma} (u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} - u_1 \cdot n|_{\Gamma_1}). \quad (2.1.11)$$

Somando e subtraindo (2.1.11) e (2.1.10),

$$\begin{aligned} 2\dot{\beta}_\Gamma p_1|_{\Gamma_1} &= -(u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} - u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1}) + 2\dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma \\ 2\dot{\beta}_\Gamma p_2|_{\Gamma_2} &= (u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} - u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1}) + 2\dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma, \end{aligned}$$

obtendo, assim:

$$-\frac{1}{2}u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + \dot{\beta}_\Gamma p_1|_{\Gamma_1} = -\frac{1}{2}u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + \dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma \quad (2.1.12)$$

$$-\frac{1}{2}u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + \dot{\beta}_\Gamma p_2|_{\Gamma_2} = -\frac{1}{2}u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + \dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma. \quad (2.1.13)$$

O resultado anterior descreve a pressão descontínua na interface como função da pressão média e a velocidade normal de Darcy nos limites Γ_1 e Γ_2 , chegando à segunda equação de acoplamento.

A seguir, apresentamos outras duas representações para a segunda equação de acoplamento .

Se aproximarmos o valor de p_Γ e $u_{\Gamma,n}$ no centro da fratura por P_Γ e pelo fluxo médio $\frac{u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_1} + u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_2}}{2}$, respectivamente, ao integrar a equação (2.1.6), obtemos

$$\int_0^{l_\Gamma} u_{\Gamma,n} dn = -K_\Gamma^n (p_\Gamma|_{\Gamma_2} - P_\Gamma), \quad (2.1.14)$$

novamente, a integral acima pode ser aproximada usando a regra do trapézio,

$$\int_0^{l_\Gamma} u_{\Gamma,n} dn \approx \frac{l_\Gamma}{4} (u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_2} + \frac{u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_1} + u_\Gamma \cdot n|_{\Gamma_2}}{2}) = \frac{l_\Gamma}{4} \left(\frac{3u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} + u_1 \cdot n|_{\Gamma_1}}{2} \right),$$

obtendo-se:

$$\frac{1}{4} (3u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} + u_1 \cdot n|_{\Gamma_1}) = -\dot{\beta}_\Gamma (p_\Gamma|_{\Gamma_2} - P_\Gamma). \quad (2.1.15)$$

Analogamente para

$$\int_{-l_\Gamma}^0 u_{\Gamma,n} dn = -K_\Gamma^n (P_\Gamma - p_\Gamma|_{\Gamma_1}),$$

temos

$$\frac{1}{4} (u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} + 3u_1 \cdot n|_{\Gamma_1}) = -\dot{\beta}_\Gamma (P_\Gamma - p_\Gamma|_{\Gamma_1}). \quad (2.1.16)$$

Reescrevendo as equações acima, temos:

$$-\frac{3}{4} u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + \dot{\beta}_\Gamma p_1|_{\Gamma_1} = -\frac{1}{4} u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + \dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma \quad \text{e} \quad (2.1.17)$$

$$-\frac{3}{4} u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + \dot{\beta}_\Gamma p_2|_{\Gamma_2} = -\frac{1}{4} u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + \dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma, \quad (2.1.18)$$

em que, novamente, é a descrição para a pressão na interface, em termos da pressão média nos limites Γ_1 e Γ_2 , outra possibilidade para a segunda equação de acoplamento.

Se somarmos as equações (2.1.17) e (2.1.18), temos:

$$-\dot{\beta}_\Gamma (p_1|_{\Gamma_1} + p_2|_{\Gamma_2} - 2P_\Gamma) = \frac{1}{2} (u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} - u_1 \cdot n|_{\Gamma_1}) \quad (2.1.19)$$

ou, combinando-as, obtemos:

$$u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} = -\frac{K_\Gamma^n}{l_\Gamma} (4P_\Gamma - 3p_1|_{\Gamma_1} - p_2|_{\Gamma_2}) \quad (2.1.20)$$

$$u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} = -\frac{K_\Gamma^n}{l_\Gamma} (4P_\Gamma - p_1|_{\Gamma_1} - 3p_2|_{\Gamma_2}). \quad (2.1.21)$$

Considerando que P_Γ é uma média entre p_1 e p_2 , tal como em (2.1.14), obtemos:

$$u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} = -\dot{\beta}_\Gamma (P_\Gamma - p_\Gamma|_{\Gamma_1}) \quad e \quad (2.1.22)$$

$$u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_1} = -\dot{\beta}_\Gamma (P_\Gamma - p_2|_{\Gamma_2}). \quad (2.1.23)$$

Emergindo, assim, uma terceira possibilidade para a segunda equação de acoplamento.

As três alternativas postuladas para a forma do perfil de pressão na fratura, (2.1.12)-(2.1.13), (2.1.17)-(2.1.18) e (2.1.22)-(2.1.23), podem ser vistas de uma forma geral em termos do parâmetro ξ em [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005] da forma

$$-\xi u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + \dot{\beta}_\Gamma p_1|_{\Gamma_1} = -(1 - \xi) u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + \dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma \quad e \quad (2.1.24)$$

$$-\xi u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + \dot{\beta}_\Gamma p_2|_{\Gamma_2} = -(1 - \xi) u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + \dot{\beta}_\Gamma P_\Gamma, \quad (2.1.25)$$

para os valores $\xi = 1/2$, $\xi = 3/4$ e $\xi = 1$, respectivamente.

Assim, se somarmos as equações acima e assumirmos que $\xi \neq \frac{1}{2}$, obtemos a segunda condição de acoplamento (ou de Robin),

$$\frac{\dot{\beta}_\Gamma}{2\xi - 1} (p_1|_{\Gamma_1} + p_2|_{\Gamma_2} - 2P_\Gamma) = (u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1}), \quad (2.1.26)$$

implementada neste trabalho.

Por fim, concluímos esse capítulo com apresentação do modelo reduzido de fratura exclusiva para alta e baixa permeabilidade

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u_i) &= f_i, & \text{em } \Omega_i \quad i = 1, 2 \\ u_i &= -K_i \nabla p_i, & \text{em } \Omega_i \quad i = 1, 2 \\ p_i &= \bar{p}_i, & \text{sobre } \gamma_i \quad i = 1, 2 \\ \operatorname{div}_\tau U_\Gamma &= F_\Gamma + (u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} + u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2}) \quad \text{sobre } \Gamma \\ U_{\Gamma, \tau} &= -K_\Gamma^\mathcal{F} l_\Gamma \nabla_\tau P_\Gamma & \text{sobre } \Gamma \\ p_i &= P_\Gamma, & \text{sobre } \Gamma_i \quad i = 1, 2 \\ u_1 \cdot n|_{\Gamma_1} - u_2 \cdot n|_{\Gamma_2} &= \dot{\beta}_\Gamma (p_1|_{\Gamma_1} - p_2|_{\Gamma_2}) & \text{em } \Gamma \\ u_2 \cdot n_2|_{\Gamma_2} + u_1 \cdot n_1|_{\Gamma_1} &= \frac{\dot{\beta}_\Gamma}{2\xi - 1} (p_1|_{\Gamma_1} + p_2|_{\Gamma_2} - 2P_\Gamma), \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

onde a quarta e quinta equação representam a lei de conservação e de Darcy, respectivamente, na interface Γ ; já a sétima e a oitava equações representam as condições de acoplamento.

3 DG em problemas elípticos

Com o objetivo de discretizar o modelo reduzido (2.1.27) para encontrar uma solução numérica, neste capítulo apresentamos resultados que garantem existência e unicidade de uma solução do método de Galerkin Descontínuo para um problema elíptico.

Na primeira seção definimos uma malha sobre um domínio aberto em \mathbb{R}^d , com $d \geq 2$. Na seção 3.2, efetuamos uma introdução aos espaços de Sobolev Particionados. Na seção 3.3, relembremos alguns resultados importantes da Análise e da aproximação polinomial, bem como o teorema de Lax-Milgram, que garante a existência e unicidade de solução do método de Galerkin Descontínuo aqui apresentado. A seguir, na seção 3.4, obtemos um problema variacional do problema elíptico modelo, para na seção 3.5 gerar um problema discreto, e garantir a existência e unicidade da solução com base na continuidade e coercividade da forma bilinear do problema discreto. Enfim, efetuamos uma apresentação do método de Galerkin Descontínuo para problemas elípticos unidimensionais.

3.1 Malhas

Seja Ω um domínio limitado e aberto em \mathbb{R}^d com $d \geq 2$. Um conjunto de pontos $\{a_0, a_1, \dots, a_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ é não degenerado se não pertence a um subespaço de \mathbb{R}^d de dimensão $d-1$. Chamamos de conjunto simplex o conjunto

$$T = \{\lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_d a_d \mid \lambda_i \geq 0 \text{ e } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_d = 1\},$$

com $\{a_0, a_1, \dots, a_d\}$ um conjunto de vértices não degenerado. Chamamos face de T o sub-simplex gerado por seus vértices.

Consideremos como partição de Ω (malha simplicial) um conjunto finito de simplex fechados de dimensão d . Denotamos por $\{\mathcal{T}_h\}$ ($h \geq 0$) uma família de partições de Ω composta por elementos T_i tal que:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h} T \quad \text{com} \quad T_i^\circ \cap T_j^\circ = \emptyset.$$

Uma malha simplicial chama-se conforme, se a intersecção entre dois elementos é uma face, um vértice ou vazio.

Do exposto, apresentaremos as seguintes definições. Seja $T \in \mathcal{T}_h$ com \mathcal{T}_h uma malha simplicial de Ω .

- $h_T = \max_{x,y \in T} |x - y|$ (Diâmetro de T)
- $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ (Diâmetro de \mathcal{T}_h)
- $\mathfrak{S}_h(\Omega)$ – conjunto de todas as faces E de todos os elementos $T \in \mathcal{T}_h$
- $\mathfrak{S}_h^I(\Omega) = \{E \in \mathfrak{S}_h | \exists T_L \text{ e } T_R \in \mathcal{T}_h : E = T_L \cap T_R\}$
- $\mathfrak{S}_h^f(\Omega) = \{E \in \mathfrak{S}_h | \exists T \in \mathcal{T}_h : E = T \cap \partial\Omega\}$
- $\mathcal{T}(E) = \{T \in \mathcal{T}_h | E \in \partial T\}$

Definição 3.1.1. *Seja $E \in \mathfrak{S}_h$, vamos definir o vetor normal \vec{n}_E da seguinte forma:*

- *Se $E \in \mathfrak{S}_h^I$ existem $T_L, T_R \in \mathcal{T}_h$ tal que $E = T_L \cap T_R$; \vec{n}_E é um vetor normal a E apontando de T_L para T_R .*
- *Se $E \in \mathfrak{S}_h^f$; \vec{n}_E é o vetor normal unitário a $\partial\Omega$.*

A escolha da direção de \vec{n}_E em arestas interiores, depende da escolha de T_L e T_R . Na prática esta escolha é feita usando numeração dos elementos da malha.

Definição 3.1.2. *Uma família de malhas \mathcal{T}_h ($h > 0$), chama-se shape-regular, se $\exists C_\rho > 0$ que não depende de h , tal que:*

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq C_\rho \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.1.1)$$

com ρ_T o raio da maior bola inscrita no elemento T .

Lema 3.1.1. *Seja \mathcal{T}_h ($h > 0$) uma família shape-regular de malhas em Ω . Então é válida a desigualdade de equivalência:*

$$C_{\mathfrak{S}} h_T \leq h_E \leq h_T \quad \forall E \in \partial T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.1.2)$$

sendo $C_{\mathfrak{S}}$ uma constante maior que zero que não depende de h , h_E (medida da aresta E).

3.2 Espaços de Sobolev Particionados

Consideremos agora u uma função real sobre o domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Para $1 \leq p < \infty$, dizemos que $L^p(\Omega)$ é o conjunto das funções u tal que $|u|^p$ é integrável em Ω no sentido de

Lebesgue; chamaremos $L^p(\Omega)$ do Conjunto das Funções Lebesgue-Integráveis. Temos que $L^p(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \right)^{1/p}$$

é um espaço de Banach. Em particular para $p = 2$, $L^2(\Omega)$ dotado com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v \, dx \quad (3.2.1)$$

é um espaço de Hilbert.

Seja \mathbb{N} o conjunto dos números inteiros positivos. Uma n -úpla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ em \mathbb{N}^n é chamado um multi-índice, com $\|\alpha\| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ o comprimento de α . Assim, definimos $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, em que $\partial_j = \partial / \partial x_j$ para $j = 1, \dots, n$.

Deste modo e seguindo a estrutura apresentada em [HESTHAVEN J.; WARBURTON 2007], o espaço de Sobolev de ordem k , é definido como:

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

Quando $p=2$ designamos W_p^k por $H^k(\Omega)$, munido com a norma,

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

e a semi-norma

$$|u|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

O lema a seguir, o qual relaciona a norma em $L^2(\Omega)$ e a semi-norma em $H^1(\Omega)$, será usado no decorrer deste trabalho. Para declarar o lema, damos a seguinte definição.

Definição 3.2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d=2,3$. Dizemos que $\partial\Omega$ é lipschitz se existe uma cobertura $\{M_i\}$ em \mathbb{R}^d , finita e aberta de $\partial\Omega$ tal que, cada $\partial\Omega \cap M_i$ pode ser apresentado como uma função lipschitz no item de coordenadas.*

Lema 3.2.1. *(Desigualdade de Poincaré-Friedrich) Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um domínio limitado com a fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz por partes. Então existe uma constante $C_\Omega \in \mathbb{R}$ maior que zero, que depende só de Ω , tal que se $u \in H_0^1(\Omega)$, aqui $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\}$, vale a seguinte*

desigualdade:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega} |u|_{H^1(\Omega)}.$$

Continuando, damos lugar ao chamado espaço de Sobolev particionado

$$H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{V \in L^2 \mid V|_T \in H^s(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\},$$

equipado com a seguinte norma:

$$\|u\|_{H^k(\Omega, \mathcal{T}_h)} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|u\|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2},$$

e a semi-norma

$$|u|_{H^k(\Omega, \mathcal{T})} = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} |u|_{H^k(T)}^2 \right)^{1/2}.$$

Para encontrar uma solução aproximada pelo método de Galerkin Descontínuo, usaremos aproximações polinomiais por partes, em geral descontínuas nas interfaces entre elementos vizinhos.

Definimos para o vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ em \mathbb{R}^d e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$,

$$\mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d) = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha} x^{\alpha} \mid x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d} \text{ e } a_{\alpha} \in \mathbb{R} \right\},$$

como sendo o conjunto de todos os polinômios de ordem menor ou igual a $k=0,1,2,\dots$ sobre \mathbb{R}^d .

Chegando à definição do espaço de funções polinomiais descontínuas por partes:

$$\mathbb{P}_k(T) = \{P|_T \mid P \in \mathbb{P}_k(\mathbb{R}^d)\}$$

$$V_h^p = \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_p(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.2.2)$$

em que p é o grau de aproximação polinomial.

Vamos introduzir alguns operadores de traço que irão nos auxiliar na manipulação dos fluxos numéricos. Para qualquer face $E \in \mathfrak{S}_h^I$, seja T_L e T_R os elementos que compartilham a face E (isto é, $T_L \cap T_R = E$). Seja v uma função vetorial, definimos o salto através de E e o valor médio sobre E por:

$$[[v]] = v_L - v_R, \quad \{v\} = \frac{(v_L + v_R)}{2},$$

por conveniência estendemos as definições de salto e valor médio para as faces $E \in \mathfrak{S}_h^f$ como:

$$[[v]] = v|_E n, \quad \{v\} = v|_E$$

3.3 Resultados da análise e propriedades de aproximação

Apresentamos nesta seção alguns resultados da análise e propriedades de aproximação que serão usadas no decorrer deste trabalho. Inicialmente a desigualdade multiplicativa do traço e a desigualdade Inversa, continuando com o teorema de Lax-Milgram, terminando com alguns resultados teóricos sobre aproximação polinomial, que usaremos para estabelecer estimativas de erro *a priori* para o método de Galerkin descontínuo. A demonstração dos lemas e teoremas apresentada nesta seção pode ser encontrada [DOLEJŠÍ V.; FEISTAUER 2015]. Para o teorema de Lax-Milgram veja teorema 1.1.3 em [CIARLET P.; ODEN 1978].

Lema 3.3.1. (*Desigualdade Multiplicativa do traço*). Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família Shape-regular de malhas em Ω . Então $\exists c > 0$, que não depende de h , tal que se $v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 1/2$, obtemos:

$$\|v\|_{L^2(\partial T)}^2 \leq c \left(\frac{1}{h_T} \|v\|_{L^2(T)}^2 + \|v\|_{L^2(T)} \|\nabla_h v\|_{L^2(T)} \right),$$

com $T \in \mathcal{T}_h$, h_T seu diâmetro e ∇_h o gradiente sobre a partição \mathcal{T}_h .

Lema 3.3.2. (*Desigualdade Inversa*). Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família Shape-regular de malhas em Ω . Então $\exists \hat{C} > 0$, que não depende de h , mas depende de constante de regularidade ρ , tal que se $v \in V_h^p$, então:

$$\|\nabla_h v\|_{L^2(T)} \leq \hat{C} \frac{p^2}{h_T} \|v\|_{L^2(T)},$$

sendo $T \in \mathcal{T}_h$ e h_T seu diâmetro.

Teorema 3.3.1. (*Lax-Milgram*) seja V um espaço de Hilbert, com produto interno $(\cdot, \cdot)_V$, e norma $|\cdot|_V$, $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear em V e $L(\cdot)$ uma forma linear em V . Suponha que:

1. $a(\cdot, \cdot)$ é contínua em V , isto é:

$$\exists c > 0; |a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall v, u \in V.$$

2. $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva em V , ou seja,

$$\exists \alpha > 0; |a(u, u)| \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

3. $L(\cdot)$ um funcional linear e contínuo em V , ou seja,

$$\exists \beta \geq 0; |L(v)| \leq \beta \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V,$$

então $\exists! u \in V$, que é solução do problema variacional,

$$a(u, v) = L(u), \quad \forall u \in v$$

e é válida a estimativa

$$\|u\|_V \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Observação 3.3.1. O espaço $H^k(\Omega)$ definido na seção 3.2, é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por:

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{\alpha \leq k} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Para efetuar a análise de erro do método numérico, introduzimos o interpolador π_T^P . Seja \mathcal{T}_h uma família Shape-regular de malhas em Ω . Para cada $T \in \mathcal{T}_h$, definimos o interpolador $\pi_T^P : H^s(T) \rightarrow \mathbb{P}_p(T)$ tal que :

$$\langle v - \pi_T^P(v), w \rangle_{L^2(T)} = 0 \quad \forall w \in \mathbb{P}_p(T).$$

Os resultados a seguir fornecem estimativas de erro para o interpolador, nós referenciamos [DOLEJŠÍ V.; FEISTAUER 2015], seção 1.5.3.

Lema 3.3.3. Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família Shape-regular de malhas em $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Então $\forall v \in H^s(T)$ existe $c > 0$, independente de v , p e h tal que:

$$\begin{aligned} |v - \pi_T^P(v)|_{H^q(T)} &\leq c \frac{h_T^{\mu-q}}{p^{s-q}} |v|_{H^s(T)} \quad 0 \leq q \leq s \\ \|v - \pi_T^P(v)\|_{L^2(\partial T)} &\leq \frac{h_T^{\mu-1/2}}{p^{s-1/2}} |v|_{H^s(T)} \\ \|\nabla(v - \pi_T^P(v))\|_{L^2(\partial T)} &\leq \frac{h_T^{\mu-3/2}}{p^{s-5/2}} |v|_{H^s(T)}, \end{aligned}$$

sendo $\mu = \min(p+1, s)$ e $T \in \mathcal{T}_h$.

Extendendo o interpolador local $\pi_T^p(\cdot)$ como sendo zero fora de T , para todo $T \in \mathcal{T}_h$, podemos definir o seguinte interpolador global $\Pi_h^p : H^s(\Omega, \mathcal{T}_h) \rightarrow V_h^p$ como:

$$\Pi_h^p(u) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \pi_T^p(u|_T), \quad \text{com } u \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$$

com $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e V_h^p definidos na seção 3.2.

Similarmente para o interpolador global π_h^p , temos estimativas de erro apresentadas no seguinte teorema:

Teorema 3.3.2. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família Shape-regular de malhas em Ω . Então $\forall v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$ existe $c > 0$, independente de v , p e h tal que:*

$$\begin{aligned} |v - \Pi_h^p(v)|_{H^q(\Omega, \mathcal{T}_h)} &\leq c \frac{h^{\mu-q}}{p^{s-q}} |v|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)} \quad 0 \leq q \leq s \\ \|v - \Pi_h^p(v)\|_{L^2(\mathcal{S}_h)} &\leq \frac{h^{\mu-1/2}}{p^{s-1/2}} |v|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)} \\ \|\nabla(v - \Pi_h^p(v))\|_{L^2(\mathcal{S}_h)} &\leq \frac{h^{\mu-3/2}}{p^{s-5/2}} |v|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}, \end{aligned}$$

sendo $\mu = \min(p+1, s)$.

3.4 Formulação Fraca do Problema Elíptico

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um domínio poligonal. Vamos supor que $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ tal que $\partial\dot{\Omega}_D \cap \partial\dot{\Omega}_N = \emptyset$. Consideremos o seguinte problema de fronteira mista:

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \Omega \tag{3.4.1}$$

$$u|_{\partial\Omega_D} = g_D, \quad \vec{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega_N} = g_N.$$

Dados os conjuntos

$$H_D^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u|_{\partial\Omega_D} = g_D\}$$

$$H_{D_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) | u|_{\partial\Omega_D} = 0\}$$

e $u \in H^2(\Omega)$ uma solução de (3.4.1), inferimos:

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Omega).$$

Pelo Teorema de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} (\vec{n} \cdot \nabla u)v = \int_{\Omega} f v.$$

Como $v \in H_{D_0}^1(\Omega)$, obtemos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega_N} (\vec{n} \cdot \nabla u)v = \int_{\Omega} f v,$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega_N} (\vec{n} \cdot \nabla u)v$$

e lembrando que $\vec{n} \cdot \nabla u|_{\partial\Omega_N} = g_N$, Temos:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega_N} g_N v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Omega). \quad (3.4.2)$$

Esta última equação fornece uma outra maneira de olhar para o problema modelo, permitindo assim chegar à seguinte definição variacional.

Definição 3.4.1. Dizemos que $u \in H_D^1(\Omega)$ é uma solução fraca do problema misto (3.4.1) se:

$$B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Omega) \quad (3.4.3)$$

com

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v,$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega_N} g_N v.$$

3.5 Método de Galerkin Descontínuo para Problemas Elípticos em espaços de Sobolev Particionados

Primeiramente introduzimos as seguintes denotações de integrais sobre uma malha \mathcal{T}_h em Ω .

$$\int_{\mathcal{M}} v = \sum_{T \in \mathcal{M}} \int_T v \quad \forall \mathcal{M} \subset \mathcal{T}_h,$$

$$\int_{\mathcal{N}} v = \sum_{E \in \mathcal{N}} \int_E v \quad \forall \mathcal{N} \subset \mathfrak{S}_h$$

e definimos:

$$H_D^1(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{u \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) | u|_{\partial\Omega_D} = g_D\},$$

$$H_{D_0}^1(\Omega, \mathcal{T}_h) = \{u \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h) | u|_{\partial\Omega_D} = 0\}.$$

O que permite obter a seguinte identidade, a partir da equação (3.4.1),

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla u \cdot \nabla_h v - \int_{\partial T} (\vec{n}_T \cdot \nabla u) v \right) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Omega, \mathcal{T}_h), \quad (3.5.1)$$

com $f \in L^2$ e $u \in H^2(\Omega)$ e \vec{n}_T o vetor externo à fronteira do elemento T com normal unitária.

O lema a seguir, relaciona os operadores salto e valor médio definidos na seção 3.2, com a integral no extremo de cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$ na identidade anterior.

Lema 3.5.1. (*Decomposição de fluxos*) Para $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $v \in H^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$, temos:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\vec{n}_T \cdot \nabla u) v = \int_{\mathfrak{S}_h} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [[v]] + \int_{\mathfrak{S}_h^I} [\vec{n} \cdot \nabla_h u] \{v\}. \quad (3.5.2)$$

Proof.

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial T} (\vec{n}_T \cdot \nabla u) v = \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I} \int_E (\vec{n}_L \cdot \nabla_h u_L) v|_L + (\vec{n}_R \cdot \nabla_h u_R) v|_R + \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^f} \int_E (\vec{n} \cdot \nabla_h u) v,$$

já que $\vec{n}|_R = -\vec{n}|_L$, temos:

$$\sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I} \int_E (\vec{n}_L \cdot \nabla_h u_L) v|_L + (\vec{n}_R \cdot \nabla_h u_R) v|_R = \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I} \int_E (\vec{n} \cdot \nabla_h u_L) v|_L - (\vec{n} \cdot \nabla_h u_R) v|_R.$$

Lembrando as definições dos operadores salto e valor médio, e a propriedade algébrica

$$ab - cd = \frac{1}{2}(a+c)(b-d) + \frac{1}{2}(a-c)(b+d),$$

concluimos:

$$\sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I} \int (\vec{n}_L \cdot \nabla_h u_L)v|_L + (\vec{n}_R \cdot \nabla_h u_R)v|_R = \int_{\mathfrak{S}_h^I} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [[v]] + [[\vec{n} \cdot \nabla_h u]] \{v\}.$$

Finalmente conseguindo:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int (\vec{n}_T \cdot \nabla u)v = \int_{\mathfrak{S}_h^I} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [[v]] + [[\vec{n} \cdot \nabla_h u]] \{v\} + \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^f} \int (\vec{n} \cdot \nabla_h u)v.$$

■

Assim podemos reescrever a equação (3.5.1) do seguinte modo:

$$\int_{\mathcal{T}_h} \nabla u \cdot \nabla_h v - \int_{\mathfrak{S}_h} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [v] - \int_{\mathfrak{S}_h^I} [[\vec{n} \cdot \nabla_h u]] \{v\} = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Omega, \mathcal{T}_h),$$

com $f \in L^2$ e $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$.

