Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

A estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$

Lucas Dodl e