Se assumimos que $u \in H^2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ temos,

$$[[u]]_E = 0 \text{ e } [[\nabla u]]_E = 0 \text{ para todo } E \in \mathfrak{S}_h^I. \quad (3.5.3)$$

Desta maneira chegamos a uma primeira discretização do problema modelo pelo método DG:

$$\int_{\mathcal{T}_h} \nabla u \cdot \nabla_h v - \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [v] = \int_{\Omega} f v + \int_{\mathfrak{S}_h^N} g_N v \quad v \in H_{D_0}^1(\Omega, \mathcal{T}_h) \quad (3.5.4)$$

, com $\mathfrak{S}_h = \mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D \cup \mathfrak{S}_h^N$, onde \mathfrak{S}_h^D e \mathfrak{S}_h^N descrevem as faces na fronteira com condição de Dirichlet e Neumann respectivamente.

A fim de garantir a existência de uma única solução por meio do teorema de Lax-Milgram (3.3.1), usamos a equação (3.5.3) e acrescentamos na formulação (3.5.4) termos de

simetrização e estabilização como segue:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{T}_h} \nabla u \cdot \nabla_h v - \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} (\{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}[[v]] + \theta \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\}[[u]] + \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \sigma[[u]][[v]]) \\ &= \int_{\Omega} f v + \int_{\mathfrak{S}_h^N} g_N v - \int_{\mathfrak{S}_h^D} \theta \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\}[[u]] + \int_{\mathfrak{S}_h^D} \sigma[[u]][[v]]. \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

Obtendo assim o Método de Galerkin Descontínuo com penalização Interior, onde $\theta = -1, 0, 1$, e $\sigma : \mathfrak{S}_h \implies \mathbb{R}$ o parâmetro de penalidade, tal que $\sigma(E) = \sigma_E > 0$.

Para efeitos deste trabalho vamos tomar $\theta = 1$, o que corresponde ao chamado Método de Galerkin Descontínuo com penalização interior simétrico (SIPDG).

Para fins de cálculo, reduziremos nosso problema modelo. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ um domínio poligonal. Vamos supor que $\partial\Omega = \partial\Omega_D$, consideremos :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega_D} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

Assim pelo método SIPDG em (3.5.5) e a reformulação do problema modelo (3.5.6), chegamos ao seguinte definição variacional.

Definição 3.5.1. *Seja \mathcal{T}_h uma triangulação em Ω . Chama-se $u \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 3/2$, uma solução fraca particionada do problema (3.5.6) se:*

$$\hat{B}(u, v) = \hat{F}(v), \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Omega, \mathcal{T}_h)$$

com

$$\begin{aligned} \hat{B}(u, v) &= \int_{\mathcal{T}_h} \nabla_h u \cdot \nabla_h v - \int_{\mathfrak{S}_h} (\{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}[[v]] + \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\}[[u]]) + \int_{\mathfrak{S}_h} \sigma[[u]][[v]], \\ \hat{F}(v) &= \int_{\Omega} f v. \end{aligned}$$

Vamos dotar o espaço $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 3/2$ da seguinte norma,

$$\| \| u \| \|_h^2 = \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 + \int_{\mathfrak{S}_h} \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 + \int_{\mathfrak{S}_h} \sigma[[u]]^2. \quad (3.5.7)$$

O problema discreto correspondente ao problema variacional acima é definido da seguinte maneira:

Definição 3.5.2. *Seja \mathcal{T}_h uma triangulação em Ω . O método SIPDG (Symmetric Interior Penalty Discontinuous Galerkin) para o problema (3.5.6) formula-se assim:*

encontre $u \in V_h^p$ tal que :

$$\hat{B}_h(u, v) = \hat{F}_h(v) \quad \forall v \in V_h^p$$

com

$$\begin{aligned} \hat{B}_h(u, v) &= \int_{\mathcal{T}_h} \nabla_h u \cdot \nabla_h v - \int_{\mathfrak{S}_h} (\{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}[[v]] + \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\}[[u]]) + \int_{\mathfrak{S}_h} \sigma[[u]][[v]], \\ \hat{F}_h(v) &= \int_{\Omega} f v. \end{aligned}$$

O resultado que apresentamos a seguir garante a continuidade da forma bilinear $\hat{B}_h(\cdot, \cdot)$ em relação à norma (3.5.7).

Teorema 3.5.1. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas em Ω . A forma bilinear $\hat{B}_h(\cdot, \cdot)$ é contínua em $H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 3/2$ com a norma $|||\cdot|||_h$.*

Proof. Seja $u, v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, temos:

$$|\hat{B}_h(u, v)| \leq \left| \int_{\mathcal{T}_h} \nabla_h u \cdot \nabla_h v \right| + \left| \int_{\mathfrak{S}_h} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}[[v]] \right| + \left| \int_{\mathfrak{S}_h} \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\}[[u]] \right| + \left| \int_{\mathfrak{S}_h} \sigma[[u]][[v]] \right|. \quad (3.5.8)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, segue,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla_h u \cdot \nabla_h v \right| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla_h u \cdot \nabla_h v| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T |\nabla_h u|^2 \right)^{1/2} \left(\int_T |\nabla_h v|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla_h u|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T |\nabla_h v|^2 \right)^{1/2} \leq |||u|||_h |||v|||_h. \end{aligned}$$

Para o último termo na desigualdade (3.5.8), obtemos:

$$\left| \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \int_E \sqrt{\sigma}[[u]] \sqrt{\sigma}[[v]] \right| \leq \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \left(\int_E \sigma[[u]]^2 \right)^{1/2} \left(\int_E \sigma[[v]]^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int_{\mathfrak{S}_h} \sigma[[u]]^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathfrak{S}_h} \sigma[[v]]^2 \right)^{1/2} \leq \|u\|_h \|v\|_h,$$

ademais

$$\begin{aligned} \left| \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \int_E \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [[v]] \right| &\leq \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \left| \int_E \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} \sqrt{\sigma} [[v]] \right| \leq \sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \left(\int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \right)^{1/2} \left(\int_E \sigma [[v]]^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{E \in \mathfrak{S}_h} \int_E \sigma [[v]]^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\mathfrak{S}_h} \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathfrak{S}_h} \sigma [[v]]^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_h \|v\|_h. \end{aligned}$$

E assim também

$$\left| \int_{\mathfrak{S}_h} \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\} [[u]] \right| \leq \|u\|_h \|v\|_h,$$

para finalmente concluir, $\hat{B}_h(u, v) \leq 4 \|u\|_h \|v\|_h$, para u e $v \in H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)$, $s > 2/3$. \blacksquare

Já que $f \in L^2(\Omega)$, podemos observar que a continuidade em $\hat{F}(\cdot)$ é garantida, usando a desigualdade de Cauchy-Swcharz e a desigualdade de Poincaré-Friederich 3.2.1.

O problema variacional definido em 3.5.1 é coercivo devido ao seguinte resultado:

Teorema 3.5.2. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas triangulares em Ω . Vamos supor que o parâmetro de penalização de SIPDG é*

$$\sigma(E) = \hat{\sigma} \frac{p^2}{h_E} \quad \text{com } \hat{\sigma} > 0, \quad (3.5.9)$$

então $\exists \sigma_o > 0$ tal que para cada parâmetro $\hat{\sigma} \geq \sigma_o$, temos $\delta > 0$, que não depende de h , de maneira que:

$$\hat{B}_h(u, u) \geq \delta \|u\|_h^2$$

com u em V_h^p .

Proof. Podemos observar que se $\hat{B}_h(u, u) \geq \delta \|u\|_h^2$: $\exists \delta > 0$ tal que $\hat{B}_h(u, u) - \delta \|u\|_h^2 \geq 0$.

Assim:

$$\begin{aligned} \hat{B}_h(u, u) - \delta \|u\|_h^2 &= (1 - \delta) \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 - 2 \underbrace{\int_{\mathcal{S}_h^I \cup \mathcal{S}_h^D} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [[u]]}_{B} \\ &\quad - \delta \underbrace{\int_{\mathcal{S}_h^I \cup \mathcal{S}_h^D} \sigma^{-1} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2}_{A} + (1 - \delta) \int_{\mathcal{S}_h^I \cup \mathcal{S}_h^D} \sigma [[u]]^2. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Examinemos as integrais acima.

$$A = \sum_{E \in \mathcal{S}_h^I} \int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 + \sum_{E \in \mathcal{S}_h^D} \int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2.$$

- Se $E \in \mathcal{S}_h^I$ obtemos que:

$$\begin{aligned} \int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 &= \int_E \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{2} (\vec{n} \cdot \nabla_h u_L + \vec{n} \cdot \nabla_h u_R) \right)^2 \\ &\leq \int_E \sigma^{-1} \frac{1}{2} ((\vec{n} \cdot \nabla_h u_L)^2 + (\vec{n} \cdot \nabla_h u_R)^2) = \sigma^{-1} \frac{1}{2} (\|\nabla_h u_L\|_{L^2(\partial T)}^2 + \|\nabla_h u_R\|_{L^2(\partial T)}^2), \end{aligned}$$

- pela desigualdade multiplicativa do traço 3.3.1 e pela desigualdade inversa 3.3.2, conseguimos:

$$\begin{aligned} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(\partial T)}^2 &\leq c \left(\frac{1}{h_T} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)}^2 + \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)} \|\nabla \cdot (\nabla_h u_L)\|_{L^2(T)} \right) \\ &\leq c \left(\frac{1}{h_T} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)}^2 + \hat{C} \frac{P^2}{h_T} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)} \right) \\ &\leq c \left(\frac{1}{h_{T_L}} + \hat{C} \frac{P^2}{h_{T_L}} \right) \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq C_1 \frac{P^2}{h_{T_L}} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T)}^2, \text{ com } C_1 = \left(\frac{c}{P^2} + c \cdot \hat{C} \right). \end{aligned}$$

Assim, pelo resultado acima temos:

$$\int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \leq C_1 \frac{1}{\sigma} \left(\frac{P^2}{h_{T_L}} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T_L)}^2 + \frac{P^2}{h_{T_R}} \|\nabla_h u_R\|_{L^2(T_R)}^2 \right)$$

$$= C_1 \hat{\sigma}^{-1} \frac{h_E}{P^2} \left(\frac{P^2}{h_{T_L}} \|\nabla_h u_L\|_{L^2(T_L)}^2 + \frac{P^2}{h_{T_R}} \|\nabla_h u_R\|_{L^2(T_R)}^2 \right).$$

Se tomamos C_2 tal que $\max\{\frac{h_E}{h_{T_L}}, \frac{h_E}{h_{T_R}}\} < C_2$, conseguimos:

$$\int_E \frac{1}{\sigma} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \leq C_3 \hat{\sigma}^{-1} \left(\|\nabla_h u_L\|_{L^2(T_L)}^2 + \|\nabla_h u_R\|_{L^2(T_R)}^2 \right),$$

com $C_3 = C_1 * C_2$.

Pela desigualdade acima e lembrando que cada elemento triangular $T \in \mathcal{T}_h$ tem três arestas, temos que:

$$\int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \sigma^{-1} \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \leq 3C_3 \hat{\sigma}^{-1} \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2. \quad (3.5.11)$$

Empregando estas estimativas para B, na equação (3.5.10), dizemos que:

$$\begin{aligned} B &= \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \int_E \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\} [[u]] \leq \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \left(\varepsilon \int_E \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \sigma^{-1} \right)^{1/2} \left(\varepsilon^{-1} \int_E [[u]]^2 \sigma \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \left(\varepsilon \int_E \{\vec{n} \cdot \nabla_h u\}^2 \sigma^{-1} + \varepsilon^{-1} \int_E [[u]]^2 \sigma \right) \leq \frac{3C_3}{2} \varepsilon \hat{\sigma}^{-1} \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} [[u]]^2 \sigma. \end{aligned}$$

Assim:

$$\hat{B}_h(u, u) - \delta \| |u| \|_h^2 \geq (1 - \delta) \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 - C_3 \varepsilon \hat{\sigma}^{-1} \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} [[u]]^2 \sigma$$

$$- 3C_3 \hat{\sigma}^{-1} \delta \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 + (1 - \delta) \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \sigma [[u]]^2,$$

$$\hat{B}_h(u, u) - \delta \| |u| \|_h^2 \geq (1 - \delta - 3C_3 \hat{\sigma}^{-1} (\varepsilon + \delta)) \int_{\mathcal{T}_h} |\nabla_h u|^2 + (1 - \delta - \varepsilon^{-1}) \int_{\mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D} \sigma [[u]]^2.$$

Para que $\hat{B}_h(u, u) - \delta \| |u| \|_h^2 \geq 0$, precisamos:

$$1 - \delta - 3C_3 \hat{\sigma}^{-1} (\varepsilon + \delta) \geq 0,$$

$$1 - \delta - \varepsilon^{-1} \geq 0$$

ou seja $\varepsilon > 1$ e $\hat{\sigma} > 3C_3 \cdot \varepsilon = \sigma_0$, e assim garantimos a coercividade de $\hat{B}_h(\cdot, \cdot)$. ■

Então pelo teorema de Lax-Milgram 3.3.1, o problema variacional (3.5.2) possui única solução em V_h^P , ou seja :

$$\exists! u_{h_p} \in V_h^P ; \hat{B}_{h_p}(u_{h_p}, v) = \hat{F}_h(v) \quad \forall v \in V_h^P.$$

3.6 Problema modelo e Método de Galerkin Descontínuo para Problemas Elípticos em espaços de Sobolev Particionados unidimensionais

Seja $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ um domínio unidimensional e $f \in L^2(\Gamma)$. Consideremos o seguinte problema de valor limite:

$$-\nabla \cdot (\nabla u) = f \quad \text{em } \Gamma, \quad (3.6.1)$$

$$u = g_\Gamma \quad \text{em } \partial\Gamma.$$

Dados os conjuntos

$$H_D^1(\Gamma) = \{v \in H^1(\Gamma) | v|_{\partial\Gamma} = g_\Gamma\}$$

$$H_{D_0}^1(\Gamma) = \{v \in H^1(\Gamma) | v|_{\partial\Gamma} = 0\},$$

e $u_\Gamma \in H^2(\Gamma)$ uma solução de (3.6.1), inferimos:

$$\int_{\Gamma} \nabla u_\Gamma \cdot \nabla v = \int_{\Gamma} f v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Gamma). \quad (3.6.2)$$

Definição 3.6.1. Dizemos que $u_\Gamma \in H_D^1(\Gamma)$ é uma solução fraca do problema misto (3.6.1) se:

$$B(u_\Gamma, v) = F(v) \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Gamma) \quad (3.6.3)$$

com

$$B(u_\Gamma, v) = \int_{\Gamma} \nabla u_\Gamma \cdot \nabla v,$$

$$F(v) = \int_{\Gamma} f v.$$

Seja Γ_h um conjunto de arestas E , partição do domínio Γ . Denotamos por $\mathfrak{S}_h(\Gamma)$ o conjunto de todos os nós em Γ_h , que é decomposto no conjunto $\mathfrak{S}_h^I(\Gamma)$ de todos os nós interiores

e o conjunto $\mathfrak{S}_h^f(\Gamma)$ dos nós limite. Introduzimos a seguinte denotação de integral:

$$\int_{\Gamma_h} v = \sum_{E \in \Gamma_h} \int_E v \quad v \in H^s(\Gamma, \Gamma_h), \quad s \geq 1,$$

com $H^s(\Gamma_h)$ denota o habitual espaço de Sovolev particionado de ordem s .

Deste modo, obtemos a seguinte identidade para nosso problema modelo unidimensional:

$$\sum_{E \in \Gamma_h} \left(\int_E \nabla u_\Gamma \cdot \nabla_h v - \sum_{\partial E} (\vec{n}_E \cdot \nabla u_\Gamma) v \right) = \int_\Gamma f v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Gamma, \Gamma_h), \quad (3.6.4)$$

com $f \in L^2(\Gamma)$, $u_\Gamma \in H^2(\Gamma)$ e \vec{n}_E o vetor externo à fronteira da aresta E , normal unitária.

Agora vamos lembrar o lema de Decomposição de fluxos para um domínio unidimensional, mantendo as definições dos operadores de salto e média, vistas na seção 3.2.

Lema 3.6.1. (*Decomposição de fluxos unidimensional*) Para $u_\Gamma \in H^2(\Gamma)$ e $v_\Gamma \in H^1(\Gamma)$, temos que:

$$\sum_{E \in \Gamma_h} \sum_{\partial E} (\vec{n}_E \cdot \nabla u_\Gamma) v_\Gamma = \sum_{i \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \{ \vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma \} [[v_\Gamma]] + \sum_{i \in \mathfrak{S}_h^I(\Gamma)} [[\vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma]] \{ v_\Gamma \}. \quad (3.6.5)$$

Proof. Análogo ao feito no Lema 3.5.1. ■

Assim podemos reescrever a equação (3.6.4), do seguinte modo:

$$\int_{\Gamma_h} \nabla u_\Gamma \cdot \nabla_h v - \sum_{i \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \{ \vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma \} [[v]] - \sum_{i \in \mathfrak{S}_h^I(\Gamma)} [[\vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma]] \{ v \} = \int_\Gamma f v \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Gamma, \Gamma_h)$$

com $f \in L^2(\Gamma)$ e $u_\Gamma \in H^2(\Gamma)$.

Seguindo o procedimento da seção 3.5, chegamos ao problema modelo pelo método de Galerkin Descontínuo,

$$\int_{\Gamma_h} \nabla u_\Gamma \cdot \nabla_h v - \sum_{\mathfrak{S}_h^I(\Gamma) \cup \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} \{ \vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma \} [[v]] = \int_\Gamma f v \quad v \in H_{D_0}^1(\Gamma), \quad (3.6.6)$$

com $\mathfrak{S}_h(\Gamma) = \mathfrak{S}_h^I(\Gamma) \cup \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)$, sendo $\mathfrak{S}_h^D(\Gamma)$ os nós na fronteira de Γ onde a condição de Dirichlet é satisfeita.

De modo análogo ao procedimento empregado na seção 3.5 para o obter o método SIPDG da equação (3.5.5), chegamos à seguinte definição variacional unidimensional.

Definição 3.6.2. *Seja Γ_h uma malha em Γ . Chama-se $u_\Gamma \in H^2(\Gamma, \Gamma_h)$, uma solução fraca particionada do problema (3.6.1) se:*

$$B_\Gamma(u_\Gamma, v) = F_\Gamma(v), \quad \forall v \in H_{D_0}^1(\Gamma, \Gamma_h)$$

com

$$B_\Gamma(u_\Gamma, v) = \int_{\Gamma_h} \nabla_h u_\Gamma \cdot \nabla_h v - \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} (\{\vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma\}[[v]] + \{\vec{n} \cdot \nabla_h v\}[u_\Gamma]) + \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma[[u_\Gamma]][[v]]$$

$$F(v) = \int_{\Gamma} f v + \sum_{\mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} g_\Gamma v.$$

Dotamos ao espaço $H^2(\Gamma_h)$ com a seguinte norma:

$$\|v_\Gamma\|_{\Gamma_h} = \int_{\Gamma_h} |\nabla_h v_\Gamma|^2 + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \frac{1}{\sigma_i} \{\vec{n} \nabla_h v_\Gamma\}^2 + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_i [v_\Gamma]^2. \quad (3.6.7)$$

Relembrando o espaço de funções polinomiais descontínuas por partes sobre Γ , definido por:

$$V_h^p(\Gamma) = \{v_\Gamma \in L^2(\Omega) \mid v_\Gamma|_E \in \mathbb{P}_p(E), \forall E \in \Gamma_h\} \quad (3.6.8)$$

em que p é o grau de aproximação polinomial. Obtemos o seguinte problema variacional discreto:

Definição 3.6.3. *Seja Γ_h uma malha em Γ . O método SIPDG (Symmetric Interior Penalty Discontinuous Galerkin) para o problema (3.6.1) formula-se assim:*

encontre $u_\Gamma \in V_h^p(\Gamma)$ tal que:

$$\hat{B}_\Gamma(u_\Gamma, v_\Gamma) = \hat{F}_\Gamma(v_\Gamma) \quad \forall v_\Gamma \in V_h^p(\Gamma),$$

com

$$\hat{B}_\Gamma(u_\Gamma, v_\Gamma) = \int_{\Gamma_h} \nabla_h u_\Gamma \cdot \nabla_h v_\Gamma - \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} (\{\vec{n} \cdot \nabla_h u_\Gamma\}[[v_\Gamma]] + \{\vec{n} \cdot \nabla_h v_\Gamma\}[[u_\Gamma]]) + \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma[[u_\Gamma]][[v_\Gamma]],$$

$$\hat{F}_\Gamma(v_\Gamma) = \int_{\Gamma} f v_\Gamma + \sum_{\mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} g_\Gamma v_\Gamma.$$

Os seguintes resultados garantem a continuidade e coercividade da forma bilinear $\hat{B}_\Gamma(\cdot, \cdot)$, no problema variacional (3.6.3), com relação à norma $||| \cdot |||_\Gamma$. As provas são análogas ao efetuado nos teoremas 3.5.1 e 3.5.2.

Teorema 3.6.1. *Seja $\{\Gamma_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas em Γ . A forma bilinear $\hat{B}_\Gamma(\cdot, \cdot)$ é contínua em $H^2(\Gamma_h)$ com a norma $||| \cdot |||_{\Gamma_h}$.*

Teorema 3.6.2. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas em Γ . Vamos supor que o parâmetro de penalização de SIPDG é:*

$$\sigma(e) = \hat{\sigma}_\Gamma \frac{p^2}{h_e} \quad \text{com } \hat{\sigma}_\Gamma > 0, \quad (3.6.9)$$

com $h_e = \max\{h_{E_R}, h_{E_L}\}$ com $e = E_R \cap E_L$. Então $\exists \sigma_o > 0$ tal que para cada parâmetro $\hat{\sigma}_\Gamma \geq \sigma_o$, temos $\delta > 0$, que não depende de h_Γ , de maneira que:

$$\hat{B}_{\Gamma_h}(u_\Gamma, u_\Gamma) \geq \delta |||u_\Gamma|||_h^2,$$

com u_Γ em $V_h^p(\Gamma)$.

As estimativas de erro serão baseadas no seguinte resultado da teoria de aproximação correspondente ao caso unidimensional, ver [BABUŠKA I.; SURI 1987].

Lema 3.6.2. *Seja Γ_h uma família de malhas sobre Γ . Então, para todo $v \in H^s(E)$, $s \geq 1$, $E \in \Gamma_h$, e e_E^+ , e_E^- vértices superior e inferior, respectivamente, da aresta E . Existe um projetor $\pi_p^h : H^s(E) \rightarrow \mathbb{P}_p(E)$, tal que:*

$$\begin{aligned} \pi_p^h v(e_E^\pm) &= v(e_E^\pm), \quad e_E^\pm \in \partial E \\ \left| v - \pi_p^h v \right|_{H^q(E)} &\lesssim \frac{h_E^{\mu-q}}{p^{s-q}} |v|_{H^s(E)}, \quad q = 0, 1, \end{aligned} \quad (3.6.10)$$

sendo $\mu = \min\{p+1, s\}$.

4 DG para problemas elípticos em meios porosos fraturados

Neste capítulo apresentamos um estudo do método de Galekin descontínuo para problemas elípticos, aplicado a modelagem do escoamento em meios poroso fraturados introduzida por Antonietti, Facciola', Russo e Verani em [ANTONIETTI et al. 2016].

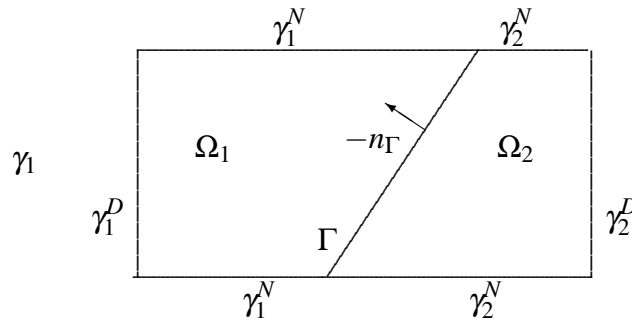
Na seção 4.1, apresentamos o conjunto de equações que modela o problema de escoamento em meios porosos fraturados, na seção 4.2 obtemos a formulação discreta para o problema modelo e mostramos coercividade e continuidade na seguinte seção, confirmando assim, existência e unicidade de uma solução para o problema discreto. Por último, na seção 4.4 geramos uma estimativa a priori para o erro, que garante a convergência da solução do problema discreto para a solução exata.

4.1 Equação do Problema Modelo

Visando simplificar o estudo do problema de escoamento em meios porosos fraturados, assumimos que temos uma única fratura no meio poroso, que divide o domínio em duas sub-regiões conexas e disjuntas (ver Figura 4.1.1), seguindo a abordagem usado nos artigos [ANTONIETTI et al. 2016] e [D'ANGELO C.; SCOTTI 2012]. Lembrando o que foi visto no capítulo 2, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ com $d = 2, 3$, um aberto poligonal, limitado e convexo. Assumimos que a fratura é $(d-1)$ -dimensional $\Gamma \subset \mathbb{R}^{d-1}$, cuja medida é uniformemente limitada ($|\Gamma| = \sigma(1)$), e suponha que Γ separa Ω em dois subdomínios conexas e disjuntos, $\Omega \setminus \Gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2$ com $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Para $i = 1, 2$, nós denotamos por γ_i a parte da fronteira de Ω_i compartilhada com a parte da fronteira de Ω , isto é, $\gamma_i = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega$. Além disso denotamos por n_i , $i = 1, 2$ o vetor normal unitário de Γ apontando para fora de Ω_i e, n_Γ o vetor normal unitário sobre Γ com uma orientação fixa de Ω_1 para Ω_2 , assim $n_\Gamma = n_1 = -n_2$.

De acordo com [ANTONIETTI et al. 2016], vamos supor que o fluxo no meio poroso seja governado pela lei de Darcy. Seja $K = K(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ o tensor de permeabilidade no meio poroso, conforme o definido no capítulo 2.

Dada uma função $f \in L^2(\Omega)$ representando o termo fonte e $g_D, g_N \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, onde $H^{1/2}(\partial\Omega) = \{u|_{\partial\Omega}, u \in H^1(\Omega)\}$. Das três primeiras equações em (2.1.27), juntando a primeira e a segunda, e adicionando uma equação para a condição de Neumann, temos que o escoamento

Figure 4.1.1: Os subdomínios Ω_1 e Ω_2 separados pela fratura Γ .

de um fluido em cada domínio Ω_i , $i=1,2$, com pressão p_i , é descrito por:

$$\begin{aligned} -\nabla(K_i(x,y)\nabla p_i) &= f_i, & \text{em } \Omega_i \quad i = 1,2 \\ p_i &= g_D^i, & \text{em } \gamma_i^D \quad i = 1,2 \\ \nabla p_i \cdot \vec{n} &= g_N^i, & \text{em } \gamma_i^N \quad i = 1,2. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Aqui denotamos por K_i e f_i as restrições de K e f em Ω_i , $i=1,2$; g_D^i e g_N^i a restrições em γ_i de g_D e g_N onde a condições de Dirichlet e Neumann são impostas, respectivamente, e \vec{n} o vetor normal unitário de γ_i apontando para fora de Ω_i (ver Figura 4.1.1).

O segundo ingrediente para o modelo é representado pelas equações que comandam o fluxo na fratura. Em nosso modelo, a fratura é tratada como uma face (d-1)-dimensional imersa em um objeto d-dimensional [ANTONIETTI et al. 2016]. Conforme [BEAR J.; TSANG 2012], se assumirmos que as fraturas são preenchidas por um meio poroso com porosidade e permeabilidade diferentes das do entorno, a lei de Darcy também pode ser usada para modelar o fluxo ao longo da fratura. No começo, a fratura é considerada um subdomino d-dimensional de Ω , que a separa em dois subdomínios disjuntos. Então a equação de Darcy é decomposta na fratura nas componentes normal e tangencial, a componente tangencial é integrada ao longo da espessura $l_\Gamma = l_\Gamma(x) > 0$ no domínio da fratura, fornecendo assim uma equação de fluxo na fratura. O tratamento na componente normal fornece condições de contorno, também chamadas condições de acoplamento, ao longo de Γ . Ver capítulo 2 para uma dedução detalhada do modelo matemático.

Aqui o tensor $K_\Gamma^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{(d-1) \times (d-1)}$, representa a componente tangencial da permeabilidade na fratura [ANTONIETTI et al. 2016]. Vamos supor que $f|_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ (notação F_Γ no capítulo 2), definimos $\partial\Gamma$ como sendo os nós limites em Γ e dizemos que p_Γ é a pressão na

fratura (notação P_Γ no capítulo 2). Baseado nas equações quatro e cinco em (2.1.27), chegamos à seguinte equação que modela o fluxo sobre Γ :

$$\begin{aligned} -\nabla_\tau \cdot (K_\Gamma^\mathcal{J} l_\Gamma \nabla_\tau p_\Gamma) &= f_\Gamma + [[-K\nabla p \cdot n_\Gamma]], \quad \text{em } \Gamma \\ p_\Gamma &= g_\Gamma, \quad \text{em } \partial\Gamma, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

com $g_\Gamma \in H^{1/2}(\partial\Gamma)$ e $\nabla_\tau, \nabla_\tau \cdot$ denota o gradiente tangencial e o operador de divergência, respectivamente. O termo fonte $[[-K\nabla p \cdot n_\Gamma]]$ representa a contribuição dos fluxos nos subdomínios no fluxo da fratura. [ANTONIETTI et al. 2016]. Aplicamos condições de Dirichlet no limite $\partial\Gamma$.

Finalmente, apresentamos as condições que acoplam as equações (4.1.2) e (4.1.1). Seja ξ um número real maior que zero, $\xi \neq \frac{1}{2}$. As condições de acoplamento são dadas pela sétima e oitava equação em (2.1.27),

$$\begin{aligned} -2\{K\nabla p\} \cdot n_\Gamma &= \dot{\beta}_\Gamma(p_1 - p_2), \quad \text{em } \Gamma \\ -[[K\nabla p \cdot n_\Gamma]] &= \alpha_\Gamma(\{p\} - p_\Gamma), \quad \text{em } \Gamma \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

para,

$$\dot{\beta}_\Gamma = \frac{2}{n_\Gamma}, \quad \alpha_\Gamma = \frac{4}{n_\Gamma(2\xi - 1)}$$

com $n_\Gamma = \frac{l_\Gamma}{K_\Gamma^n}$, e K_Γ^n a componente normal do tensor de permeabilidade na fratura.

Assim, o problema elíptico que modela o problema de escoamento em meios porosos fraturados que vamos trabalhar, é dado pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (K_i(x,y) \nabla p_i) &= f_i, & \text{em } \Omega_i \quad i = 1, 2 \\ p_i &= g_D^i, & \text{em } \gamma_i^D \quad i = 1, 2 \\ \nabla p_i \cdot \vec{n} &= g_N^i, & \text{em } \gamma_i^N \quad i = 1, 2 \\ -\nabla_\tau \cdot (K_\Gamma^\mathcal{J} l_\Gamma \nabla_\tau p_\Gamma) &= f_\Gamma + [[-K\nabla p \cdot n_\Gamma]], \quad \text{em } \Gamma \\ p_\Gamma &= g_\Gamma, & \text{em } \partial\Gamma \\ -2\{K\nabla p\} \cdot n_\Gamma &= \dot{\beta}_\Gamma(p_1 - p_2), & \text{em } \Gamma \\ -[[K\nabla p \cdot n_\Gamma]] &= \alpha_\Gamma(\{p\} - p_\Gamma), & \text{em } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

4.2 Solução discreta do Problema Modelo

Consideremos uma família de malhas shape regular, triangular sobre o domínio Ω , \mathcal{T}_h , alinhadas com a fratura Γ , para que qualquer triângulo $T \in \mathcal{T}_h$ não possa ser cortado por Γ . Assim, cada malha \mathcal{T}_h induz uma subdivisão da fratura em arestas, subdivisão denotada por Γ_h . Deste modo o conjunto de todas as arestas em \mathcal{T}_h é dado por:

$$\mathfrak{S}_h = \mathfrak{S}_h^I \cup \mathfrak{S}_h^D \cup \mathfrak{S}_h^N \cup \Gamma_h,$$

com \mathfrak{S}_h^I é o conjunto das arestas interiores não pertencentes à fratura, \mathfrak{S}_h^D e \mathfrak{S}_h^N os conjuntos das arestas no contorno, onde as condições de Dirichlet e Neumann são impostas, respectivamente. Relembramos o espaço de funções polinomiais (3.2.2), com o propósito de encontrar uma solução discreta para o problema (4.1.4),

$$V_h^b = \{v \in L_2(\Omega) \mid v|_T \in \mathbb{P}_b(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$V_h^\Gamma = \{v_\Gamma \in C^0(\Gamma) \mid v_\Gamma|_E \in \mathbb{P}_b(E), \forall E \in \Gamma_h\},$$

sendo b o grau de aproximação polinomial dos espaços discretos no domínio e na fratura definidos acima.

Continuando, vamos fazer a dedução do método de Galerkin descontínuo simétrico (3.5.5), para o problema de escoamento em meios porosos fraturados. Já que o método de Galerkin descontínuo vai ser consistente, isto quer dizer, que a solução exata da equação de escoamento também é solução do problema variacional do Método de Galerkin Descontínuo, portanto, neste documento, não apresentamos a formulação fraca do problema de escoamento; nos referimos à segunda seção em [ANTONIETTI et al. 2016], para garantir a boa colocação da formulação fraca.

A primeira equação em (4.1.4) sobre Ω , vamos multiplicar e integrar, nessa ordem, por uma função teste $v \in V_h^b$ e usamos o teorema da divergência para inferir:

$$-\int_{\mathcal{T}_h} \nabla \cdot (K \nabla p) v = \int_{\mathcal{T}_h} f v,$$

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T K \nabla p \cdot \nabla_h v - \int_{\partial T} (K \nabla p \cdot \vec{n}_T) v \right) = \int_{\mathcal{T}_h} f v.$$

Pelo lema da decomposição de fluxos 3.5.1, temos:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T K \nabla p \cdot \nabla_h v - \int_{\partial T} (K \nabla p \cdot \vec{n}_T) v \right) = \int_{\mathcal{T}_h} (K \nabla p) \cdot \nabla_h v$$

$$- \left(\int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{ \vec{n} \cdot K \nabla p \} [[v]] + \underbrace{\int_{\mathfrak{S}_h^i - \Gamma_h} [[\vec{n} \cdot K \nabla p]] v}_0 \right) - \left(\int_{\Gamma_h} \{ \vec{n} \cdot K \nabla p \} [[v]] + \int_{\Gamma_h} [[\vec{n} \cdot K \nabla p]] \{ v \} \right).$$

Assim, o método de Galerkin descontínuo simétrico com penalização interior no meio poroso fornece a seguinte equação:

$$\int_{\mathcal{T}_h} (K \nabla p) \cdot \nabla_h v - \left(\int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{ \vec{n} \cdot K \nabla p \} [[v]] + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{ \vec{n} \cdot K \nabla_h v \} [[p]] \right)$$

$$+ \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \sigma_E [[p]] [[v]] - \left(\int_{\Gamma_h} \{ \vec{n} \cdot K \nabla p \} [[v]] + \int_{\Gamma_h} [[\vec{n} \cdot K \nabla p]] \{ v \} \right)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f_h v_h + \int_{\mathfrak{S}_h^N} K g_N v - \int_{\mathfrak{S}_h^D} (\vec{n} \cdot K \nabla_h v) g_D + \int_{\mathfrak{S}_h^D} \sigma_E v \cdot g_D,$$

com o coeficiente σ é definido na seção 4.5, para cada $E \in \mathfrak{S}_h - \Gamma_h$.

Aplicando o mesmo procedimento acima, na quarta equação em (4.1.4) que modela o problema na fratura, temos:

$$\int_{\Gamma_h} l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau p_\Gamma \cdot \nabla_\tau v_\Gamma - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \left(\{ l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau p_\Gamma \cdot \vec{n} \} [[v_\Gamma]] + \{ l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau v_\Gamma \cdot \vec{n} \} [[p_\Gamma]] \right)$$

$$+ \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_e [[p_\Gamma]] [[v_\Gamma]]$$

$$= \int_{\Gamma_h} f_\Gamma v_\Gamma + \int_{\Gamma_h} [[-K \nabla p \cdot n_\Gamma]] v_\Gamma - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} (l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau v \cdot \vec{n}) g_\Gamma + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} \sigma_e v_\Gamma g_\Gamma,$$

com $v_\Gamma \in V_h^\Gamma$ e $\mathfrak{S}_h(\Gamma)$ o conjunto de todos os vértices e de todas as aresta $E \in \Gamma_h$.

Ao somarmos as duas últimas equações acima obtidas pelo método de Galerkin descontínuo, teremos as seguintes integrais sobre arestas na fratura e usando as condições de

acoplamiento (4.1.3),

$$\begin{aligned}
& - \left(\int_{\Gamma} \{\vec{n} \cdot K \nabla p\} [[v]] + \int_{\Gamma} \{[\vec{n} \cdot K \nabla p]\} \{v\} \right) - \int_{\Gamma} [[-K \nabla p \cdot n_{\Gamma}]] v_{\Gamma} \\
& = \int_{\Gamma} \frac{\dot{\beta}_{\Gamma}}{2} [[p]] \cdot [[v]] + \int_{\Gamma} \alpha_{\Gamma}(\{p\} - p_{\Gamma}) \{v\} - \int_{\Gamma} \alpha_{\Gamma}(\{p\} - p_{\Gamma}) v_{\Gamma} \\
& = \int_{\Gamma} \alpha_{\Gamma}(\{p\} - p_{\Gamma}) (\{v\} - v_{\Gamma}) + \int_{\Gamma} \beta_{\Gamma} [[p]] \cdot [[v]],
\end{aligned}$$

com $\beta_{\Gamma} = \frac{\dot{\beta}_{\Gamma}}{2}$. Desta forma o problema modelo discreto é dado pela seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{T}_h} (K \nabla p) \cdot \nabla_h v - \left(\int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{\vec{n} \cdot K \nabla p\} [[v]] + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{\vec{n} \cdot K \nabla_h v\} [[p]] \right) + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma} \sigma_E [[p]] [[v]] \\
& + \int_{\Gamma_h} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} p_{\Gamma} \cdot \nabla_{\tau} v_{\Gamma} - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \left(\{l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} p_{\Gamma} \cdot \vec{n}\} [[v_{\Gamma}]] + \{ \{l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \cdot \nabla_{\tau} v_{\Gamma}\} [[p_{\Gamma}]] \} \right) \\
& + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_e [[p_{\Gamma}]] [[v_{\Gamma}]] + \int_{\Gamma} \alpha_{\Gamma}(\{p\} - p_{\Gamma}) (\{v\} - v_{\Gamma}) + \int_{\Gamma} \beta_{\Gamma} [[p]] \cdot [[v]] \tag{4.2.1} \\
& = \sum_{T \in \mathcal{T}_T} \int_T f_h v_h + \int_{\mathfrak{S}_h^N} K g_N v - \int_{\mathfrak{S}_h^D} (\vec{n} \cdot K \nabla_h v) g_D + \int_{\mathfrak{S}_h^D} \sigma_E v g_D + \int_{\Gamma_h} f_{\Gamma} v_{\Gamma} \\
& - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} v \cdot \vec{n}) g_{\Gamma} + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} \sigma_e v_{\Gamma} g_{\Gamma}.
\end{aligned}$$

Assim, o próximo passo é gerar uma forma variacional para o nosso problema, para isso, apresentaremos as seguintes formas bilineares:

- $B_{DG} : V_h^b \times V_h^b \rightarrow \mathbb{R}$ com,

$$\begin{aligned}
B_{DG}(p, v) & = \int_{\mathcal{T}_h} (K \nabla p) \cdot \nabla_h v - \left(\int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{\vec{n} \cdot K \nabla p\} [[v]] + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{\vec{n} \cdot K \nabla_h v\} [[p]] \right) \\
& + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma} \sigma_E [[p]] [[v]].
\end{aligned}$$

- $B_\Gamma : V_h^\Gamma \times V_h^\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ em que,

$$\begin{aligned} B_\Gamma(p_\Gamma, v_\Gamma) &= \int_{\Gamma_h} l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{T}} \nabla_\tau p_\Gamma \cdot \nabla_\tau v_\Gamma - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \{l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{T}} \nabla_\tau p_\Gamma \cdot \vec{n}\} [[v_\Gamma]] \\ &\quad - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \{l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{T}} \vec{n} \cdot \nabla_\tau v_\Gamma\} [[p_\Gamma]] + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_e [[p_\Gamma]] [[v_\Gamma]]. \end{aligned}$$

- $B_{AC} : (V_h^b \times V_h^\Gamma) \times (V_h^b \times V_h^\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ com,

$$B_{AC}((p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma)) = \int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma (\{p\} - p_\Gamma) (\{v\} - v_\Gamma) + \int_{\Gamma_h} \beta_\Gamma [[p]] \cdot [[v]].$$

Também definimos o seguinte funcional linear, $F_h : V_h^b \times V_h^\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ no qual,

$$\begin{aligned} F_h(v, v_\Gamma) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f_h v_h + \int_{\mathfrak{S}_h^N} K g_N v - \int_{\mathfrak{S}_h^D} (\vec{n} \cdot K \nabla_h v) g_D + \int_{\mathfrak{S}_h^D} \sigma_{EV} g_D + \int_{\Gamma_h} f_\Gamma v_\Gamma \\ &\quad - \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} (l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{T}} \nabla_\tau v \cdot \vec{n}) g_\Gamma + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} \sigma_e v_\Gamma g_\Gamma. \end{aligned}$$

Finalmente, vamos dar uma forma variacional para nosso problema modelo (4.1.4).

Definição 4.2.1. *Seja \mathcal{T}_h uma família de malhas triangulares, shape-regular em Ω , alinhadas com a fratura Γ . Então, chama-se método de Galerkin descontínuo para o problema (4.1.4) à formulação variacional :*

encontrar $(p, p_\Gamma) \in V_h^b \times V_h^\Gamma$ tal que:

$$B_h((p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma)) = F_h(v, v_\Gamma) \quad \forall (v, v_\Gamma) \in V_h^b \times V_h^\Gamma \quad (4.2.2)$$

com $B_h : (V_h^b \times V_h^\Gamma) \times (V_h^b \times V_h^\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$B_h((p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma)) = B_{DG}(p, v) + B_\Gamma(p_\Gamma, v_\Gamma) + B_{AC}((p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma))$$

e F_h como definido em (4.2.2).

4.3 Continuidade e coercividade da formulação discreta

Nesta seção, vamos garantir a partir do teorema de Lax-Milgrma 3.3.1, a existência e unicidade de uma solução para o problema variacional (4.2.2), mostrando a continuidade e coercividade das formas bilineares e lineares descritas no problema.

Primeiro vamos introduzir a seguinte norma sobre $V_h^b \times V_h^\Gamma$,

$$|||(v, v_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h}^2 = |||v|||_{DG}^2 + |||v_\Gamma|||_{\Gamma}^2 + |||(v, v_\Gamma)|||_{AC}^2 \quad (4.3.1)$$

sendo

$$\begin{aligned} |||v|||_{DG}^2 &= \int_{\mathcal{T}_h} K |\nabla_h v|^2 + \int_{\mathfrak{S}_h} \frac{1}{\sigma_E} \{ \vec{n} \cdot K \nabla_h v \}^2 + \int_{\mathfrak{S}_h} \sigma_E [[v]]^2, \\ |||v_\Gamma|||_{\Gamma}^2 &= \int_{\Gamma_h} l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}} |\nabla_\tau v_\Gamma|^2 + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \frac{1}{\sigma_e} \{ l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}} \vec{n} \cdot \nabla v_\Gamma \}^2 + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_e [[v_\Gamma]]^2, \\ |||(v, v_\Gamma)|||_{AC}^2 &= \int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma (\{v\} - v_\Gamma)^2 + \int_{\Gamma_h} \beta_\Gamma [[v]]^2. \end{aligned}$$

Podemos notar que $|||\cdot|||_{DG}$ e $|||\cdot|||_{\Gamma}$ são normas se σ_E e σ_i satisfazem (3.5.9). $|||\cdot|||_{AC}$ é uma norma se $\alpha_\Gamma \geq 0$ (isso é $\xi > 1/2$).

As normas $|||\cdot|||_{DG}$ e $|||\cdot|||_{\Gamma}$, estão relacionadas à abordagem adotada no capítulo 2, para mostrar continuidade e coercividade no problema elíptico, ver 3.5.7.

Teorema 4.3.1. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas triangulares em Ω , alinhadas com a fratura Γ . Então, a forma bilinear $B_h(\cdot, \cdot)$ descrita na definição em 4.2.1, é contínua em $V_h^b \times V_h^\Gamma$ com a norma $|||\cdot|||_{\mathcal{T}_h}$.*

Proof. Seja $(p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma) \in V_h^b \times V_h^\Gamma$. Pelo procedimento feito no teorema 3.5.1, capítulo anterior, nos temos:

$$|B_{DG}(p, v)| \lesssim |||p|||_{DG} \left(|||v|||_{DG}^2 \right)^{1/2} \lesssim |||(p, p_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h} |||(v, v_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h},$$

$$|B_\Gamma(p_\Gamma, v_\Gamma)| \lesssim |||p_\Gamma|||_{\Gamma} |||v_\Gamma|||_{\Gamma} \lesssim |||(p, p_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h} |||(v, v_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h},$$

aqui o símbolo \lesssim (e \gtrsim) significa que as desigualdades são determinadas por uma constante positiva, $p \leq a \cdot v$ com $a > 0$ é análogo $p \lesssim v$. Continuando a demonstração, usando a desigualdade

de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned}
|B_{AC}((p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma))| &\leq \alpha_\Gamma \sum_{E \in \Gamma_h} \left(\int_E (\{p\} - p_\Gamma)^2 \right)^{1/2} \left(\int_E (\{v\} - v_\Gamma)^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \beta_\Gamma \sum_{E \in \Gamma_h} \left(\int_E [[p]]^2 \right)^{1/2} \left(\int_E [[v]]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{E \in \Gamma_h} \alpha_\Gamma \int_E (\{p\} - p_\Gamma)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{E \in \Gamma_h} \alpha_\Gamma \int_E (\{v\} - v_\Gamma)^2 \right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\sum_{E \in \Gamma_h} \beta_\Gamma \int_E [[p]]^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{E \in \Gamma_h} \beta_\Gamma \int_E [[v]]^2 \right)^{1/2} \\
&\leq |||(p, p_\Gamma)|||_{AC} |||(v, v_\Gamma)|||_{AC} + |||(p, p_\Gamma)|||_{AC} |||(v, v_\Gamma)|||_{AC} \\
&\leq 2 |||(p, p_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h} |||(v, v_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h}.
\end{aligned}$$

Concluindo, provamos que:

$$|B_h((p, p_\Gamma), (v, v_\Gamma))| \lesssim |||(p, p_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h} |||(v, v_\Gamma)|||_{\mathcal{T}_h}.$$

■

Usando a desigualdade de Poincaré-Friederich, Lema 3.2.1, para relacionar as normas $\|\cdot\|_{L^2}$ e $|\cdot|_{H^1}$, a desigualdade Cauchy-Swcharz como foi feito no teorema 3.5.1, e já que o termos fonte $f \in L^2(\Omega)$, $f_\Gamma \in L^2(\Gamma)$ e $g_d, g_N \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, podemos observar que a continuidade em $F_h(\cdot, \cdot)$ é garantida.

Teorema 4.3.2. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas triangulares em Ω , alinhadas com a fratura Γ . Então, a forma bilinear $B_h(\cdot, \cdot)$ descrita na definição 4.2.1, é coerciva em $V_h^b \times V_h^\Gamma$ com a norma $|||\cdot|||_{\mathcal{T}_h}$.*

Proof. Seja $(p, p_\Gamma) \in V_h^b \times V_h^\Gamma$. A coercividade de B_{DG} em $|||\cdot|||_{DG}$ é garantida por um procedimento análogo ao realizado no teorema 3.5.2, considerando que o tensor K é limitado. Para B_Γ sobre $|||\cdot|||_\Gamma$, vamos usar o mesmo método empregado no teorema 3.5.2, sobre Γ , e conside-

ramos que $K_{\Gamma}^{\mathcal{T}}$ é limitado. Assim temos que existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tal que:

$$B_{DG}(p, p) \geq \delta_1 \|p\|_{DG}^2,$$

$$B_{\Gamma}(p_{\Gamma}, p_{\Gamma}) \geq \delta_2 \|p_{\Gamma}\|_{\Gamma}^2.$$

Podemos ver facilmente que $B_{AC}(p, p_{\Gamma}) = \|(p, p_{\Gamma})\|_{AC}^2$, e concluir que existe $\delta > 0$, tal que:

$$B_h(p, p_{\Gamma}) \geq \delta \|(p, p_{\Gamma})\|_{\mathcal{T}_h}^2$$

■

4.4 Estimativas de Erro

Para encontrar as estimativas de erro, assumimos que a solução exata (p, p^{Γ}) pertence ao espaço $V^* \times V^{\Gamma}$,

$$V^* = \{v = (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2\}, \quad V^{\Gamma} = H^s(\Gamma) \quad (4.4.1)$$

com, para $i = 1, 2$ e $s \geq 2$, $V_i = H^s(\Omega_i)$. Mostraremos que a solução discreta (p_h, p_h^{Γ}) do problema definido em (4.2.1), converge à solução (p, p^{Γ}) , originando uma estimativa a priori para o erro na norma (4.3.1).

Antes de tudo, relembremos a definição do interpolador vista na seção 3.3, temos $\Pi_h^b : V^* \rightarrow V_h^b$, tal que:

$$\langle v - \Pi_h^b(v), w \rangle_{L^2(\mathcal{T}_h)} = 0 \quad \forall w \in V_h^b. \quad (4.4.2)$$

Analogamente, $\Pi_{\Gamma_h}^b : H^{\Gamma} \rightarrow V_h^{\Gamma}$, é definido como:

$$\langle v_{\Gamma} - \Pi_{\Gamma_h}^b(v_{\Gamma}), w_{\Gamma} \rangle_{L^2(\Gamma_h)} = 0 \quad \forall w_{\Gamma} \in V_h^{\Gamma}. \quad (4.4.3)$$

Devido ao fato do método de Galerkin Descontínuo ser consistente com o problema variacional discreto,

$$B_h((p, p^{\Gamma}), (v_h, v_h^{\Gamma})) = F_h((v_h, v_h^{\Gamma})) \quad \forall (v_h, v_h^{\Gamma}) \in V_h^b \times V_h^{\Gamma}$$

definição 4.2.1, podemos obter o seguinte resultado que garante a ortogonalidade do espaço

$V_h^b \times V_h^\Gamma$:

$$B_h((p, p^\Gamma) - (p_h, p_h^\Gamma), (v_h, v_h^\Gamma)) = 0 \quad \forall (v_h, v_h^\Gamma) \in V_h^b \times V_h^\Gamma. \quad (4.4.4)$$

Teorema 4.4.1. *Seja $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ uma família shape-regular de malhas triangulares em Ω , alinhadas com a fratura Γ . Considere $(p, p^\Gamma) \in V^* \times V^\Gamma$ com $s \geq 2$, uma solução do problema modelo, equação (4.1.4), (p_h, p_h^Γ) uma solução do método de Galerkin descontínuo, definido em 4.2.1. Vamos supor que os parâmetros de penalização são escolhidos como $\sigma(E) = \hat{\sigma} \cdot K \frac{b^2}{h_E}$, para $E \in \mathfrak{S}_h - \Gamma$ e $\sigma(e) = \hat{\sigma}_\Gamma \cdot l_\Gamma K_\Gamma^\mathcal{T} \frac{b^2}{h_e}$, $e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)$, de acordo com a estrutura dos teoremas 3.5.2 e 3.6.2 respectivamente. Então existe uma constante C , que não depende de h , tal que:*

$$\| (p, p^\Gamma) - (p_h, p_h^\Gamma) \|_{\mathcal{T}_h}^2 \leq Ch^{2\mu-2} (\|p\|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + \|p^\Gamma\|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2)$$

com $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ e $\mu = \min\{b+1, s\}$

Proof. Vamos decompor o erro da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e = (p, p^\Gamma) - (p_h, p_h^\Gamma) &= \underbrace{(p, p^\Gamma) - (\Pi_h^b(p), \Pi_{\Gamma_h}^b(p^\Gamma))}_v - \underbrace{\left((p_h, p_h^\Gamma) - (\Pi_h^b(p), \Pi_{\Gamma_h}^b(p^\Gamma)) \right)}_\xi \\ &= v - \xi. \end{aligned}$$

Pela consistência definida acima, temos:

$$B_h(e, \xi) = 0 \Rightarrow B_h(v, \xi) - B_h(\xi, \xi) = 0.$$

A coercividade e a continuidade da forma bilinear B_h em V_h^p , fornece:

$$\begin{aligned} \delta \| \xi \|_{\mathcal{T}_h}^2 &\leq B_h(\xi, \xi) = B_h(v, \xi) \leq \hat{C}_1 \| v \|_{\mathcal{T}_h} \| \xi \|_{\mathcal{T}_h} \\ &\Rightarrow \| \xi \|_{\mathcal{T}_h} \leq \frac{\hat{C}_1}{\delta} \| v \|_{\mathcal{T}_h}, \end{aligned}$$

assim podemos concluir:

$$\| (p, p^\Gamma) - (p_h, p_h^\Gamma) \|_{\mathcal{T}_h} = \| e \|_{\mathcal{T}_h} \leq \| v \|_{\mathcal{T}_h} + \| \xi \|_{\mathcal{T}_h} \leq \underbrace{\left(\frac{\hat{C}_1}{\delta} + 1 \right)}_{\hat{C}_2} \| v \|_{\mathcal{T}_h}.$$

Vamos obter estimativas para o erro em cada um dos termos que definem $||| \cdot |||_{\mathcal{T}_h}$, sendo que:

$$|||v|||_{\mathcal{T}_h}^2 = |||p - \Pi_h^b(p)|||_{DG}^2 + |||p^\Gamma - \Pi_{\Gamma_h}^b(p^\Gamma)|||_{\Gamma}^2 + |||v|||_{AC}^2.$$

Para reduzir a notação, definimos $v_h = p - \Pi_h^b(p)$ e $v^\Gamma = p^\Gamma - \Pi_{\Gamma_h}^b(p^\Gamma)$.

- Começamos com o segundo termo que define a norma $||| \cdot |||_{\mathcal{T}_h}$,

$$\begin{aligned} |||v^\Gamma|||_{\Gamma}^2 &= \int_{\Gamma_h} l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}} |\nabla_{\tau} v^\Gamma|^2 + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \frac{1}{\sigma_e} \{l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \cdot \nabla_{\tau} v^\Gamma\}^2 + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_e [v^\Gamma]^2 \\ &= T_1 + T_2 + T_3. \end{aligned}$$

Seja $e \in \mathfrak{S}_h^I(\Gamma)$, $e = E_L \cap E_R$, assim temos para T_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_e} \{l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} v^\Gamma\}^2 &= \frac{1}{\sigma_e} \left(\frac{l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}}}{2} (\nabla_{\tau} v_L^\Gamma + \nabla_{\tau} v_R^\Gamma) \right)^2 \\ &\leq \sigma_e^{-1} \frac{(l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}})^2}{2} \left((\nabla_{\tau} v_L^\Gamma)^2 + (\nabla_{\tau} v_R^\Gamma)^2 \right) \\ &= \sigma_e^{-1} \frac{(l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}})^2}{2} (\|\nabla_{\tau} v_L^\Gamma\|_{L^2(\partial E_L)}^2 + \|\nabla_{\tau} v_R^\Gamma\|_{L^2(\partial E_R)}^2). \end{aligned}$$

Pela desigualdade multiplicativa do traço, Lema 3.3.1 e pela desigualdade inversa, Lema 3.3.2 sobre Γ_h , obtemos:

$$\|\nabla_{\tau} v_L^\Gamma\|_{L^2(\partial E_L)}^2 \leq C_1 \frac{b^2}{h_{E_L}} |\nabla_{\tau} v_L^\Gamma|_{L^2(E_L)}^2,$$

assim, pelo resultado acima temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_e} \{l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} v^\Gamma\}^2 &\leq \frac{(l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}})^2}{2} \frac{1}{\sigma_e} \left(C_1 \frac{b^2}{h_{E_L}} |\nabla_{\tau} v_L^\Gamma|_{L^2(E_L)}^2 + C_1 \frac{b^2}{h_{E_R}} |\nabla_{\tau} v_R^\Gamma|_{L^2(E_R)}^2 \right) \\ &= \frac{(l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}})^2}{2} \cdot \hat{\sigma}_{\Gamma}^{-1} \frac{h_i}{b^2 l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}}} \left(C_1 \frac{b^2}{h_{E_L}} |\nabla_{\tau} v_L^\Gamma|_{L^2(E_L)}^2 + C_1 \frac{b^2}{h_{E_R}} |\nabla_{\tau} v_R^\Gamma|_{L^2(E_R)}^2 \right) \end{aligned}$$

com $h_i = \min\{h_{E_L}, h_{E_R}\}$. Da estimativa para o erro do Lema 3.6.2, conseguimos:

$$\frac{1}{\sigma_e} \{l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} v^\Gamma\}^2 \leq C_1 \frac{l_{\Gamma} k_{\Gamma}^{\mathcal{J}}}{2} \hat{\sigma}_{\Gamma}^{-1} \left(|\nabla_{\tau} v_L^\Gamma|_{L^2(E_L)}^2 + |\nabla_{\tau} v_R^\Gamma|_{L^2(E_R)}^2 \right)$$

$$\leq C_1 \frac{l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}}}{2} \hat{\sigma}_\Gamma^{-1} \left(\frac{h_{E_L}^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p_L^\Gamma|_{H^s(E_L)}^2 + \frac{h_{E_R}^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p_R^\Gamma|_{H^s(E_R)}^2 \right).$$

Pela desigualdade acima e lembrando que cada aresta $E \in \Gamma_h$ tem dois vértices, temos que:

$$T_2 \leq \frac{h_\Gamma^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} C_1 \hat{\sigma}_\Gamma^{-1} \cdot l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}} \sum_{E \in \Gamma_h} |p^\Gamma|_{H^s(E)}^2$$

com $h_\Gamma = \max_{E \in \Gamma_h} h_E$.

Também para T_1 , temos a seguinte estimativa:

$$T_1 = l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}} \sum_{E \in \Gamma_h} |v^\Gamma|_{H^1(E)} \leq \frac{h_\Gamma^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} \cdot l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}} \sum_{E \in \Gamma_h} |p^\Gamma|_{H^s(E)}^2, \quad (4.4.5)$$

assim chegamos a que:

$$T_1 + T_2 \leq \frac{h_\Gamma^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} \underbrace{(l_\Gamma k_\Gamma + C_1 \hat{\sigma}_\Gamma^{-1} \cdot l_\Gamma k_\Gamma^{\mathcal{T}})}_{C_2} |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2.$$

Para T_3 , se $e \in \mathfrak{S}_h^f(\Gamma)$, pelo Lema 3.6.2, temos:

$$v^\Gamma(e) = p^\Gamma(e) - \Pi_{\Gamma_h}^b(p^\Gamma)(e) = p^\Gamma(i) - p^\Gamma(e) = 0,$$

concluindo:

$$T_3 = 0.$$

Para finalmente chegar à próxima estimativa em $||| \cdot |||_\Gamma$,

$$||| v^\Gamma |||_\Gamma^2 = T_1 + T_2 + T_3 \leq C_2 \frac{h_\Gamma^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2 \quad (4.4.6)$$

com $\mu = \min\{b+1, s\}$.

- Por um procedimento semelhante ao acima (veja por exemplo [ARNOLD et al. 2002]), temos a seguinte estimativa para $||| v_h |||_{DG}$.

$$||| v_h |||_{DG}^2 \leq C_3 \frac{h^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 \quad (4.4.7)$$

sendo $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$.

- Resta apenas fazer as estimativas para o último somatório em $||| \cdot |||_{\mathcal{T}_h}$.

$$|||v|||_{AC}^2 = \int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma (\{v_h\} - v^\Gamma)^2 + \int_{\Gamma_h} \beta_\Gamma [[v_h]]^2.$$

Novamente, usando a segunda estimativa do Lema 3.3.3, dizemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_h} \beta_\Gamma [[v_h]]^2 &\leq \beta_\Gamma \frac{h^{2\mu-1}}{b^{2s-1}} \sum_{E \in \Gamma_h, E=T_L \cap T_R} (|p_L|_{H^s(T_L)}^2 + |p_R|_{H^s(T_R)}^2) \\ &= \frac{h^{2\mu-1}}{b^{2s-1}} \sum_{\partial T \cap \Gamma_h \neq \emptyset} |p|_{H^s(T)}^2 \leq \frac{h^{2\mu-2}}{b^{2s-2}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2, \end{aligned}$$

sempre que $h \in (0, 1)$.

Continuando a estimativa, temos:

$$\int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma (\{v_h\} - v^\Gamma)^2 \leq \alpha_\Gamma \int_{\Gamma_h} \{v_h\}^2 + 2|\{v_h\} \cdot v^\Gamma| + (v^\Gamma)^2$$

para:

$$\alpha_\Gamma \int_{\Gamma_h} \{v_h\}^2 \leq \alpha_\Gamma \frac{h^{2\mu-1}}{2b^{2s-1}} \sum_{\partial T \cap \Gamma_h \neq \emptyset} |p|_{H^s(T)}^2 \leq C_6 \frac{h^{2\mu-2}}{b^{2s-2}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2$$

, e usando as estimativas do Lema 3.6.2, temos que:

$$\alpha_\Gamma \int_{\Gamma_h} (v^\Gamma)^2 \leq \alpha_\Gamma \frac{h_\Gamma^{2\mu}}{b^{2s}} \sum_{E \in \Gamma_h} |p^\Gamma|_{H^s(E)}^2 \leq C_7 \frac{h_\Gamma^{2\mu-2}}{b^{2s-2}} |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2 \quad (4.4.8)$$

sempre que $h_\Gamma \in (0, 1)$.

Similarmente,

$$\begin{aligned} 2\alpha_\Gamma \int_{\Gamma_h} |\{v_h\} \cdot v^\Gamma| &\leq 2\alpha_\Gamma \left(\sum_{E \in \Gamma_h} \|\{v_h\}\|_{L^2(E)} \cdot \sum_{E \in \Gamma_h} \|v^\Gamma\|_{L^2(E)} \right) \\ &\leq 2 \left(C_6^{1/2} \frac{h^{\mu-1}}{b^{s-1}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)} \cdot C_7^{1/2} \frac{h_\Gamma^{\mu-1}}{b^{s-1}} |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)} \right) \\ &\leq C_6 \frac{h^{2\mu-2}}{b^{2s-2}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + C_7 \frac{h_\Gamma^{2\mu-2}}{b^{2s-2}} |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2, \end{aligned}$$

para que possamos concluir que:

$$\int_{\Gamma_h} \alpha_{\Gamma}(\{v_h\} - v^{\Gamma})^2 \leq 2C_6 \frac{h^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + 2C_7 \frac{h_{\Gamma}^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p^{\Gamma}|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2$$

e assim, dizer que:

$$\|v\|_{AC}^2 \leq \underbrace{(1 + 2C_6)}_{C_8} \frac{h^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + 2C_7 \frac{h_{\Gamma}^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p^{\Gamma}|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2. \quad (4.4.9)$$

Por fim, somando todas as contribuições e levando em conta que $h_{\Gamma} \leq h$, concluímos a prova,

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{T}_h}^2 &\leq (C_8 + C_3) \frac{h^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + (C_2 + 2C_7) \frac{h_{\Gamma}^{2(\mu-1)}}{b^{2(s-1)}} |p^{\Gamma}|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2 \\ &\leq Ch^{2(\mu-1)} (|p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + |p^{\Gamma}|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2) \end{aligned}$$

■

5 Implementação

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns detalhes relacionados à implementação computacional do método de Galerkin Descontínuo para o problema elíptico que modela o problema de escoamento em meios porosos fraturados, conforme o descrito na equação (4.1.4). Iniciamos apresentado na seção 5.1, com um olhar matricial do problema variacional, equação (4.2.2), a mesma irá nos auxiliar nas implementações nos domínios $\Omega_1 \cup \Omega_2$ e Γ , nas seções 5.2 e 5.3 respectivamente. Finalizamos o capítulo com a descrição da implementação das condições de acoplamento, na seção 5.4.

5.1 Formulação Matricial

Nesta seção, falaremos sobre a caracterização matricial do método de Galerkin Descontínuo, definição 4.2.1. Para isso, seja (p, p^Γ) uma solução exata do problema modelo (4.1.4) sobre $V^* \times V^\Gamma$, e (p_h, p_h^Γ) uma solução aproximada pelo método de Galerkin Descontínuo no espaço $V_h^b \times V_h^\Gamma$.

Primeiramente, considere N_h o numero de triângulos que formam a malha \mathcal{T}_h , $T_i \in \mathcal{T}_h$ com $i = 1, \dots, N_h$. Assim para facilitar os cálculos das integrais do método de Galerkin Descontínuo, vamos associar cada T_i a um triângulo mestre \hat{T} , formado pelos vértices $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, dado por:

$$\hat{T} = \{(r, s) / (r, s) \geq -1; r + s \leq 0\}.$$

A aplicação afim desse elemento mestre \hat{T} em qualquer outro triângulo $T_i \in \mathcal{T}_h$, é feita pela aplicação $\psi_{T_i} : \hat{T} \rightarrow T_i$, tal que:

$$\psi_{T_i}(r, s) = -\frac{r+s}{2}v^1 + \frac{r+1}{2}v^2 + \frac{s+1}{2}v^3, \quad (5.1.1)$$

sendo v^1, v^2, v^3 os vértices do triângulo T_i . Na obtenção da aplicação afim inversa ψ^{-1} , usaremos as seguintes derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_T}{\partial r}(r, s) &= (x_r, y_r) = \frac{v^2 - v^1}{2} \\ \frac{\partial \psi_T}{\partial s}(r, s) &= (x_s, y_s) = \frac{v^3 - v^1}{2} \end{aligned}$$

e o Jacobiano dado por:

$$J_T = \det \begin{pmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{pmatrix} = x_r y_s - x_s y_r.$$

Desta forma se consideramos $v^1 = (x_1, y_1)$, $v^2 = (x_2, y_2)$ e $v^3 = (x_3, y_3)$, temos $\Psi_{T_i}^{-1} : T_i \rightarrow \hat{T}$ dada por:

$$\Psi_{T_i}^{-1}(x, y) = \frac{1}{J_{T_i}} \begin{pmatrix} y_s & -x_s \\ -y_r & x_r \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{x_2 + x_3}{2} \\ \frac{y_2 + y_3}{2} \end{pmatrix} \right]. \quad (5.1.2)$$

A seguir, definimos a seguinte base ortonormal do espaço polinomial $\mathbb{P}_b(\hat{T})$:

$$\hat{\phi}_k(r, s) = \sqrt{2} P_l^{(0,0)}(a) P_j^{(2l+1,0)}(s) (1-s)^l$$

$$k = 1, 2, \dots, N_p,$$

com,

$$k = j + (b+1)l + 1 - \frac{l}{2}(l-1), \quad (l, j) \geq 0, \quad l + j \leq b,$$

$$a = 2 \frac{1+r}{1-s} - 1,$$

$$N_p = \frac{(b+1)(b+2)}{2}$$

e $P_n^{(\alpha, \beta)}$ é o polinômio de Jacobi de ordem n . Lembre-se que para $\alpha = \beta = 0$ temos os polinômios de Legendre, ver [HESTHAVEN J.; WARBURTON 2007], seção 6.1.

Desta maneira chegamos à seguinte base do espaço polinomial $\mathbb{P}_b(T_i)$, para $T_i \in \mathcal{T}_h$:

$$\varphi_{i,k}(x, y) = \hat{\phi}_k(\Psi_{T_i}^{-1}(x, y)),$$

$$k = 1, 2, \dots, N_p \quad i = 1, \dots, N_h.$$

Podemos introduzir uma base global Θ em V_h^b , estendendo por zero as funções da base local

$\{\varphi_{i,k}\}_{k=1,\dots,N_p}$, para cada $T_i \in \mathcal{T}_h$.

$$\Theta = \{\varphi_{(1,1)}, \dots, \varphi_{(1,N_p)}, \varphi_{(2,1)}, \dots, \varphi_{(2,N_p)}, \dots, \varphi_{(N_h,1)}, \dots, \varphi_{(N_h,N_p)}\}.$$

Seguindo essa ordenação, enumeraremos globalmente as funções base em Θ de 1 a $N = N_h \cdot N_p$, onde denotamos por N a dimensão da base global. Apresentamos a função de índice global $\mathcal{N} : \{1, \dots, N_h\} \times \{1, \dots, N_p\} \rightarrow \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{N}(i, k) = (i - 1) \times N_p + k$, que para qualquer elemento da base local $\varphi_{i,k} \in \mathbb{P}_b(T_i)$ retorna seu índice global em Θ , reorganizando Θ da seguinte forma:

$$\Theta = \{\varphi_1, \dots, \varphi_{\mathcal{N}(1,N_p)}, \dots, \varphi_{\mathcal{N}(N_h,1)}, \dots, \varphi_N\}.$$

Assim, vamos considerar a seguinte representação para solução discreta do método DG $p_h \in V_h^b$:

$$p(x, y) \simeq p_h(x, y) = \sum_{i_{\mathcal{N}}=1}^N \hat{p}_{i_{\mathcal{N}}} \varphi_{i_{\mathcal{N}}}(x, y) = \sum_{i=1}^{N_h} \sum_{k=1}^{N_p} \hat{p}_{i,k} \varphi_{i,k}(x, y).$$

Agora passaremos a falar da representação de p^Γ sobre a fratura. Se N_Γ é o número de arestas que formam a malha Γ_h . Cada aresta $E_i \in \Gamma_h$, $i = 1, \dots, N_\Gamma$, associamos por meio de uma aplicação afim ao domínio $I = [-1, 1]$. Para isso consideramos a aplicação afim $\tilde{\psi}_E(\xi) : I \rightarrow E$, tal que:

$$\tilde{\psi}_E(\xi) = \frac{(1 - \xi)}{2} v^1 + \frac{(1 + \xi)}{2} v^2, \quad (5.1.3)$$

com $v^1 = (x_1, y_1)$ e $v^2 = (x_2, y_2)$ os vértices de E . Assim temos que $\tilde{\psi}_E(\xi) = (x(\xi), y(\xi))$, com:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{1 - \xi}{2} x_1 - \frac{1 + \xi}{2} x_2, \\ y(\xi) &= \frac{1 - \xi}{2} y_1 - \frac{1 + \xi}{2} y_2. \end{aligned}$$

Devido ao uso de arestas verticais no desenvolvimento deste trabalho, vamos falar do inverso parcial de $\tilde{\psi}_E$. Se $(x, y) \in E$ temos:

$$\tilde{\psi}_E^{-1}(x, y) = \xi(y) = \frac{2y}{y_2 - y_1} - \frac{y_2 + y_1}{y_2 - y_1}.$$

Continuamente, seja a seguinte base do espaço polinomial $\mathbb{P}_b(I)$:

$$\hat{\phi}_k(\xi) = \hat{P}_{k-1}(\xi), \quad k = 1, 2, \dots, N_{p1}$$

com $N_{p1} = \text{Dim}(\mathbb{P}_b(I)) = b + 1$ e \hat{P}_{k-1} é o polinômio de Legendre de ordem k (ver seção 3.1 em [HESTHAVEN J.; WARBURTON 2007]).

Assim, uma base para o espaço $\mathbb{P}_b(E_i)$ é dado por:

$$\phi_{i,k}(x,y) = \hat{\phi}_k(\tilde{\Psi}_{E_i}^{-1}(x,y))$$

$$k = 1, 2, \dots, N_{p1}, \quad i = 1, \dots, N_\Gamma.$$

Novamente, apresentamos uma base global Θ_Γ em V_h^Γ , definida por:

$$\Theta_\Gamma = \{\phi_{(1,1)}, \dots, \phi_{(1,N_{p1})}, \phi_{(2,1)}, \dots, \phi_{(2,N_{p1})}, \dots, \phi_{(N_\Gamma,1)}, \dots, \phi_{(N_\Gamma,N_{p1})}\}.$$

Sendo essa ordenação, enumeraremos globalmente as funções base em Θ_Γ de $N + 1 = N_h \cdot N_p + 1$ a $M = N_\Gamma \cdot N_{p1} + N$, onde denotamos por $M - N$ a dimensão dessa base global. Apresentamos a função de índice global $\mathcal{N}_\Gamma : \{1, \dots, N_\Gamma\} \times \{1, \dots, N_{p1}\} \rightarrow \{N, \dots, M\}$, $\mathcal{N}_\Gamma(i,k) = ((i-1) \times N_{p1}) + k + N$, que para qualquer base local $\phi_{i,k} \in \mathbb{P}_b(E_i)$ retorna seu índice global em Θ_Γ e reorganizando:

$$\Theta_\Gamma = \{\phi_{N+1}, \dots, \phi_{\mathcal{N}_\Gamma(1,N_{p1})}, \dots, \phi_{\mathcal{N}_\Gamma(N_\Gamma,1)}, \dots, \phi_M\}.$$

Portanto, vamos considerar a seguinte forma para solução $p_h^\Gamma \in V_h^\Gamma$:

$$p^\Gamma(x,y) \simeq p_h^\Gamma(x,y) = \sum_{i_{\mathcal{N}_\Gamma}=N}^M \hat{p}_{i_{\mathcal{N}_\Gamma}} \phi_{i_{\mathcal{N}_\Gamma}}(x,y) = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \sum_{k=1}^{N_{p1}} \hat{p}_{i,k}^\Gamma \phi_{i,k}(x,y).$$

Se definirmos o vetor $\vec{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_N, \hat{p}_{N+1}^\Gamma, \dots, \hat{p}_M^\Gamma)^T$, vamos reduzir a equação (4.2.2) ao sistema linear $A\vec{p} = \vec{f}$, onde para $A = (a_{i,j})_{M \times M}$ e $\vec{f} = (f_1, \dots, f_M)^T$ sendo que:

- Se $i, j \leq N$ temos:

$$a_{i,j} = \int_{\mathcal{T}_h} (K \nabla \varphi_j) \cdot \nabla_h \varphi_i - \left(\int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{\vec{n} \cdot K \nabla \varphi_j\} [[\varphi_i]] + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_h} \{\vec{n} \cdot K \nabla_h \varphi_i\} [[\varphi_j]] \right) + \int_{\mathfrak{S}_h - \Gamma_\Gamma} \sigma_E [[\varphi_j]] [[\varphi_i]] + CA.A_{ij}, \quad (5.1.4)$$

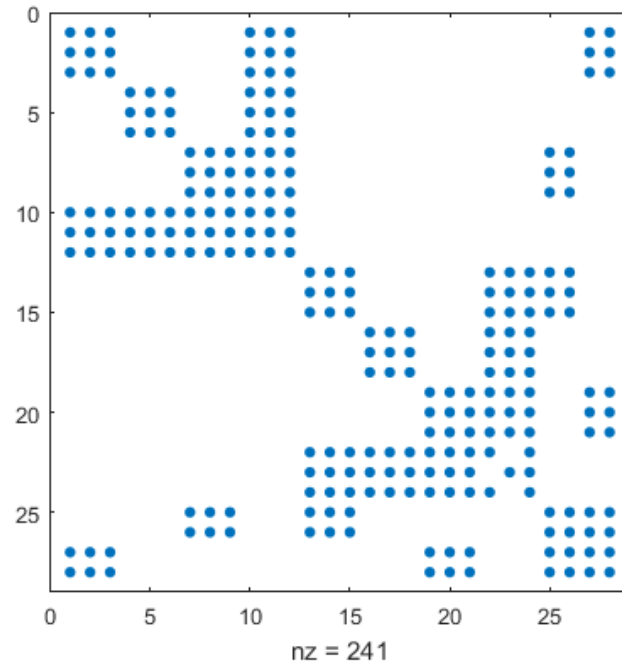


Figure 5.1.1: Padrão de distribuição de elementos não nulos na matriz de rigidez A , para $N_h = 8$, $N_p = 3$, $N_\Gamma = 2$ e $N_{p1} = 2$.

$$f_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f_h \phi_i + \int_{\mathfrak{S}_h^N} g_N \phi_i - \int_{\mathfrak{S}_h^D} (\vec{n} \cdot K \nabla_h \phi_i) g_D + \int_{\mathfrak{S}_h^D} \sigma \phi_i g_D.$$

- Se $N < i, j \leq M$,

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \int_{\Gamma_h} l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau \phi_j \cdot \nabla_\tau \phi_i - \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} \{l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau \phi_j \cdot \vec{n}\} [[\phi_i]] \\ &- \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} \{l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \vec{n} \cdot \nabla_\tau \phi_i\} [[\phi_j]] + \sum_{\mathfrak{S}_h(\Gamma)} \sigma_i [[\phi_j]] [[\phi_i]] + CA.C_{ij}, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$f_i = \int_{\Gamma_h} f_\Gamma \phi_i - \sum_{\mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} (l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla_\tau \phi_i \cdot \vec{n}) g_\Gamma + \sum_{\mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} \sigma \phi_i g_\Gamma.$$

Aqui, as componentes CA.A e CA.C, tem haver com a contribuição das condições de acoplamento, tópico abordado na seção 5.4.

Se $\phi_i \in \mathbb{P}_b(T)$ e $\phi_j \in \mathbb{P}_b(T^*)$, tal que $T \cap T^* = \emptyset$, temos que $a_{ij} = 0$, ver Figura 5.1.1.

O mesmo acontece para os $\phi \in \Theta_\Gamma$.

Para encontrar o vetor \vec{p} do problema matricial, computacionalmente, vamos dividir a implementação nos domínios $\Omega \setminus \Gamma$, Γ e nas condições de acoplamento, a seguir.

5.2 Implementação no Domínio Bidimensional

Nesta seção, falaremos sobre a implementação computacional do método de Galerkin Descontínuo sobre $\Omega \setminus \Gamma$; que está relacionado em encontrar os $a_{i,j}$ e f_i para $i, j \leq N$, ver equação (5.1.4).

- Seja $1 \leq l \leq N_h$. Para $1 \leq k_1, k_2 \leq N_p$ tal que $j = \mathcal{N}(l, k_1)$ e $i = \mathcal{N}(l, k_2)$, temos que:

$$\int_{\mathcal{T}_h} (K \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i = \int_{T_l} (K \nabla \varphi_j) \nabla \varphi_i \quad (5.2.1)$$

$$\int_{\mathcal{T}_h} f_h \varphi_i = \int_{T_l} f_h \varphi_i. \quad (5.2.2)$$

Lembre-se da extensão zero das funções de base $\mathbb{P}_b(T_l)$.

Considere a função afim ψ_T descrita na equação (5.1.1). Deste modo, para fazer a associação da função $w(x, y)$, $(x, y) \in T$ com \hat{T} , temos:

$$\tilde{w}(\varepsilon) = w(\psi(\varepsilon)) = w(\psi_T^1(\varepsilon), \psi_T^2(\varepsilon)) = w(x(\varepsilon), y(\varepsilon)) \quad (5.2.3)$$

com $\varepsilon = (r, s) \in \hat{T}$. Assim, pela regra da cadeia obtemos as derivadas parciais de $\tilde{w}(r, s)$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_T^1}{\partial r} & \frac{\partial \psi_T^2}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi_T^1}{\partial s} & \frac{\partial \psi_T^2}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \left(\frac{D\psi_T}{D\varepsilon} \right)^t \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix}$$

com a matriz $\left(\frac{D\psi_T}{D\varepsilon} \right)$ é a matriz jacobiana da aplicação ψ_T . Desta forma:

$$\nabla \tilde{w}(\varepsilon) = \left(\frac{D\psi_T}{D\varepsilon} \right)^t \nabla w(x, y),$$

onde A^t denota a matriz transposta de A .

Logo o gradiente $\nabla w(x, y)$ é dado por:

$$\nabla w(x, y) = \left(\frac{D\psi_T}{D\varepsilon} \right)^{-t} \nabla \tilde{w}(\varepsilon).$$

Se assumimos que:

$$\left(\frac{D\psi_T}{D\boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_T^1}{\partial r} & \frac{\partial \psi_T^1}{\partial s} \\ \frac{\partial \psi_T^2}{\partial r} & \frac{\partial \psi_T^2}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_s \\ y_r & y_s \end{pmatrix},$$

então temos:

$$\left(\frac{D\psi_T}{D\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{-t} = \frac{1}{J_T} \begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \quad (5.2.4)$$

para $J_T = \det \left(\frac{D\psi_T}{D\boldsymbol{\varepsilon}} \right) = x_r y_s - y_r x_s$.

Agora podemos reescrever a integral (5.2.1), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{T}_l} K(x, y) \nabla \varphi_j(x, y) \cdot \nabla \varphi_i(x, y) dx dy \\ &= \int_{\hat{T}} J_{T_l} \left[K(\psi_{T_l}(\boldsymbol{\varepsilon})) \left(\frac{D\psi_{T_l}}{D\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{-t} \nabla \hat{\varphi}_{k_1}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] \cdot \left[\left(\frac{D\psi_{T_l}}{D\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{-t} \nabla \hat{\varphi}_{k_2}(\boldsymbol{\varepsilon}) \right] d\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \int_{\hat{T}} J_{T_l} K(\psi_{T_l}(\boldsymbol{\varepsilon})) \left[\frac{1}{J_{T_l}} \begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\frac{1}{J_{T_l}} \begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_2}}{\partial r}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_2}}{\partial s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \end{pmatrix} \right] d\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Calculamos as integrais acima pela regra de quadratura Gaussiana sobre as funções base (para o tópico da quadratura Gaussiana ver discussão em Apêndice A). Para isso, considere $\boldsymbol{\varepsilon}^g = (r^g, s^g)$ como sendo os NQG pontos de Gauss e ω_g os respectivos pesos Gaussianos, logo temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{T}_l} K(x, y) \nabla \varphi_j(x, y) \cdot \nabla \varphi_i(x, y) dx dy = \\ & \sum_{g=1}^{NQG} \frac{1}{J_{T_l}} K(\psi_{T_l}(\boldsymbol{\varepsilon}^g)) \omega_g \left[\begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\boldsymbol{\varepsilon}^g) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\boldsymbol{\varepsilon}^g) \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_2}}{\partial r}(\boldsymbol{\varepsilon}^g) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_2}}{\partial s}(\boldsymbol{\varepsilon}^g) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Seja $DV_r(g, j) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial r}(r^g, s^g)$, $DV_s(g, j) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial s}(r^g, s^g)$ e $(X(:, l), Y(:, l)) = \psi_{T_l}(\varepsilon)$, aqui ε representa os vetores (r, s) com todos os pontos de Gauss. Assim finalmente, temos para a equação (5.2.1) a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned} & \int_{T_l} K(x, y) \nabla \phi_j(x, y) \cdot \nabla \phi_i(x, y) dx dy \\ &= \left[\frac{1}{J_{T_l}} (\omega \cdot * K(X(:, l), Y(:, l))) \cdot * (y_s DV_r(:, j) - y_r DV_s(:, j)) \right]' * (y_s DV_r - y_r DV_s) \\ &+ \left[\frac{1}{J_{T_l}} (\omega \cdot * K(X(:, l), Y(:, l))) \cdot * (-x_s DV_r(:, i) + x_r DV_s(:, i)) \right]' * (-x_s DV_r + x_r DV_s). \end{aligned}$$

Do mesmo jeito, se consideramos $V(g, i) = \hat{\phi}_{k_2}(r^g, s^g)$, temos para a integral (5.2.2), a seguinte aproximação :

$$\begin{aligned} \int_{T_l} f_h(x, y) \phi_i(x, y) dx dy &= \int_{\hat{T}} J_{T_l} f_h(\psi_T(\varepsilon)) \hat{\phi}_{k_2}(\varepsilon) d\varepsilon \\ \sum_{g=1}^{NQG} J_{T_l} \omega_g f_h(\psi_{\kappa}(\varepsilon_g)) \hat{\phi}_{k_2}(\varepsilon_g) &= J_{T_l} (\omega \cdot * f_h(X(:, l), Y(:, l)))' * V(:, i). \end{aligned}$$

Abaixo apresentamos a montagem computacional no *Matlab*[®] para a integral (5.2.1). Aqui o tensor de permeabilidade $K = \text{acof}K$, é condicionado pelas regiões Ω_1 e Ω_2 .

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%           % Element assembling
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

indexSparseEnd=0;
for l=1:N_h
    if Regiao(l) <= 1
        AuxV=(1/Jk(l)) .* (acofK1(X(:,l),Y(:,l)) .* w);
    else
        AuxV=(1/Jk(l)) .* (acofK2(X(:,l),Y(:,l)) .* w);
    end
    AuxV1=(ys(l)*DVr - yr(l)*DVs);
    AuxV2=(-xs(l)*DVr + xr(l)*DVs);
    j1=indexGlobal(Np,l,1);
    for k=1:Np % linha

```



```

indexSparse=indexSparseEnd+1;
indexSparseEnd=indexSparse+Np-1;
iSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=indexGlobal(Np,1,k);
jSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=j1:j1+Np-1;
sSparse(indexSparse:indexSparseEnd) = (AuxV.*AuxV1(:,k))'*AuxV1
                                     + (AuxV.*AuxV2(:,k))'*AuxV2;

end

end

```

- Seja $1 \leq i, j \leq N$, índices descritos acima, $E \in \mathfrak{S}_h^i$, tal que $\varphi_i \in \mathbb{P}_b(T_R), \varphi_j \in \mathbb{P}_b(T_L)$ e $E = T_R \cap T_L$. Para calcular

$$-\int_E \left(\{ (K\nabla\varphi_j \cdot n) \} [[\varphi_i]] + [[\varphi_j]] \{ (K\nabla\varphi_i \cdot n) \} \right) + \int_E \sigma_E [[\varphi_j]] [[\varphi_i]] \quad (5.2.5)$$

temos que:

$$\begin{aligned}
& - \{ n \cdot (K\nabla u) \} [[v]] - [[u]] \{ n \cdot (K\nabla v) \} + \sigma [[u]] [[v]] = \\
& \quad - \frac{1}{2} \left((n \cdot (K\nabla u^L)) v^L + u^L (n \cdot (K\nabla v^L)) \right) + \sigma u^L v^L \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(-(n \cdot (K\nabla u^L)) v^R + u^L (n \cdot (K\nabla v^R)) \right) - \sigma u^L v^R \\
& \quad - \frac{1}{2} \left((n \cdot (K\nabla u^R)) v^L - u^R (n \cdot (K\nabla v^L)) \right) - \sigma u^R v^L \\
& \quad - \frac{1}{2} \left(-(n \cdot (K\nabla u^R)) v^R - u^R (n \cdot (K\nabla v^R)) \right) + \sigma u^R v^R.
\end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Assim, a integral acima (5.2.5), pode ser decomposta nos blocos LL, RL, LR, RR. Neste trabalho vamos calcular o bloco LR.

$$\int_E \left[-\frac{1}{2} \left(-(n \cdot (K\nabla\varphi_j^L)) \varphi_i^R + \varphi_j^L (n \cdot (K\nabla\varphi_i^R)) \right) - \sigma_E \varphi_j^L(x,y) \varphi_i^R(x,y) \right] ds. \quad (5.2.7)$$

Para calcular a integral sobre a aresta E, formada pelos vértices v^1 e v^2 , vamos lembrar da aplicação $\tilde{\psi}_E(\xi) : I \rightarrow E$, exposta na equação (5.1.3). Considere $v^1 = (x_1, y_1)$ e $v^2 = (x_2, y_2)$, assim temos que $\tilde{\psi}_E(\xi) = (x(\xi), y(\xi))$, com:

$$\begin{aligned}
x(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} x_1 - \frac{1+\xi}{2} x_2 \\
y(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} y_1 - \frac{1+\xi}{2} y_2,
\end{aligned}$$

concluindo que:

$$\frac{d\tilde{\psi}_E^1}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2}; \quad \frac{d\tilde{\psi}_E^2}{d\xi} = \frac{y_2 - y_1}{2},$$

e deste modo o comprimento de arco diferencial ds no plano xy pode ser escrito em termos da coordenada normalizada ξ

$$ds(\xi) = J_E d\xi = \left[\left(\frac{d\tilde{\psi}_E^1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\psi}_E^2}{d\xi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\xi.$$

Sejam rb e wb como sendo os $NQGb$ pontos e os pesos da quadratura de Gauss no intervalo $I = [-1, 1]$, Os pesos e nós para a quadratura gaussiana podem ser calculados usando JacobiGQ.m, conforme o discutido no Apêndice A. Por conseguinte:

$$\begin{aligned} \int_E \sigma_E \varphi_j^L(x, y) \varphi_i^R(x, y) ds &= \int_{-1}^1 \sigma_E J_E \varphi_j^L(\tilde{\psi}_E(\xi)) \varphi_i^R(\tilde{\psi}_E(\xi)) d\xi & (5.2.8) \\ &= \sum_{i=1}^{NQGb} \sigma_E J_E \varphi_j^L(\tilde{\psi}_E(rb^i)) \varphi_i^R(\tilde{\psi}_E(rb^i)) wb^i \\ &= \sum_{i=1}^{NQGb} \sigma_E J_E \hat{\varphi}_{k_1}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) \hat{\varphi}_{k_2}(\psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) wb^i, \end{aligned}$$

com $\psi_T^{-1} : T \rightarrow \hat{T}$ a inversa da aplicação afim ψ_T .

Para a implementação computacional, considere $(Xb(:, l), Yb(:, l)) = \tilde{\psi}_E(rb)$, onde l é o número da aresta interior E que está sendo considerada, ou seja, $(Xb(:, l), Yb(:, l))$ armazena as coordenadas x e y correspondentes de rb na aresta l . Em Xb, Yb temos a seguinte disposição: as colunas $1 : NI$ referem-se as NI arestas interiores, as colunas $NI + 1 : NI + NbD$ referem-se as arestas da fronteira de Dirichlet e as colunas $NI + NbD + 1 : NI + NbD + NbN$ referem-se as arestas da fronteira de Neumann.

Considere $Dimw = NQGb$. Para as arestas interiores $E = T_L \cap T_R$ considere também $(RbI(l, 1 : Dimw), SbI(l, 1 : Dimw)) = \psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb))$, como sendo as coordenadas (r, s) em \hat{T} , corresponde ao elemento da esquerda T_L e referentes ao vetor dos pontos de Gauss rb ; e $(RbI(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw), SbI(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)) = \psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb))$, sendo as coordenadas (r, s) do elemento da direita T_R , correspondente ao vetor rb .

Seja $VbI(1 : Dimw, j, l) = \hat{\varphi}_{k_1}(RbI(l, 1 : Dimw)', SbI(l, 1 : Dimw)')$, as funções base avaliadas nos nós referente ao elemento da esquerda T_L . $VbI(Dimw + 1 : 2 * Dimw, j, l) =$

$\hat{\phi}_{k_1}(RbI(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)', Sbl(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)')$, as funções base avaliadas nos nós referente ao elemento da direita T_R .

Da mesma forma definimos: $DVrbI(1 : Dimw, j, l) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial r}(RbI(l, 1 : Dimw)', Sbl(l, 1 : Dimw)')$ e $DVsbI(1 : Dimw, j, l) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial s}(RbI(l, 1 : Dimw)', Sbl(l, 1 : Dimw)')$, ou seja, as derivadas das funções base avaliadas nos nós referente ao elemento da esquerda T_L . $DVrbI(Dimw + 1 : 2 * Dimw, j, l) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial r}(RbI(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)', Sbl(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)')$ e $DVsbI(Dimw + 1 : 2 * Dimw, j, l) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial s}(RbI(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)', Sbl(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)')$, as derivadas das funções base avaliadas nos nós referente ao elemento da direita T_R .

Agora podemos reescrever a integral de superfície (5.2.8):

$$\begin{aligned} & \int_E \sigma_E \varphi_j^L(x, y) \varphi_i^R(x, y) ds \\ &= \sigma_E J_E (wb. * VbI(1 : Dimw, j, l))' VbI(Dimw + 1 : 2 * Dimw, i, l) \end{aligned}$$

que dá origem ao bloco cLR .

Continuando com o calculo da intragral (5.2.5) na face $E \in \mathfrak{S}_h^i$, vamos precisar encontrar a seguinte integral:

$$\int_E (n \cdot (K \nabla \varphi_j^L(x, y))) \varphi_i^R(x, y) ds. \quad (5.2.9)$$

Para um elemento T formado pelos vértices v^1, v^2, v^3 , construímos as arestas desse triângulo de forma que a aresta i é oposta ao vértice i . Então, podemos organizar as arestas da seguinte maneira : aresta 1 = $v^2 v^3$, aresta 2 = $v^3 v^1$ e aresta 3 = $v^1 v^2$. Desta forma, as normais nessas arestas são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Aresta 1: } n^1 &= -\frac{\nabla r + \nabla s}{\|\nabla r + \nabla s\|} = \frac{(y_s - y_r, -x_s + x_r)}{\sqrt{(y_s - y_r)^2 + (x_r - x_s)^2}}, \\ \text{Aresta 2: } n^2 &= -\frac{\nabla r}{\|\nabla s\|} = \frac{(-y_s, x_s)}{\sqrt{y_s^2 + x_s^2}}, \\ \text{Aresta 3: } n^3 &= -\frac{\nabla s}{\|\nabla s\|} = \frac{(y_r, -x_r)}{\sqrt{y_r^2 + x_r^2}}. \end{aligned}$$

Essas normais são armazenadas no código nas matrizes nx e ny , com dimensão $N_h \times 3$, onde $nx(k, i)$ e $ny(k, i)$ fornecem as coordenadas x e y da normal na aresta i exterior ao elemento T_k .

Voltando para o cálculo da integral acima, encontramos que:

$$\begin{aligned} \int_E K(n \cdot \nabla \varphi_j^L(x, y)) \varphi_i^R(x, y) ds &= \int_E K \left[(nx, ny) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j^L}{\partial x}(x, y), \frac{\partial \varphi_j^L}{\partial y}(x, y) \right) \right] \varphi_i^R(x, y) ds \\ &= \int_{-1}^1 J_E K \left[(nx, ny) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_j^L}{\partial x}(\tilde{\psi}_E(\xi)), \frac{\partial \varphi_j^L}{\partial y}(\tilde{\psi}_E(\xi)) \right) \right] \varphi_i^R(\tilde{\psi}_E(\xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Lembrando que sobre T_L temos, $\hat{\varphi}_{k_1}(r, s) = \varphi_j^L(\psi_{T_L}(r, s)) = \varphi_j^L(x(r, s), y(r, s))$, e o processo feito da equação (5.2.3) à equação (5.2.4), podemos inferir novamente:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j^L}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi_j^L}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{T_L}} \begin{pmatrix} y_s^L & -y_r^L \\ -x_s^L & x_r^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(r, s) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(r, s) \end{pmatrix}.$$

Deste modo, se $(r, s) = \psi_{T_L}^{-1}(x, y) = \psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))$, temos que:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j^L}{\partial x}(\tilde{\psi}_E(\xi)) \\ \frac{\partial \varphi_j^L}{\partial y}(\tilde{\psi}_E(\xi)) \end{pmatrix} = \frac{1}{J_{T_L}} \begin{pmatrix} y_s^L & -y_r^L \\ -x_s^L & x_r^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \end{pmatrix},$$

assim, continuando com os cálculos em (5.2.10), obtemos que:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \frac{J_E}{J_{T_L}} \left[(nx, ny) \cdot \begin{pmatrix} y_s^L & -y_r^L \\ -x_s^L & x_r^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \end{pmatrix} \right] \hat{\varphi}_{k_2}(\psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \frac{J_E}{J_{T_L}} \left[(nx, ny) \cdot \begin{pmatrix} y_s^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) - y_r^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \\ -x_s^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) + x_r^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \end{pmatrix} \right] \hat{\varphi}_{k_2}(\psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) d\xi \\ &= \sum_{i=1}^{N_P} \frac{J_E}{J_{T_L}} \left[nx \cdot y_s^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) - nx \cdot y_r^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) \right. \\ &\quad \left. - ny \cdot x_s^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) + ny \cdot x_r^L \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) \right] \hat{\varphi}_{k_2}(\psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb^i))) w b^i. \end{aligned}$$

Encontrando a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \int_E (n \cdot (K \nabla \varphi_j^L(x, y))) \varphi_i^R(x, y) ds \\ &= \frac{J_E}{J_{TL}} \left[wb \cdot * \left((nxy_s^L - nyx_s^L) DVrbI(1 : Dimw, j, l) \right. \right. \\ & \left. \left. + (-nxy_r^L + nyx_r^L) DVsbI(1 : Dimw, j, l) \right) \right] VbI(Dimw + 1 : 2 * Dimw, i, l) \end{aligned}$$

que dá origem ao bloco bLR .

Portanto, a integral (5.2.7) que descreve o bloco LR na equação (5.2.5), fica do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & \int_E \left[-\frac{1}{2} \left(-(n \cdot (K \nabla \varphi_j^L)) \varphi_i^R + \varphi_j^L (n \cdot (K \nabla \varphi_i^R)) \right) - \sigma_E \varphi_j^L(x, y) \varphi_j^R(x, y) \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \frac{J_E}{J_{TL}} bLR - \frac{1}{2} \frac{J_E}{J_{TR}} bRL' - \sigma_E J_{EC} LR. \end{aligned}$$

Novamente apresentamos a montagem computacional no *Matlab*[®], para a equação (5.2.5) no bloco LR. Aqui NI representa o número de arestas interiores $E \in \mathfrak{S}_h^i$.

```
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %      %Element assembling Interior edges
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NN2=Np*Np-1;
for i=1:Np
    AuxV1((i-1)*Np+1:i*Np)=0:Np-1;
    AuxV2((i-1)*Np+1:i*Np)=i-1;
end
for ArestI=1:NI
    [cLL, cRL, cLR, cRR]=Cmatrix2D(ArestI, Np, Dimwb, wb, VbI);
    [bLL, bRL, bLR, bRR]=Bmatrix2D(acofK1, acofK2, Regiao, ArestI,
                                    Np, Dimwb, wb, VbI, DVrbI, DVsbI, Xb, Yb);
    KelemL = FToE(Interior(ArestI, 3), 1);
    KelemR = FToE(Interior(ArestI, 3), 2);
    i1=indexGlobal(Np, KelemL, 1); % indice left
    i2=indexGlobal(Np, KelemR, 1); % indice right
    JkL=Jk(KelemL);
```

```

JkR=Jk (KelemR) ;
hx1=2*Je (ArestI) ;
mu0 = sigma*N*N/hx1;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Lr %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
indexSparse=indexSparseEnd+1;
indexSparseEnd=indexSparse+NN2;
iSparse (indexSparse:indexSparseEnd)=i2+AuxV1;
jSparse (indexSparse:indexSparseEnd)=i1+AuxV2;
AuxM=(0.5*Je (ArestI) /JkL) *bLR - (0.5*lambda*Je (ArestI) /JkR) * bRL'
      - (mu0*Je (ArestI) ) *cLR;
sSparse (indexSparse:indexSparseEnd) = AuxM(:) ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

- Para o cálculo da integral (5.2.5) sobre as faces $E \in \mathfrak{S}_h^D$, usaremos a estrutura descrita acima, lembrando que E pertence a um único elemento triangular T , como a seguir:

$$\begin{aligned}
& - \int_E (n \cdot \nabla \varphi_j(x, y)) \varphi_i(x, y) + \varphi_j(x, y) (n \cdot \nabla \varphi_i(x, y)) - \sigma_E \varphi_j(x, y) \varphi_i(x, y) = \\
& - \int_{-1}^1 \frac{J_E}{J_T} \left[(nx, ny) \cdot \begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial r}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_1}}{\partial s}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \end{pmatrix} \right] \hat{\varphi}_{k_2}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) d\xi \\
& - \int_{-1}^1 \frac{J_E}{J_T} \hat{\varphi}_{k_1}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \left[(nx, ny) \cdot \begin{pmatrix} y_s & -y_r \\ -x_s & x_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_2}}{\partial r}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_{k_2}}{\partial s}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \end{pmatrix} \right] d\xi \\
& + \int_{-1}^1 \sigma_E J_E \hat{\varphi}_{k_1}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) \hat{\varphi}_{k_2}(\psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(\xi))) d\xi = \\
& - \frac{J_E}{J_T} \left[wb. * ((nxy_s - nyx_s) DVrbD(:, j, l) + (-nxy_r + nyx_r) DVsbD(:, j, l)) \right]' VbD(:, i, l) \\
& - \frac{J_E}{J_T} \left[wb. * ((nxy_s - nyx_s) DVrbD(:, i, l) + (-nxy_r + nyx_r) DVsbD(:, i, l)) \right]' VbD(:, j, l) \\
& + \sigma_E J_E [wb. * VbD(:, j, l)]' VbD(:, i, l),
\end{aligned}$$

com $(RbD(l, 1 : Dimw), Sbl(l, 1 : Dimw)) = \psi_T^{-1}(\tilde{\psi}_E(rb))$, são as coordenadas (r, s) no elemento mestre \hat{T} , correspondente ao vetor rb no elemento T , e l é o número da aresta de Dirichlet E que está sendo considerada.

$VbD(1 : Dimw, j, l) = \hat{\phi}_{k_1}(RbD(l, 1 : Dimw)', SbD(l, 1 : Dimw)'),$ são as funções de base avaliadas nos nós referente ao elemento T .

Da mesma forma definimos: $DVrbD(1 : Dimw, j, l) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial r}(RbD(l, 1 : Dimw)', SbD(l, 1 : Dimw)'),$ e $DVsbD(1 : Dimw, j, l) = \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}}{\partial s}(RbD(l, 1 : Dimw)', SbD(l, 1 : Dimw)'),$ como as derivadas das funções base avaliadas nos nós referente ao elemento T .

- Para finalizar a implementação no domínio 2D resta aproximar a seguinte componente que determina o termo fonte f_i , ver equação (5.1.4).

$$\int_{\mathfrak{S}_h^N} g_N \varphi_i - \int_{\mathfrak{S}_h^D} (\vec{n} \cdot K \nabla \varphi_i) g_D + \int_{\mathfrak{S}_h^D} \sigma \varphi_i g_D.$$

Se $E_l \in \mathfrak{S}_h^D$, com numeração l da aresta onde a condição de Dirichlet é satisfeita, temos:

$$\begin{aligned} & - \int_E g_D(x, y) (n \cdot K \nabla \varphi_i(x, y)) ds + \int_E \sigma g_D(x, y) \varphi_i(x, y) ds \\ & = -K \frac{J_E}{J_T} [wb \cdot * g_D(X(:, NI + l), Y(:, NI + l))] \\ & * ((nxy_s - nyx_s) DVrbD(:, i, l) + (-nxy_r + nyx_r) DVsbD(:, i, l)) \\ & + \sigma J_E (\omega \cdot * g_D(X(:, NI + l), Y(:, NI + l)))' * VbD(:, i, l). \end{aligned}$$

Para $E_l \in \mathfrak{S}_h^N$, consideramos $VbN(rb, i, l) = \hat{\phi}_{k_2}(\tilde{\psi}_E(rb))$, com numeração l da aresta onde a condição de Neumann é satisfeita, assim temos:

$$\begin{aligned} & \int_E K g_N(x, y) \hat{\phi}_i(x, y) ds = \\ & K J_E (\omega \cdot * g_N(X(:, NI + NbD + l), Y(:, NI + NbD + l)))' * VbN(:, i, l). \end{aligned}$$

5.3 Implementação no Domínio Unidimensional

Nesta seção, discutiremos sobre a Implementação do método de Galerkin Descontínuo na fratura Γ ; que consiste em calcular os $a_{i,j}$ e f_i para $N < i, j \leq M$ na formulação matricial, ver equação (5.1.5).

- Seja $1 \leq l \leq N_\Gamma$. Se $1 \leq k_1, k_2 \leq N_{p1}$ tal que $j = \mathcal{N}_\Gamma(l, k_1)$ e $i = \mathcal{N}_\Gamma(l, k_2)$, temos que:

$$\int_{\Gamma_h} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} \phi_j \cdot \nabla_{\tau} \phi_i = \int_{E_l} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} \phi_j \cdot \nabla_{\tau} \phi_i, \quad (5.3.1)$$

$$\int_{\Gamma_h} f_{\Gamma} \phi_i = \int_{E_l} f_{\Gamma} \phi_i \quad (5.3.2)$$

com ∇_{τ} o gradiente tangencial ($\nabla_{\tau} = \nabla \cdot \tau$, com τ o vetor tangencial à aresta E).

Temos a aplicação afim $\tilde{\psi}_E(\xi) : I \rightarrow E$, definida em (5.1.3). Logo, para aplicar uma função $f(x, y)$, $(x, y) \in E$ para I , é necessário notar que:

$$F(\xi) = f(\tilde{\psi}(\xi)) = f(\tilde{\psi}_E^1(\xi), \tilde{\psi}_E^2(\xi)) = f(x(\xi), y(\xi)),$$

assim, pela regra da cadeia obtemos a derivada de $F(\xi)$:

$$F'(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = \nabla f \cdot (x'(\xi), y'(\xi)).$$

Para calcular $(x'(\xi), y'(\xi))$ considere $v^1 = (x_1, y_1)$ e $v^2 = (x_2, y_2)$ como os vértices de E , usando a definição de $\tilde{\psi}$ dada em (5.1.3), podemos dizer que:

$$\begin{aligned} x(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} x_1 + \frac{1+\xi}{2} x_2 \\ y(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} y_1 + \frac{1+\xi}{2} y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'(\xi) &= \frac{-x_1}{2} + \frac{x_2}{2} \\ y'(\xi) &= \frac{-y_1}{2} + \frac{y_2}{2}, \end{aligned}$$

deste modo

$$(x'(\xi), y'(\xi)) = \frac{v^2 - v^1}{2}.$$

Se $\tau = \frac{v^2 - v^1}{|E|}$ com $|E| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$, temos:

$$F'(\xi) = \nabla f \cdot \tau \frac{|E|}{2} = \nabla_{\tau} f \frac{|E|}{2}. \quad (5.3.3)$$

Voltando ao cálculo das integrais acima, temos que:

$$\begin{aligned} \int_{E_l} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} \phi_j \nabla_{\tau} \phi_i ds &= \int_{E_l} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla \phi_j \cdot \tau (\nabla \phi_i \cdot \tau) ds \\ &= \int_{-1}^1 l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \frac{\partial \hat{\phi}_{k_1}(\xi)}{\partial \xi} \frac{2}{|E_l|} \cdot \frac{\partial \hat{\phi}_{k_2}(\xi)}{\partial \xi} \frac{2}{|E_l|} \cdot \frac{|E_l|}{2} d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{|E_l|} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \hat{\phi}'_{k_1}(\xi) \hat{\phi}'_{k_2}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Sejam rb e wb como sendo os $NQGb$ pontos e os pesos da quadratura de Gauss no intervalo I , por conseguinte:

$$\int_{-1}^1 \frac{2}{|E_l|} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \hat{\phi}'_{k_1}(\xi) \hat{\phi}'_{k_2}(\xi) d\xi = \sum_{g=1}^{NQGb} \frac{2}{|E_l|} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \hat{\phi}'_{k_1}(rb^g) \hat{\phi}'_{k_2}(rb^g) wb^g,$$

e seja $DVsbInt(g, j) = \hat{\phi}'_{k_1}(rb^g)$ e $(X(:, NI + NbD + NbN + l), Y(:, NI + NbD + NbN + l)) = \tilde{\Psi}_E(\xi)$, onde aqui ξ representa os vetor com todos os pontos de Gauss rb e l é o número da aresta E que está sendo integrada. Assim finalmente, temos a seguinte notação computacional:

$$\begin{aligned} &\sum_{g=1}^{NQGb} \frac{2}{|E_l|} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \hat{\phi}'_{k_1}(rb^g) \hat{\phi}'_{k_2}(rb^g) wb^g \\ &= [wb * K_{\Gamma}^{\mathcal{J}}(X(:, NI + NbD + NbN + l), Y(:, NI + NbD + NbN + l)) * DVsbInt(:, j)]' \\ &\quad * DVsbInt(:, i) \frac{2}{|E_l|} l_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Da mesma forma se consideramos $VbInt(g, i, l) = \hat{\phi}_{k_2}(rb^g)$, temos para a integral (5.3.2), a seguinte aproximação :

$$\begin{aligned} \int_{E_l} f(x, y) \phi_i(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 \frac{|E_l|}{2} f(\tilde{\Psi}_{E_l}(\xi)) \hat{\phi}_{k_2}(\xi) d\xi \\ &= \sum_{g=1}^{NQGb} \frac{|E_l|}{2} wb^g f(\tilde{\Psi}_{E_l}(rb^g)) \hat{\phi}_{k_2}(rb^g) \\ &= \frac{|E_l|}{2} (wb * f(X(:, NI + NbD + NbN + l), Y(:, NI + NbD + NbN + l)))' * VbInt(:, i, l). \end{aligned}$$

A seguir mostramos a montagem computacional no *Matlab*[®] para a equação (5.3.1). Aqui a componente tangencial de permeabilidade na fratura $K_{\Gamma}^{\mathcal{J}}$ é representado por *Kintf*, e o número de arestas na face N_{Γ} por *NbIntf*.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Element assembling interface
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
L=0.001;
for l=1:NbIntf
    AuxV=(1/Je (NI+NbD+NbN+1))
        * (L*Kintf (Xb (:, NI+NbD+NbN+1), Yb (:, NI+NbD+NbN+1)) .*wb);
    j1=indexGlobalIntF (Np1, jEl, 1, N_h, Np);
for k=1:Np1 % linha
    indexSparse=indexSparseEnd+1;
    indexSparseEnd=indexSparse+Np1-1;
    iSparse (indexSparse:indexSparseEnd)=indexGlobalIntF (Np1, l, k, K, Np);
    jSparse (indexSparse:indexSparseEnd)=j1:j1+Np1-1;
    sSparse (indexSparse:indexSparseEnd) =
        (AuxV.*DVsbInT (1:Dimwb, k, l))' *DVsbInT (1:Dimwb, :, l);
end
end

```

- Seja $N \leq i, j < M$ os índices descritos acima e $e \in \mathfrak{S}_h^i(\Gamma)$, tal que $e = E_L \cap E_R$ com $\phi_j \in \mathbb{P}_b(E_L)$ e $\phi_{ib} \in \mathbb{P}(E_R)$. Para calcular

$$- \left(\{l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} \phi_j(e) \vec{n}\} [[\phi_i(e)]] + \{l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \nabla_{\tau} \phi_i(e)\} [[\phi_j(e)]] \right) + \sigma_e [[\phi_j(e)]] [[\phi_i(e)]] \quad (5.3.4)$$

temos que:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\{l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} u \vec{n}\} [[v]] + \{l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \nabla_{\tau} v\} [[u]] \right) + \sigma [[u]] [[v]] \\
 = & - \frac{1}{2} \left((n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla u^L)) v^L + u^L (n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla v^L)) \right) + \sigma u^L v^L \\
 & - \frac{1}{2} \left(-(n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla u^L)) v^R + u^L (n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla v^R)) \right) - \sigma u^L v^R \\
 & - \frac{1}{2} \left((n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla u^R)) v^L - u^R (n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla v^L)) \right) - \sigma u^R v^L \\
 & - \frac{1}{2} \left(-(n \cdot (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla u^R)) v^R - u^R (n \cdot l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla v^R) \right) + \sigma u^R v^R.
 \end{aligned} \quad (5.3.5)$$

Relembrando que $\psi_E(\xi) : I = [-1, 1] \longrightarrow E$, temos que $\tilde{\psi}_{E_L}(1) = e$ e $\tilde{\psi}_{E_R}(-1) = e$. Se defini-

mos o vetor normal exterior n em I como sendo, $1=n=n_L$ e $n=-n_R$ e recordamos a equação (5.3.3), podemos deduzir que:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(-(n_L \cdot (l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla \phi_j^L(e))) \phi_i^R(e) + \phi_j^L(e) (n_R \cdot (l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \nabla \phi_i^R(e))) \right) - \sigma_e \phi_j^L(e) \phi_i^R(e) \\ & = -\frac{1}{2} \left(-(l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \frac{2}{|E_L|} \hat{\phi}'_{k_1}(1)) \hat{\phi}_{k_2}(-1) - \hat{\phi}_{k_1}(1) (l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}} \frac{2}{|E_R|} \hat{\phi}'_{k_2}(-1)) \right) - \sigma_e \hat{\phi}_{k_1}(1) \hat{\phi}_{k_2}(-1), \end{aligned}$$

dando origem ao bloco LR na implementação unidimensional.

Seja $VbInTPoFc(1, j, l) = \hat{\phi}_{k_1}(\tilde{\psi}_{E_R}^{-1}(e))$, a função j avaliada no ponto e , fronteira esquerda do elemento E_R , com l o número que determina o nó e . $VbInTPoFc(2, j, l) = \hat{\phi}_{k_1}(\tilde{\psi}_{E_L}^{-1}(e))$, a função j avaliada no ponto e , fronteira direita do elemento E_L . De forma semelhante, definimos: $DVrbPoFc(1, j, l) = \hat{\phi}'_{k_1}(-1)$, ou seja, a derivada da função de base j avaliada no ponto e , referente ao elemento da direita E_R . $DVrbPoFc(2, j, l) = \hat{\phi}'_{k_1}(1)$, a derivada da função j avaliada no ponto e referente ao elemento da esquerda E_L .

Então podemos reescrever a equação (5.3.4) para o bloco LR como:

$$-\frac{1}{2}bLR + \sigma_e cLR,$$

para:

$$\begin{aligned} cLR & = \left(VbInTPoFc(1, :, l) * VbInTPoFc(2, :, l) \right) \\ bLR & = l_\Gamma K_\Gamma^{\mathcal{J}}(\tilde{\psi}_E^{-1}(e)) \left(-\frac{2}{|E_L|}, \frac{2}{|E_R|} \right) \cdot \begin{pmatrix} VbInTPoFc(1, :, l) * DVrbPoFc(2, :, l) \\ DVrbPoFc(1, :, l) * VbInTPoFc(2, :, l) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Novamente apresentamos a montagem computacional no *Matlab*[®], para a equação (5.3.4) no bloco LR. Aqui $NbIntf - 1$ representa o número de nós interiores $e \in \mathfrak{S}_h^i(\Gamma)$.

```
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% %      Element assembling Interior interface
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
LT=0.001; %thickness of the fracture%
NN2=(Np1*Np1)-1;
for i=1:Np1
```

```

AuxV1((i-1)*Np1+1:i*Np1)=0:Np1-1;
AuxV2((i-1)*Np1+1:i*Np1)=i-1;
end
for ArestI=1:NbIntf-1
[cLL,cRL,cLR,cRR] = Cmatrix1DIntF(ArestI,VbInTPoFc);
[bLL,bRL,bLR,bRR] =
    Bmatrix1DIntF(Kintf,ArestI,VbInTPoFc,DVrbIPoFc,M2,Je);
Je1=2*Je(NI+NbD+NbN+ArestI);
Je2=2*Je(NI+NbD+NbN+ArestI+1);
hx1=max(Je1,Je2);
mu0 = sigma*LT*Kintf(M2(ArestI,1))*N*N/hx1;
i1=indexGlobalIntF(Np1,ArestI,1,K,Np); % indice left
i2=indexGlobalIntF(Np1,ArestI+1,1,K,Np); % indice right
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% LR %%%%%%%%%%%%%
indexSparse=indexSparseEnd+1;
indexSparseEnd=indexSparse+NN2;
iSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i2+AuxV1;
jSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i1+AuxV2;
AuxM= -(0.5)*bLR -(mu0)*cLR ;
sSparse(indexSparse:indexSparseEnd) = AuxM(:);

```

- Para o cálculo nos nós $e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)$ da equação (5.3.4), usaremos a estrutura descrita acima, lembrando que o nó e é uma das duas fronteiras da fratura Γ , assim e^1 e e^2 são as fronteiras esquerda e direita da fratura, respectivamente. A seguir:

$$\begin{aligned}
& \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} - \left(l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} (\nabla_{\tau} \phi_j(e)) \phi_i(e) + l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \nabla_{\tau} \phi_j(e) \phi_i(e) \right) + \sum_{e \in \mathfrak{S}_h^D(\Gamma)} \sigma_e \phi_j(e) \phi_i(e) \\
& = \sum_{k=1}^2 (-l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \nabla_{\tau} \phi_j(e^k) \phi_i(e^k) - l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \vec{n} \nabla_{\tau} \phi_i(e^k) \phi_j(e^k) + \sigma_{e^k} \phi_j(e^k) \phi_i(e^k)).
\end{aligned}$$

Fazemos a aplicação para o domínio I e relembamos a notação computacional,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^2 \left[\frac{2}{|E^k|} (-1)^{k+1} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \hat{\phi}'_{k_1}(-1^k) \hat{\phi}_{k_2}(-1^k) + \frac{2}{|E^k|} (-1)^{k+1} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \hat{\phi}'_{k_2}(-1^k) \hat{\phi}_{k_1}(-1^k) \right. \\
& \quad \left. + \sigma_k \hat{\phi}_{k_1}(-1^k) \hat{\phi}_{k_2}(-1^k) \right] \\
& = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{2}{|E^k|} (-1)^{k+1} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} (\tilde{\Psi}_E^{-1}(e^k)) * DVrbPoFc(k, j, k) * VbInTPoFc(k, i, k) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{|E^k|} (-1)^{k+1} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} (\tilde{\Psi}_E^{-1}(e^k)) * DVrbPoFc(K, j, k) * VbInTPoFc(K, i, k) \\
& \quad + \sigma_k VbInTPoFc(k, j, k) * VbInTPoFc(k, i, k)].
\end{aligned}$$

- Para finalizar a implementação no domínio unidimensional, resta aproximar a seguinte componente que determina o termo fonte f_i , ver equação (5.1.5).

$$\begin{aligned}
& - \sum_{e \in \mathcal{S}_h^D(\Gamma)} (l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} \nabla_{\tau} \phi_i \bar{n}) g_{\Gamma} + \sum_{e \in \mathcal{S}_h^D(\Gamma)} \sigma_e \phi_i g_{\Gamma} \\
& = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{2}{|E^k|} (-1)^{k+1} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} (\tilde{\Psi}_E^{-1}(e^k)) \hat{\phi}'_{k_2}(-1^k) + \sigma_k \hat{\phi}_{k_2}(-1^k) \right] g_{\Gamma}(\tilde{\Psi}_E^{-1}(e^k)) \\
& = \sum_{k=1}^2 \left[\frac{2}{|E^k|} (-1)^{k+1} l_{\Gamma} K_{\Gamma}^{\mathcal{J}} (\tilde{\Psi}_E^{-1}(e^k)) * DVrbPoFc(k, i, k) + \sigma_k * VbInTPoFc(k, i, k) \right] g_{\Gamma}(\tilde{\Psi}_E^{-1}(e^k)).
\end{aligned}$$

5.4 Implementação das condições de acoplamento

Nesta seção, trataremos da implementação das condições de acoplamento, equações (4.1.3), no método de Galerkin descontínuo para o problema modelo. Seja $\varphi_{i_1} \in \Phi$ e $\phi_{i_2} \in \Phi_{\Gamma}$ com $1 \leq i_1 \leq N$ e $N \leq i_2 \leq M$, vamos calcular as condições de acoplamento para as soluções

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \varphi_j(x, y) \text{ e } p^{\Gamma}(x, y) = \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \phi_j(x, y).$$

Para uma melhor compreensão dos cálculos, esclarecemos a distribuição das condições de acoplamento na matriz de rigidez, ver Figura 5.1.1.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_h} \alpha_{\Gamma} (\{p\} - p^{\Gamma}) (\{\varphi_{i_1}\} - \phi_{i_2}) + \int_{\Gamma_h} \beta_{\Gamma} [[p]] \cdot [[\varphi_{i_1}]] \\
& = \int_{\Gamma_h} \alpha_{\Gamma} \left(\left\{ \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \varphi_j \right\} - \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \phi_j \right) (\{\varphi_{i_1}\} - \phi_{i_2}) + \int_{\Gamma_h} \beta_{\Gamma} \left[\left[\sum_{j=1}^N \hat{p}_j \varphi_j \right] \right] \cdot [[\varphi_{i_1}]] \\
& = \int_{\Gamma_h} \alpha_{\Gamma} \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_j \{\varphi_j\} - \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \phi_j \right) (\{\varphi_{i_1}\} - \phi_{i_2}) + \int_{\Gamma_h} \beta_{\Gamma} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j [[\varphi_j]] \cdot [[\varphi_{i_1}]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_j \{ \varphi_j \} \{ \varphi_{i_1} \} - \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \phi_j \{ \varphi_{i_1} \} - \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \{ \varphi_j \} \phi_{i_2} + \phi_{i_2} \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \phi_j \right) \\
&\quad + \int_{\Gamma_h} \beta_\Gamma \sum_{j=1}^N \hat{p}_j [[\varphi_j]] \cdot [[\varphi_{i_1}]] \\
&= \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \underbrace{\int_{\Gamma_h} (\alpha_\Gamma \{ \varphi_j \} \{ \varphi_{i_1} \} + \beta_\Gamma [[\varphi_j]] \cdot [[\varphi_{i_1}]])}_{A_{1j}} - \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \underbrace{\int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma \phi_j \{ \varphi_{i_1} \}}_{B_{1j}^1} \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \underbrace{\int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma \{ \varphi_j \} \phi_{i_2}}_{B_{2j}^2} + \sum_{j=N}^M \hat{p}_j \underbrace{\int_{\Gamma_h} \alpha_\Gamma \phi_j \phi_{i_2}}_{C_{2j}}.
\end{aligned}$$

Deste modo, A_{ij} vai ficar nas componentes no domínio bidimensional e C_{ij} as componentes no domínio unidimensional. Para a distribuição matricial das componentes B_{ij}^1 e B_{ij}^2 temos na matriz de rigidez:

$$\begin{array}{c|c}
A + 2D & B^1 \\
\hline
B^2 & C + 1D
\end{array}.$$

Seja $E_l \in \Gamma_h$ com $1 \leq l \leq N_\Gamma$ e $1 \leq k_1, k_2 \leq N_p$ tal que $j = \mathcal{N}(l, k_1)$, $i = \mathcal{N}(l, k_2)$.

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{E_l} \frac{\alpha_\Gamma}{4} \left((\varphi_j^L \varphi_i^L) + \varphi_j^L \varphi_i^R + \varphi_j^R \varphi_i^L + \varphi_j^R \varphi_i^R \right) \\
&\quad + \int_{E_l} \beta_\Gamma \left((\varphi_j^L \varphi_i^L) - \varphi_j^L \varphi_i^R - \varphi_j^R \varphi_i^L + (\varphi_j^R \varphi_i^R) \right) \\
&= \int_{E_l} \left(\frac{\alpha_\Gamma}{4} + \beta_\Gamma \right) \left((\varphi_j^L \varphi_i^L) + (\varphi_j^R \varphi_i^R) \right) + \int_{E_l} \left(\frac{\alpha_\Gamma}{4} - \beta_\Gamma \right) (\varphi_j^L \varphi_i^R + \varphi_j^R \varphi_i^L),
\end{aligned}$$

sejam rb e wb como sendo os $NQGb$ pontos e os pesos da quadratura de Gauss no intervalo $I = [-1, 1]$. Analogamente a como foi feito na equação (5.2.8), temos para o bloco LR:

$$\begin{aligned}
&\int_{E_l} \left(\frac{\alpha_\Gamma}{4} - \beta_\Gamma \right) \varphi_j^L(x, y) \varphi_i^R(x, y) ds \\
&= \sum_{g=1}^{NQGb} \left(\frac{\alpha_\Gamma}{4} - \beta_\Gamma \right) \frac{|E_l|}{2} \hat{\phi}_{k_1}(\psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_{E_l}(rb^g))) \hat{\phi}_{k_2}(\psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_{E_l}(rb^g))) wb^g.
\end{aligned}$$

Na implementação computacional, considere $Dimw = NQGb$, $(RbIACO(l, 1 : Dimw), SbiACO(l, 1 : Dimw)) = \psi_{T_L}^{-1}(\tilde{\psi}_{E_l}(rb))$, como sendo as coordenadas (r, s) no elemento mestre \hat{T} , correspondentes ao vetor de pontos de Gauss rb referente ao elemento da esquerda T_L ; e $(RbIACO(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw), SbiACO(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)) = \psi_{T_R}^{-1}(\tilde{\psi}_{E_l}(rb))$, sendo as coordenadas (r, s) , correspondentes ao vetor de pontos de Gauss rb , do elemento da direita T_R .

Seja $VbIACO(1 : Dimw, j, l) = \hat{\phi}_{k_1}(RbIACO(l, 1 : Dimw)', SbiACO(l, 1 : Dimw)')$, as funções da base avaliadas nos nós referente ao elemento da esquerda T_L . $VbIACO(Dimw + 1 : 2 * Dimw, j, l) = \hat{\phi}_{k_1}(RbIACO(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)', SbiACO(l, Dimw + 1 : 2 * Dimw)')$, as funções da base avaliadas nos nós referente ao elemento da direita T_R .

Agora podemos reescrever A_{ij}^{LR} da seguinte forma:

$$\int_{E_l} \left(\frac{\alpha_\Gamma}{4} - \beta_\Gamma \right) \varphi_j^L(x, y) \varphi_i^R(x, y) ds$$

$$= \left(\frac{\alpha_\Gamma}{4} - \beta_\Gamma \right) J_{E_l} (wb * VbIACO(1 : Dimw, j, l))' VbIACO(Dimw + 1 : 2 * Dimw, i, l).$$

A seguir, a montagem computacional no *Matlab*[®] para o bloco LR em A_{ij} . Aqui $NbIntf$ representa o número de arestas N_Γ .

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% conditions to couple A
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NN2=Np*Np-1;
for i=1:Np
    AuxV1((i-1)*Np+1:i*Np)=0:Np-1;
    AuxV2((i-1)*Np+1:i*Np)=i-1;
end
for l=1:NbIntf
    [cLL, cRL, cLR, cRR]=
        Cmatrix2DACO(l, Np, Dimwb, wb, VbIACO, Je);
    KelemL = FToE(INTERFACE(l, 3), 1);
    KelemR = FToE(INTERFACE(l, 3), 2);
    i1=indexGlobal(Np, KelemL, 1); % indice left
    i2=indexGlobal(Np, KelemR, 1); % indice right
    %%%%%%%%%%%%%%% LR %%%%%%%%%%%%%%%
    indexSparse=indexSparseEnd+1;

```

```

indexSparseEnd=indexSparse+NN2;
iSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i2+AuxV1;
jSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i1+AuxV2;
AuxM= ((1/((LT/Kn)*(2*e)-1))-(1/(LT/Kn)))*cLR ;
sSparse(indexSparse:indexSparseEnd) = AuxM(:);
end

```

Já que na implementação unidimensional, seção 5.3, definimos $VbInT(g, j, l) = \hat{\phi}_{\tilde{k}_1}(rb^g)$, com $1 \leq \tilde{k}_1 \leq N_{p1}$. Para C_{ij} temos que:

$$\begin{aligned} \int_{E_l} \alpha_\Gamma \phi_j \phi_i &= \sum_{g=1}^{NQGb} \alpha_\Gamma \frac{|E_l|}{2} \hat{\phi}_{\tilde{k}_1}(rb^g) \hat{\phi}_{\tilde{k}_2}(rb^g) wb^g \\ &= \alpha_\Gamma \frac{|E_l|}{2} wb * VbInT(1 : Dimw, i, l) * VbInT(1 : Dimw, j, l), \end{aligned}$$

deste modo, para B_{ij}^1 temos que:

$$\begin{aligned} B_{ij}^1 &= \int_{E_l} \alpha_\Gamma \phi_j \frac{\phi_i^L + \phi_i^R}{2} = \int_{E_l} \frac{\alpha_\Gamma}{2} (\phi_j \phi_i^L + \phi_i^R \phi_j) \\ &= \sum_{g=1}^{NQGb} \frac{\alpha_\Gamma}{2} \cdot \frac{|E_l|}{2} [\hat{\phi}_{\tilde{k}_1}(rb^g) \hat{\phi}_{\tilde{k}_2}(\Psi_{TL}^{-1}(\tilde{\psi}_{E_l}(rb^g))) + \hat{\phi}_{\tilde{k}_1}(rb^g) \hat{\phi}_{\tilde{k}_2}(\Psi_{TR}^{-1}(\tilde{\psi}_{E_l}(rb^g)))] \\ &= \frac{\alpha_\Gamma}{2} \cdot \frac{|E_l|}{2} * VbInT(1 : Dimw, j, l) * VbIACO(1 : Dimw, i, l) \\ &\quad + \frac{\alpha_\Gamma}{2} \cdot \frac{|E_l|}{2} * VbInT(1 : Dimw, j, l) * VbIACO(1 + Dimw : 2 * Dimw, i, l). \end{aligned}$$

Finalizamos o capítulo de implementação, apresentando a montagem computacional para B_{ij}^1 .

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% conditions to couple B
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
NN2=(Np*Np1)-1;
for i=1:Np1
    AuxV1((i-1)*Np+1:i*Np)=0:Np-1;
    AuxV2((i-1)*Np+1:i*Np)=i-1;
end
for l=1:NbIntf
    [R,L]=Cmatrix2DACOB(ArestI,Np,Dimwb,wb,VbIACO,VbInT,Je);
    KelemL = FToE(INTERFACE(l,3),1);

```



```

KelemR = FToE(INTERFACE(1,3),2);
i1=indexGlobal(Np,KelemL,1); % indice left
i2=indexGlobal(Np,KelemR,1); % indice right
i3=indexGlobalIntF(Np1,1,1,K,Np);
    %%%%%%%%%%%%% R %%%%%%%%%%%%%
indexSparse=indexSparseEnd+1;
indexSparseEnd=indexSparse+NN2;
iSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i2+AuxV1;
jSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i3+AuxV2;
AuxM= -(2/((LT/Kn)*((2*e)-1)))*(R) ;
sSparse(indexSparse:indexSparseEnd) = AuxM(:);
    %%%%%%%%%%%%% L %%%%%%%%%%%%%
indexSparse=indexSparseEnd+1;
indexSparseEnd=indexSparse+NN2;
iSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i1+AuxV1;
jSparse(indexSparse:indexSparseEnd)=i3+AuxV2;
AuxM= -(2/((LT/Kn)*((2*e)-1)))*L;
sSparse(indexSparse:indexSparseEnd) = AuxM(:);

```

6 Resultados Numéricos

Neste capítulo, apresentamos alguns experimentos numéricos, e deste modo, analisamos o desempenho do método de Galerkin descontínuo para o modelo reduzido de fratura exclusiva, Definição 4.2.1, baseado nas estimativas de erro a priori que derivamos no capítulo 4, ver Teorema 4.4.1. Os resultados numéricos foram obtidos em MATLAB[®] empregando a implementação computacional apresentada no capítulo 5.

6.1 Análise de Convergência

A seguir, expomos o teste base para os experimentos numéricos. Tomamos $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$, e a fratura $\Gamma = \{(1, y) \mid y \in [0, 1]\}$, com a seguinte escolha para solução exata:

$$p(x, y) = \begin{cases} (x(1-x) + 1)\hat{f}_1(y) & x \in \Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1) \\ ((1-x)(x-4) + 1)\hat{f}_2(y) & x \in \Omega_2 = (1, 2) \times (0, 1) \end{cases}$$

$$p_\Gamma = (\hat{f}_1(y) + \hat{f}_2(y))/2 - \frac{1}{\alpha_\Gamma}(K_1\hat{f}_1(y) + 3K_2\hat{f}_2(y)).$$

sendo

$$\hat{f}_1(y) = 0.5(\cos(\pi(1-y)) + 1),$$

$$\hat{f}_2(y) = \underbrace{\frac{2K_\Gamma^n - dK_1}{2K_\Gamma^n - 3dK_2}}_{C_k} f_1(y) \quad e \quad \alpha_\Gamma = \frac{4K_\Gamma^n}{l_\Gamma(2\xi - 1)}.$$

Relembrando a equação modelo (4.1.4), temos para os termos de fonte f_i , $i = 1, 2$.

$$f_1 = -K_1[-2\hat{f}_1(y) + (x - x^2 + 1)(-\frac{\pi^2}{2})\cos(\pi(1-y))]$$

$$f_2 = -K_2[-2\hat{f}_2(y) + (5x - x^2 - 3)C_k(-\frac{\pi^2}{2})\cos(\pi(1-y))]$$

e f_Γ :

$$f_\Gamma = K_\Gamma^{\mathcal{J}} l_\Gamma \frac{\pi^2}{4} \cos(\pi(1-y))(1 + C_k)$$

$$- K_\Gamma^{\mathcal{J}} l_\Gamma \frac{\pi^2}{2\alpha_\Gamma} \cos(\pi(1-y))(K_1 + 3K_2 C_k) + \hat{f}_1(y)(-3K_2 C_k - K_1).$$

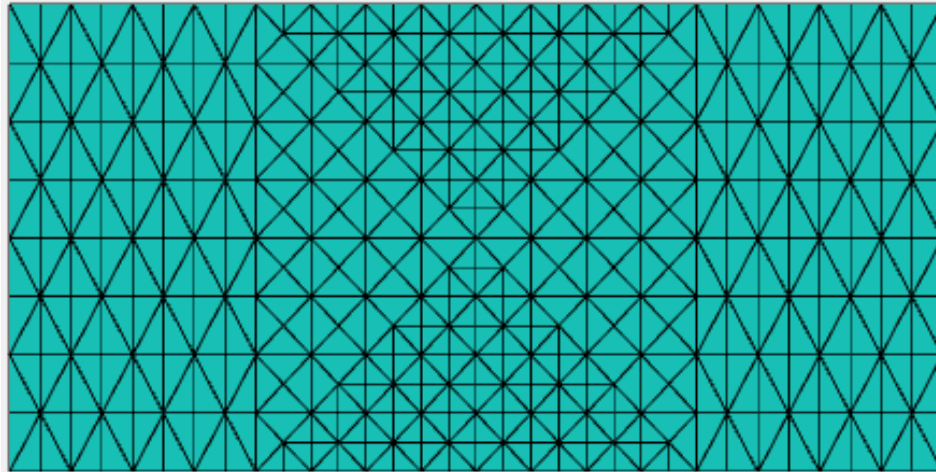


Figure 6.1.1: Malha com 640 triângulos no domínio Ω e 16 arestas na interface Γ

Deixamos o leitor conferir que p e p_Γ satisfazem as condições de acoplamento, ver equação (4.1.3), para efeitos deste trabalho tomamos $K_1 = K_2 = 1$. Os dados de Dirichlet g_D^i , $i = 1, 2$, g_Γ e de Neumann g_N^i , $i = 1, 2$, são definidos pela solução exata.

Na Figura 6.1.1, apresentamos o refinamento de uma malha triangular em conformidade com a fratura. Para efeitos de notação \mathbb{N}_Γ e $\mathbb{N}_{\Omega \setminus \Gamma}$ denotam o número de arestas e triângulos em Γ e Ω , respectivamente.

Com as ordens numéricas de convergência através dos resultados numéricos, avaliamos as estimativas de erro a priori apresentadas no capítulo 4 (equações (4.4.6), (4.4.7) e (4.4.9)), para o método de Galerkin Descontínuo Definido em 4.2.1 na norma

$$\| \| (p, p_\Gamma) \| \|_{\mathcal{T}_h}^2 = \| \| p \| \|_{DG}^2 + \| \| p_\Gamma \| \|_{\Gamma}^2 + \| \| (p, p_\Gamma) \| \|_{AC}^2,$$

também avaliamos as ordens numéricas de convergência nas normas dos espaços $L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $L_2(\Gamma, \Gamma_h)$. A ordem numérica de convergência (ONC) é dado por:

$$ONC_{\Omega_i} = \frac{\log \left(\frac{e_i}{e_{i-1}} \right)}{\log \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)}, \quad ONC_{\Gamma_i} = \frac{\log \left(\frac{e_{\Gamma_i}}{e_{\Gamma_{i-1}}} \right)}{\log \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)},$$

com $e_i = \| p - p_i \|$ e $e_{\Gamma_i} = \| p - p_{\Gamma_i} \|$ os erros da solução numérica nas normas estabelecidas, para o nível de refinamento i . Assim, lembrando a estimativa de erro 4.4.1, temos para ONC_Ω na norma $\| \| \cdot \| \|_{\mathcal{T}_h}$, que:

$$e_{i-1} \cong C^{1/2} h_{i-1}^{\mu-1} (|p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2)^{1/2},$$

$$e_i \cong C^{1/2} h_i^{\mu-1} (|p|_{H^s(\Omega, \mathcal{T}_h)}^2 + |p^\Gamma|_{H^s(\Gamma, \Gamma_h)}^2)^{1/2}$$

com $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ e $\mu = \min\{b+1, s\}$, b o grau de aproximação polinomial e s definido em

4.4.1. Obtendo:

$$\frac{e_i}{e_{i-1}} = \frac{h_i^{\mu-1}}{h_{i-1}^{\mu-1}} = \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right)^{\mu-1}$$

$$\implies \ln \left(\frac{e_i}{e_{i-1}} \right) = \mu - 1 \ln \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right).$$

Concluindo que:

$$ONC_\Omega = \mu - 1.$$

Assim, para soluções suaves nos domínios Ω_1 e Ω_2 , vamos ter que a ONC_Ω atinge o grau de aproximação polinomial b . Para a ONC nas normas $L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)$ e $L_2(\Gamma, \Gamma_h)$, referenciamos o Teorema 1.49 em [DOLEJŠÍ V.; FEISTAUER 2015], atingindo o valor de $b+1$ em ambos casos.

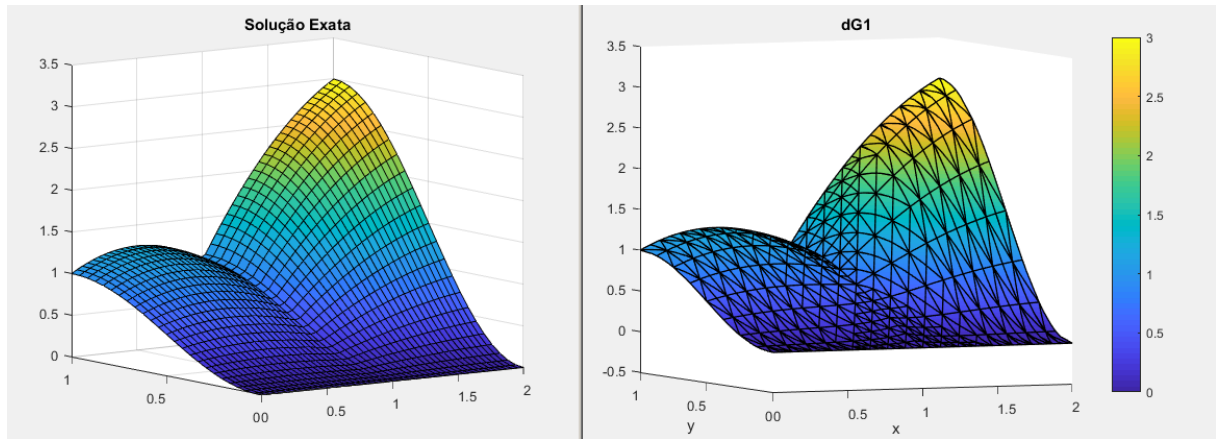


Figure 6.2.1: Teste 1. Solução exata (a esquerda) e solução obtida com o Método de Galerkin Descontínuo (direita), com grau de aproximação polinomial $b=3$, malha de 640 triângulos e $\xi=1$.

6.2 Exemplo 1

Neste primeiro teste, tomamos $K_{\Gamma}^{\mathcal{F}} = K_{\Gamma}^n = 100$ e a espessura no domínio da fratura $l_{\Gamma} = 0.01$, caracterizando assim um domínio com uma fratura altamente permeável. Na Figura 6.2.1 apresentamos os gráficos da solução exata e a solução obtida pelo método de Galerkin Descontínuo. Nas Tabelas 6.2.1 e 6.2.2, apresentamos as ONC para os erros calculados em

			Teste 1	
b	N_{Γ}	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	ONC_{Ω}	ONC_{Γ}
1	4	40	3.8366e-01	1.4570e+00
	8	160	2.2197e+00	1.9500e+00
	16	640	2.0208e+00	1.9415e+00
	32	2560	2.0071e+00	1.9617e+00
2	4	40	3.0872e+00	2.9063e+00
	8	160	2.8691e+00	3.0262e+00
	16	640	2.9624e+00	3.0121e+00
	32	2560	2.9894e+00	3.0038e+00
3	4	40	2.5275e+00	3.8721e+00
	8	160	4.0539e+00	3.9619e+00
	16	640	3.9975e+00	3.9680e+00
	32	2560	3.9977e+00	3.9818e+00

Table 6.2.1: Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , para diferentes ordens polinomiais N , com $\xi = 1$.

$\|p - p_i\|_{L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)}$ e $\|p - p_{\Gamma_i}\|_{L_2(\Gamma, \Gamma_h)}$ em função do tamanho da malha, empregando diferentes

valores para o parâmetro ξ . Em ambos os casos os resultados numéricos atingem a ONC_{b+1} , sendo b o grau de aproximação polinomial empregado na discretização pelo método de DG.

			Teste 1	
b	N_Γ	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	ONC_Ω	ONC_Γ
1	4	40	3.8363e-01	1.4568e+00
	8	160	2.2196e+00	1.9501e+00
	16	640	2.0208e+00	1.9416e+00
	32	2560	2.0071e+00	1.9617e+00
2	4	40	3.0872e+00	2.9062e+00
	8	160	2.8691e+00	3.0263e+00
	16	640	2.9624e+00	3.0122e+00
	32	2560	2.9894e+00	3.0038e+00
3	4	40	2.5275e+00	3.8717e+00
	8	160	4.0539e+00	3.9622e+00
	16	640	3.9975e+00	3.9680e+00
	32	2560	3.9977e+00	3.9396e+00

Table 6.2.2: Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , para diferentes ordens de aproximação polinomial N , com $\xi = 0.50001$.

		Ordens em $\ e\ _{DG}$		Ordens em $\ e\ _\Gamma$		Ordens em $\ e\ _{AC}$		Ordens em $\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	
b	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	$\ e\ _{DG}$	ONC	$\ e\ _\Gamma$	ONC	$\ e\ _{AC}$	ONC	$\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	ONC
1	40	1.3118	0.1881	0.2598	1.0124	0.0046	-0.0080	1.3373	0.2440
	160	0.6472	1.0192	0.1275	1.0265	0.0027	0.7581	0.6597	1.0195
	640	0.3253	0.9927	0.0633	1.0101	0.0014	0.9095	0.3314	0.9934
	2560	0.1632	0.9946	0.0316	1.0045	0.0007	0.9831	0.1663	0.9950
2	40	0.2356	2.2632	0.0290	1.9705	9.3e-04	2.4525	0.2374	2.2597
	160	0.0627	1.9088	0.0072	2.0040	2.2e-04	2.0324	0.0632	1.9101
	640	0.0158	1.9935	0.0018	2.0045	5.4e-05	2.0746	0.0159	1.9937
	2560	0.0039	2.0033	0.0004	2.0020	1.3e-05	2.0553	0.0040	2.0033
3	40	0.0308	1.7404	1.7e-03	2.9903	6.6e-05	1.4692	0.0309	1.7509
	160	0.0037	3.0487	0.2e-3	3.0243	8.9e-06	2.8922	0.0037	3.0486
	640	0.0005	3.0120	2.6e-05	3.0071	1.1e-06	2.9926	0.0005	3.0120
	2560	0.0001	3.0048	3.3e-06	3.0022	1.3e-07	3.0537	0.0001	3.0048

Table 6.2.3: **Teste 1:** Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido. $\xi = 1$

Nas Tabelas 6.2.3 e 6.2.4, temos as ONC_Γ para o erro calculados na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_h}$, bem

como cada um dos termos que compõe essa norma, obtidas com os valores $\xi = 1$ e $\xi = 0.50001$. Os resultados numéricos obtidos estão em conformidade com as estimativas de erro a priori obtidas no capítulo 4, ou seja, a ONC se aproxima do grau de aproximação polinomial b .

		Ordens em $ e _{DG}$		Ordens em $ e _{\Gamma}$		Ordens em $ e _{AC}$		Ordens em $ e _{\mathcal{T}_h}$	
b	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	$ e _{DG}$	ONC	$ e _{\Gamma}$	ONC	$ e _{AC}$	ONC	$ e _{\mathcal{T}_h}$	ONC
1	40	1.3118	0.1880	0.2599	1.0124	0.0026	-0.5693	1.3373	0.2440
	160	0.6473	1.0192	0.1276	1.0265	0.0013	0.9576	0.6597	1.0195
	640	0.3253	0.9927	0.0633	1.0101	0.0006	1.0270	0.3314	0.9934
	2560	0.1632	0.9946	0.0316	1.0045	0.0003	1.0423	0.1663	0.9950
2	40	0.2356	2.2632	0.0290	1.9708	0.3e-03	2.4224	0.2374	2.2597
	160	0.0627	1.9088	0.0072	2.0041	0.1e-03	2.0114	0.0632	1.9101
	640	0.0158	1.9935	0.0018	2.0045	1.9e-05	2.0209	0.0159	1.9937
	2560	0.0039	2.0033	0.0004	2.0020	4.7e-06	2.0221	0.0040	2.0033
3	40	0.0308	1.7403	1.7e-03	2.9902	3.0e-05	2.3400	0.0309	1.7509
	160	0.0037	3.0487	0.2e-03	3.0244	3.6e-06	3.0251	0.0037	3.0486
	640	0.0005	3.0120	2.6e-05	3.0071	4.4e-07	3.0557	0.0005	3.0120
	2560	0.0001	3.0048	3.3e-06	3.0022	5.1e-08	3.1003	0.0001	3.0048

Table 6.2.4: **Teste 1:** Taxas de convergência do método DG . $\xi = 0.50001$

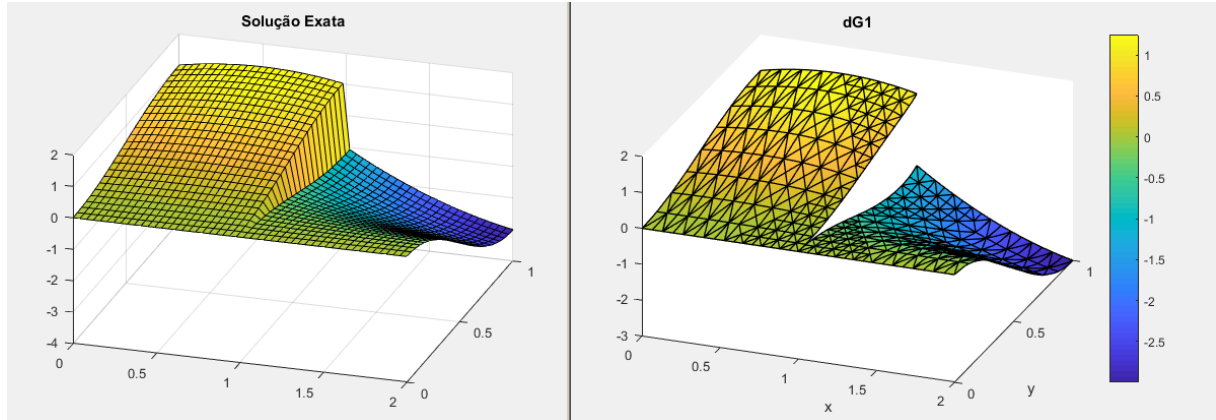


Figure 6.3.1: Teste 2. Solução exata (a esquerda) e solucción obtida com o Método de Galerkin Descontínuo (direita), com grau de aproximação polinomial $b=3$, malha de 640 triângulos e $\xi=3/4$.

6.3 Exemplo 2

No segundo teste, tomamos $K_{\Gamma}^{\mathcal{F}} = K_{\Gamma}^n = 0.01$, gerando um domínio com uma fractura isotrópica impermeável. Na Figura 6.3.1 apresentamos os gráficos da solução exata e da solução obtida pelo método de Galerkin Descontínuo. Nas Tabelas 6.3.1 e 6.3.2, apresentamos as ONC para os erros calculados nas normas $\|p - p_i\|_{L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)}$ e $\|p - p_{\Gamma_i}\|_{L_2(\Gamma, \Gamma_h)}$ em função do tamanho da malha, para diferentes valores de ξ . Novamente, em ambos os casos os resultados numéricos apresentam ONC $b+1$.

			Teste 2	
b	\mathbb{N}_{Γ}	$\mathbb{N}_{\Omega \setminus \Gamma}$	NOC_{Ω}	NOC_{Γ}
1	4	40	3.9605e-01	1.9241e+00
	8	160	2.2299e+00	1.7279e+00
	16	640	2.0219e+00	2.0049e+00
	32	2560	2.0073e+00	2.0264e+00
2	4	40	3.1148e+00	3.9453e+00
	8	160	2.8700e+00	3.1118e+00
	16	640	2.9625e+00	3.0307e+00
	32	2560	2.9894e+00	3.0822e+00
3	4	40	2.5418e+00	4.7321e+00
	8	160	4.0540e+00	4.0695e+00
	16	640	3.9974e+00	4.1425e+00
	32	2560	3.9977e+00	4.2922e+00

Table 6.3.1: Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , $\xi = 1$.

			Teste 2	
b	N_Γ	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	NOC_Ω	NOC_Γ
1	4	40	3.9604e-01	1.8865e+00
	8	160	2.2299e+00	1.6320e+00
	16	640	2.0219e+00	1.9641e+00
	32	2560	2.0073e+00	2.0095e+00
2	4	40	3.1148e+00	4.0385e+00
	8	160	2.8700e+00	3.1058e+00
	16	640	2.9625e+00	3.0212e+00
	32	2560	2.9894e+00	2.9961e+00
3	4	40	2.5419e+00	4.7836e+00
	8	160	4.0540e+00	4.0326e+00
	16	640	3.9974e+00	3.9903e+00
	32	2560	3.9977e+00	4.0005e+00

Table 6.3.2: Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , $\xi = 0.50001$.

		Ordens em $\ e\ _{DG}$		Ordens em $\ e\ _\Gamma$		Ordens em $\ e\ _{AC}$		Ordens em $\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	
b	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	$\ e\ _{DG}$	NOC	$\ e\ _\Gamma$	NOC	$\ e\ _{AC}$	NOC	$\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	NOC
1	40	1.3074	0.1956	1.0e-05	1.0265	0.0026	-0.5252	1.3074	0.1956
	160	0.6460	1.0170	5.9e-06	0.8107	0.0013	0.9587	0.6460	1.0170
	640	0.3249	0.9914	3.0e-06	0.9313	0.0006	1.0272	0.3249	0.9914
	2560	0.1632	0.9939	1.5e-06	0.9761	0.0003	1.0424	0.1632	0.9939
2	40	0.2353	2.2587	2.3e-06	2.0682	0.3e-03	2.4229	0.2353	2.2587
	160	0.0627	1.9081	5.5e-07	2.0747	0.1e-03	2.0117	0.0627	1.9081
	640	0.0158	1.9931	1.2e-07	2.1206	5.3e-05	2.0209	0.0158	1.9931
	2560	0.0039	2.0031	3.0e-08	2.0658	1.1e-05	2.0221	0.0039	2.0031
3	40	0.0308	1.7407	1.1e-07	2.1866	8.3e-05	2.3410	0.0308	1.7407
	160	0.0037	3.0484	1.6e-08	2.8587	9.1e-06	3.0253	0.0037	3.0484
	640	0.0005	3.0118	2.1e-09	2.9562	9.4e-07	3.0560	0.0005	3.0118
	2560	0.0001	3.0047	2.6e-10	2.9801	9.3e-08	3.0983	0.0001	3.0047

Table 6.3.3: **Teste 2:** Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido. $\xi = 3/4$ e $l_\Gamma = 0.000001$.

Novamente nas Tabelas 6.3.3 e 6.3.4, temos as ONC para o erros calculados na norma $\|(p - p_i, p - p_{\Gamma_i})\|_{\mathcal{T}_h}$, bem como para cada um dos termos que compõe essa norma, para $\xi = 3/4$ com os valores $l_{\Gamma} = 0.000001$ e $l_{\Gamma} = 0.01$. No primeiro caso, os resultados numéricos apresentam a ONC igual ao valor do grau de aproximação polinomial b empregado no método DG. No segundo caso, observamos uma pequena patologia na norma $\|\cdot\|_{AC}$, onde a ONC observado foi de $b+1$, o que não alterou as estimativas previstas para $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_h}$.

		Ordens em $\ e\ _{DG}$		Ordens em $\ e\ _{\Gamma}$		Ordens em $\ e\ _{AC}$		Ordens em $\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	
b	$\mathbb{N}_{\Omega \setminus \Gamma}$	$\ e\ _{DG}$	NOC	$\ e\ _{\Gamma}$	NOC	$\ e\ _{AC}$	NOC	$\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	NOC
1	40	1.3060	0.1931	1.7e-03	-0.7539	0.0332	1.2241	1.3064	0.1945
	160	0.6457	1.0163	0.9e-03	0.9953	0.0078	2.0845	0.6457	1.0166
	640	0.3248	0.9911	0.4e-03	1.0880	0.0019	2.0399	0.3248	0.9912
	2560	0.1631	0.9937	0.2e-03	1.0678	0.0005	2.0172	0.1631	0.9938
2	40	0.2352	2.2591	0.2e-03	2.5047	2.8e-03	3.7753	0.2353	2.2599
	160	0.0627	1.9079	9.2e-05	2.1026	0.3e-03	3.0235	0.0627	1.9079
	640	0.0157	1.9930	1.6e-05	2.0540	2.1e-05	3.0085	0.0157	1.9930
	2560	0.0039	2.0030	2.8e-06	2.0142	3.1e-06	3.0074	0.0039	2.0030
3	40	0.0308	1.7398	1.5e-05	2.0391	0.1e-03	3.2056	0.0308	1.7399
	160	0.0037	3.0484	1.4e-06	3.0203	3.5e-06	3.9409	0.0037	3.0484
	640	0.0005	3.0118	1.6e-07	3.0426	2.2e-07	3.9365	0.0005	3.0118
	2560	0.0001	3.0047	1.8e-08	3.0472	1.5e-08	3.9676	0.0001	3.0047

Table 6.3.4: **Teste 2:** Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido. $\xi = 3/4$ e $l_{\Gamma}=0.01$.

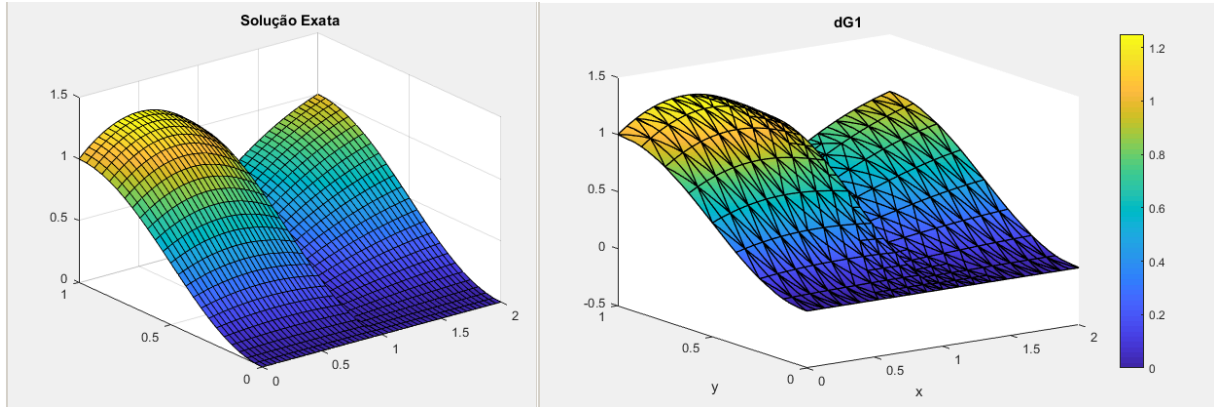


Figure 6.4.1: Teste 3. Solução exata (a esquerda) e solução obtida com o Método de Galerkin Descontínuo (direita), com grau de aproximação polinomial $b=3$, malha de 640 triângulos e $\xi=3/4$.

6.4 Exemplo 3

No terceiro teste, tomamos $K_{\Gamma}^{\mathcal{F}} = 10^{-1}$, $K_{\Gamma}^n = 10^{-5}$ e $l_{\Gamma} = 0.01$, gerando um domínio com uma fratura anisotrópica semi-impermeável. Na Figura 6.4.1 apresentamos os gráficos da solução exata e da solução obtida pelo método de Galerkin Descontínuo.

			Teste 3	
b	N_{Γ}	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	NOC_{Ω}	NOC_{Γ}
1	4	40	4.5803e-01	1.7066e+00
	8	160	2.1524e+00	1.7953e+00
	16	640	2.0048e+00	1.9016e+00
	32	2560	2.0018e+00	1.9531e+00
2	4	40	3.1819e+00	2.9083e+00
	8	160	2.8511e+00	2.9864e+00
	16	640	2.9631e+00	2.9981e+00
	32	2560	2.9900e+00	2.9997e+00
3	4	40	2.4702e+00	3.9141e+00
	8	160	4.0862e+00	3.9514e+00
	16	640	4.0036e+00	3.9774e+00
	32	2560	4.0008e+00	3.9896e+00

Table 6.4.1: Ordem Numérica de Convergência (ONC) na norma L_2 , para diferentes ordens de aproximação, com $\xi = 1$.

Nas Tabelas 6.4.1 e 6.4.2, apresentamos as ONC para os erros calculados em $\|p - p_i\|_{L_2(\Omega, \mathcal{T}_h)}$ e

$\|p - p_{\Gamma_i}\|_{L_2(\Gamma, \Gamma_h)}$ em função do tamanho da malha, empregando diferentes valores para ξ . Outra vez, em ambos os casos podemos observar ONC igual a $b+1$. Nas tabelas 6.4.3 e 6.4.4, temos

			Teste 3	
N	N_{Γ}	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	NOC_{Ω}	NOC_{Γ}
1	4	40	4.7185e-01	1.4143e+00
	8	160	2.1424e+00	2.0522e+00
	16	640	2.0006e+00	2.0243e+00
	32	2560	1.9994e+00	2.0244e+00
2	4	40	3.1808e+00	4.0576e+00
	8	160	2.8512e+00	3.0984e+00
	16	640	2.9629e+00	3.0181e+00
	32	2560	2.9898e+00	3.0440e+00
3	4	40	2.4703e+00	3.1777e+00
	8	160	4.0861e+00	3.9901e+00
	16	640	4.0036e+00	4.0697e+00
	32	2560	4.0009e+00	4.2306e+00

Table 6.4.2: Ordem Numérica de Convergência (ONC) em norma L_2 em meio poroso Ω e em fratura Γ , para diferentes ordens de aproximação, $\xi = 0.50001$.

		Ordens em $\ e\ _{DG}$		Ordens em $\ e\ _{\Gamma}$		Ordens em $\ e\ _{AC}$		Ordens em $\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	
b	$N_{\Omega \setminus \Gamma}$	$\ e\ _{DG}$	taxa	$\ e\ _{\Gamma}$	taxa	$\ e\ _{AC}$	taxa	$\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	taxa
1	40	0.6755	0.1887	2.0174	1.0169	0.3050	1.7450	2.1492	0.9932
	160	0.3314	1.0273	1.0013	1.0106	0.0869	1.8106	1.0583	1.0221
	640	0.1669	0.9896	0.4985	1.0063	0.0233	1.9026	0.5262	1.0081
	2560	0.0839	0.9931	0.2486	1.0034	0.0060	1.9513	0.2625	1.0034
2	40	0.1194	2.2961	0.2223	1.9217	1.9e-02	2.9128	0.2531	2.0346
	160	0.0324	1.8801	0.0564	1.9801	2.5e-03	2.9848	0.0651	1.9599
	640	0.0082	1.9904	0.0141	1.9952	0.3e-03	2.9977	0.0163	1.9948
	2560	0.0020	2.0011	0.0035	1.9988	3.9e-05	2.9996	0.0041	1.9996
3	40	0.0160	1.4915	1.3e-02	3.0009	0.9e-03	3.9092	0.0209	2.4910
	160	0.0019	3.0792	1.7e-03	3.0043	0.1e-03	3.9491	0.0025	3.0482
	640	0.0002	3.0084	0.2e-03	3.0023	3.8e-06	3.9767	0.0003	3.0060
	2560	0.0000	3.0034	2.6e-05	3.0010	2.4e-07	3.9894	0.0000	3.0025

Table 6.4.3: **Teste 3:** Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido, com $\xi = 3/4$

as ONC para os erros calculados na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_h}$, bem como para cada um dos termos que

compõe essa norma, com os valores $\xi = 3/4$ e $\xi = 0.50001$. No primeiro caso, observamos novamente uma pequena patologia em $\|\cdot\|_{AC}$, onde a ONC observado foi igual a $b+1$, o que não afetou as ONC obtidas para $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_h}$. No segundo caso, podemos observar que a ONC obtida é igual ao valor do grau de aproximação polinomial b .

b	$\mathbb{N}_{\Omega \setminus \Gamma}$	Ordens em $\ e\ _{DG}$		Ordens em $\ e\ _{\Gamma}$		Ordens em $\ e\ _{AC}$		Ordens em $\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	
		$\ e\ _{DG}$	taxa	$\ e\ _{\Gamma}$	taxa	$\ e\ _{AC}$	taxa	$\ e\ _{\mathcal{T}_h}$	taxa
1	40	0.6756	0.1865	0.0062	1.1971	0.0013	1.9140	0.6756	0.1867
	160	0.3314	1.0273	0.0033	0.8983	0.0005	1.4960	0.3315	1.0273
	640	0.1669	0.9896	0.0017	0.9856	0.0003	0.4919	0.1669	0.9896
	2560	0.0839	0.9931	0.0008	1.0964	0.0002	0.4467	0.0839	0.9931
2	40	0.1194	2.2961	1.4e-03	2.0396	0.3e-03	2.3376	0.1194	2.2961
	160	0.0324	1.8800	0.3e-03	2.1888	0.1e-03	1.5130	0.0324	1.8801
	640	0.0082	1.9904	0.1e-03	2.3376	2.5e-05	1.8412	0.0082	1.9904
	2560	0.0020	2.0011	1.1e-05	2.3000	5.5e-06	2.2020	0.0020	2.0011
3	40	0.0160	1.4914	0.1e-03	2.5737	2.6e-05	1.4976	0.0160	1.4915
	160	0.0019	3.0792	7.6e-06	3.0114	3.5e-06	2.9218	0.0019	3.0792
	640	0.0002	3.0084	8.7e-07	3.1341	3.9e-07	3.1572	0.0002	3.0085
	2560	0.0000	3.0034	9.3e-08	3.2221	4.7e-08	3.0756	0.0000	3.0035

Table 6.4.4: **Teste 3:** Taxas de convergência do método DG para o modelo reduzido, com $\xi = 0.50001$

7 Conclusões

Neste trabalho estudamos o Método Galerkin Descontínuo tanto no domínio quanto na fratura, no modelo de fratura única para alta e baixa permeabilidade para o problema de escoamento em meios porosos fraturados, com uma correspondência no malhado computacional fratura-domínio.

Começamos com uma abordagem do modelo de fratura exclusiva em alta e baixa permeabilidade. A seguir, efetuamos um estudo da formulação do Método de Galerkin Descontínuo para a equação de Poisson, gerando ferramentas para o estudo do Método de Galerkin Descontínuo aplicado à modelagem do problema de escoamento em meios porosos fraturados, depois, analisamos propriedades como continuidade e coercividade para a formulação discreta do método, provamos sua boa colocação e convergência para a solução exata do problema e, assim, obtivemos estimativas de erro a priori ótimas para o problema no domínio e na fratura. Em seguida, apresentamos detalhes da implementação computacional, primeiro gerando uma formulação matricial do problema variacional, continuando com as implementações unidimensional, bidimensional e as condições de acoplamento.

Finalmente, realizamos experimentos numéricos bidimensionais para domínios com fracturas altamente permeável, isotrópica impermeável e anisotrópica semi-impermeável, para assim avaliar a validade das estimativas teóricas na norma L_2 e na norma $||| \cdot |||_{\mathcal{T}_h}$, bem como para os termos que compõe essa norma. Seguidamente, com as boas taxas de convergência apreciadas na ONC, nos três testes numéricos, concluímos a validade das estimativas.

Observamos em dois dos três exemplos abordados, isotrópica impermeável e anisotrópica semi-impermeável, devido à natureza descontínua da solução na fratura, uma pequena patologia na norma $||| \cdot |||_{AC}$, corrigível dependendo do caso, que não afetou as ONC obtidas na norma $||| \cdot |||_{\mathcal{T}_h}$; as melhoras foram feitas quando $l_\Gamma \cong 0$ ($l_\Gamma = 0.000001$) e $\xi \cong 1/2$, respetivamente.

Um desenvolvimento natural do presente trabalho, será a extensão teórico-computacional para problemas com múltiplas fraturas; e deverá ser objeto de futuras investigações, uma construção do exposto aqui, para experimentos em domínios tridimensionais.

8 Apêndice

A seguir, efetuamos uma revisão da quadratura de Gauss para os Polinômios de Jacobi, em uma dimensão.

Considere N a ordem da quadratura de Gauss e $P_n^{(\alpha,\beta)}$ os polinômios de Jacobi dados pela fórmula de recorrência:

$$xP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = a_n P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) + b_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + a_{n+1} P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (8.0.1)$$

onde os coeficientes α_n e β_n são dados por:

$$a_n = \frac{2}{2n + \alpha + \beta} \sqrt{\frac{n(n + \alpha + \beta)(n + \alpha)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta + 1)}}$$

$$b_n = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}$$

A regra de Quadratura Gaussiana é expressa como:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{n=1}^N f(x_i) w_i$$

onde (x_i, w_i) são os nós e os pesos da quadratura. Essa quadratura é exata, para f um polinômio de ordem $2N + 1$, escolhendo x_i como as raízes de $P_n^{\alpha,\beta}$.

Note que se $\alpha = \beta = 0$ temos os polinômios de Legendre como base do espaço polinomial $\mathbb{P}_b(I)$.

Encontrar os nós e pesos pode ser feito de várias maneiras, uma delas é baseada na fórmula de recorrência (8.0.1); para mais detalhes, ver [GOLUB G.; WELSCH 1969]. Em JacobiGQ.m, uma implementação deste algoritmo é oferecida por:

```
function [x,w] = JacobiGQ(alpha,beta,N);

% function [x,w] = JacobiGQ(alpha,beta,N)
% Purpose: Compute the N'th order Gauss quadrature points, x,
%          and weights, w, associated with the Jacobi
%          polynomial, of type (alpha,beta) > -1 ( <> -0.5).

if (N==0) x(1)=(alpha-beta)/(alpha+beta+2); w(1) = 2; return; end;
```

```

% Form symmetric matrix from recurrence.
J = zeros(N+1);
h1 = 2*(0:N)+alpha+beta;
J = diag(-1/2*(alpha^2-beta^2)./(h1+2)./h1) + ...
      diag(2./(h1(1:N)+2).*sqrt((1:N).*((1:N)+alpha+beta)).*...
          ((1:N)+alpha).*((1:N)+beta)./(h1(1:N)+1)./(h1(1:N)+3)),1);
if (alpha+beta<10*eps) J(1,1)=0.0;end;
J = J + J';

%Compute quadrature by eigenvalue solve
[V,D] = eig(J); x = diag(D);
w = (V(1,:))'.^2*2^(alpha+beta+1)/(alpha+beta+1)*gamma(alpha+1)*...
     gamma(beta+1)/gamma(alpha+beta+1);
return;

```

No caso de duas dimensões empregamos a quadratura com os pontos Legendre-Gauss-Lobatto, ver [HESTHAVEN J.; WARBURTON 2007] capítulo 6 e [SOLÍN 2005] capítulo 4 seção 3. Seja (r,s) os pontos da quadratura no triângulo mestre \hat{T} , w os respectivos pesos, se NQG é o ordem da quadratura, temos:

```

function [r,s,w] = GaussQ(NQG)
switch (NQG)
case {1}
    r = -1/3;
    s = -1/3;
    w = 2.;
case {2}
    r = [-2/3; -2/3; 1/3];
    s = [-2/3; 1/3; -2/3];
    w = [2/3; 2/3; 2/3];
case {3}
    r = [-1/3; -0.6; -0.6; 0.2];
    s = [-1/3; -0.6; 0.2; -0.6];
    w = [-1.125; 25/24; 25/24; 25/24];
case {4}
    r = [-0.108103018168070; -0.108103018168070; -0.783793963663860;
          -0.816847572980458; -0.816847572980458; 0.633695145960918];

```



```

s = [-0.108103018168070; -0.783793963663860; -0.108103018168070;
      -0.816847572980458; 0.633695145960918; -0.816847572980458];
w = [ 0.446763179356022; 0.446763179356022; 0.446763179356022;
      0.219903487310644; 0.219903487310644; 0.219903487310644];

case{5}
r = [-1/3; -0.059715871789770; -0.059715871789770; -0.880568256420460;
      -0.797426985353088; -0.797426985353088; 0.594853970706174];
s = [-1/3; -0.059715871789770; -0.880568256420460; -0.059715871789770;
      -0.797426985353088; 0.594853970706174; -0.797426985353088];
w = [0.45; 0.264788305577012; 0.264788305577012; 0.264788305577012;
      0.251878361089654; 0.251878361089654; 0.251878361089654];

case{6}
r = [-0.501426509658180; -0.501426509658180; 0.002853019316358;
      -0.873821971016996; -0.873821971016996; 0.747643942033992;
      -0.379295097932432; 0.273004998242798; -0.893709900310366;
      -0.379295097932432; 0.273004998242798; -0.893709900310366];
s = [-0.501426509658180; 0.002853019316358; -0.501426509658180;
      -0.873821971016996; 0.747643942033992; -0.873821971016996;
      0.273004998242798; -0.893709900310366; -0.379295097932432;
      -0.893709900310366; -0.379295097932432; 0.273004998242798];
w = [ 0.233572551452758; 0.233572551452758; 0.233572551452758;
      0.101689812740414; 0.101689812740414; 0.101689812740414;
      0.165702151236748; 0.165702151236748; 0.165702151236748;
      0.165702151236748; 0.165702151236748; 0.165702151236748];

case{7}
r = [-1/3; -0.479308067841920; -0.479308067841920; -0.041383864316160;
      -0.869739794195568; -0.869739794195568; 0.739479588391136;
      -0.374269007990252; 0.276888377139620; -0.902619369149368;
      -0.374269007990252; 0.276888377139620; -0.902619369149368];
s = [-1/3; -0.479308067841920; -0.041383864316160; -0.479308067841920;
      -0.869739794195568; 0.739479588391136; -0.869739794195568;
      0.276888377139620; -0.902619369149368; -0.374269007990252;
      -0.902619369149368; -0.374269007990252; 0.276888377139620];
w = [-0.299140088935364; 0.351230514866416; 0.351230514866416;
      0.351230514866416; 0.106694471217676; 0.106694471217676;
      0.106694471217676; 0.154227521780514; 0.154227521780514;
      0.154227521780514; 0.154227521780514; 0.154227521780514;
      0.154227521780514];
end

```

```
if (NQG>7)
```

```
    r = [-1/3; -0.479308067841920; -0.479308067841920; -0.041383864316160;  
        -0.869739794195568; -0.869739794195568; 0.739479588391136;  
        -0.374269007990252; 0.276888377139620; -0.902619369149368;  
        -0.374269007990252; 0.276888377139620; -0.902619369149368];  
    s = [-1/3; -0.479308067841920; -0.041383864316160; -0.479308067841920;  
        -0.869739794195568; 0.739479588391136; -0.869739794195568;  
        0.276888377139620; -0.902619369149368; -0.374269007990252;  
        -0.902619369149368; -0.374269007990252; 0.276888377139620];  
    w = [-0.299140088935364; 0.351230514866416; 0.351230514866416;  
        0.351230514866416; 0.106694471217676; 0.106694471217676;  
        0.106694471217676; 0.154227521780514; 0.154227521780514;  
        0.154227521780514; 0.154227521780514; 0.154227521780514;  
        0.154227521780514];
```

```
end
```

```
end
```

References

- [ALBOIN et al. 2000]ALBOIN, C. et al. Domain decomposition for some transmission problems in flow in porous media. In: *Numerical treatment of multiphase flows in porous media*. [S.l.]: Springer, 2000. p. 22–34.
- [ANTONIETTI et al. 2016]ANTONIETTI, P. F. et al. Discontinuous galerkin approximation of flows in fractured porous media. *MOX-Report*, MOX, n. 22, 2016.
- [ANTONIETTI et al. 2016]ANTONIETTI, P. F. et al. Mimetic finite difference approximation of flows in fractured porous media. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 50, n. 3, p. 809–832, 2016.
- [ARNOLD 1982]ARNOLD, D. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 19, n. 4, p. 742–760, 1982.
- [ARNOLD et al. 2002]ARNOLD, D. N. et al. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM journal on numerical analysis*, SIAM, v. 39, n. 5, p. 1749–1779, 2002.
- [BABUŠKA I.; SURI 1987]BABUŠKA I.; SURI, M. The *hp* version of the finite element method with quasiuniform meshes. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, v. 21, n. 2, p. 199–238, 1987.
- [BAKER 1977]BAKER, G. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Mathematics of Computation*, v. 31, n. 137, p. 45–59, 1977.
- [BEAR J.; TSANG 2012]BEAR J.; TSANG, C. D. M. G. *Flow and contaminant transport in fractured rock*. [S.l.]: Academic Press, 2012.
- [CIARLET P.; ODEN 1978]CIARLET P.; ODEN, J. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 1978.
- [D’ANGELO C.; SCOTTI 2012]D’ANGELO C.; SCOTTI, A. A mixed finite element method for darcy flow in fractured porous media with non-matching grids. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 46, n. 2, p. 465–489, 2012.

- [DOLEJŠÍ V.; FEISTAUER 2015]DOLEJŠÍ V.; FEISTAUER, M. Discontinuous galerkin method. *Analysis and Applications to Compressible Flow. Springer Series in Computational Mathematics*, Springer, v. 48, 2015.
- [DOUGLAS J.; DUPONT 1976]DOUGLAS J.; DUPONT, T. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic galerkin methods. In: *Computing methods in applied sciences*. [S.l.]: Springer, 1976. p. 207–216.
- [FRIH N.; ROBERTS 2008]FRIH N.; ROBERTS, J. S. A. Modeling fractures as interfaces: a model for forchheimer fractures. *Computational Geosciences*, Springer, v. 12, n. 1, p. 91–104, 2008.
- [FUMAGALLI A.; SCOTTI 2013]FUMAGALLI A.; SCOTTI, A. A numerical method for two-phase flow in fractured porous media with non-matching grids. *Advances in Water Resources*, Elsevier, v. 62, p. 454–464, 2013.
- [GOLUB G.; WELSCH 1969]GOLUB G.; WELSCH, J. Calculation of gauss quadrature rules. *Mathematics of computation*, v. 23, n. 106, p. 221–230, 1969.
- [HESTHAVEN J.; WARBURTON 2007]HESTHAVEN J.; WARBURTON, T. *Nodal discontinuous Galerkin methods: algorithms, analysis, and applications*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- [MARTIN V.; JAFFRÉ 2005]MARTIN V.; JAFFRÉ, J. R. J. Modeling fractures and barriers as interfaces for flow in porous media. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 26, n. 5, p. 1667–1691, 2005.
- [NITSCHKE 1971]NITSCHKE, J. Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. In: SPRINGER. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. [S.l.], 1971. v. 36, n. 1, p. 9–15.
- [REED W.; HILL 1973]REED W.; HILL, T. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. [S.l.], 1973.
- [RIVIÈRE B.; WHEELER 2000]RIVIÈRE B.; WHEELER, M. A discontinuous galerkin method applied to nonlinear parabolic equations. In: *Discontinuous Galerkin methods*. [S.l.]: Springer, 2000. p. 231–244.

- [SERRES et al. 2002]SERRES, C. et al. *Modeling fractures as interfaces for flow and transport in porous media*. [S.l.], 2002.
- [SOLÍN 2005]SOLÍN, P. *Partial differential equations and the finite element method*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2005.
- [SÜLI E.;SCHAWB 2000]SÜLI E.;SCHAWB, C. H. P. hp-dgfem for partial differential equations with nonnegative characteristic form. In: *Discontinuous Galerkin Methods*. [S.l.]: Springer, 2000. p. 221–230.
- [WHEELER 1978]WHEELER, M. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 15, n. 1, p. 152–161, 1978.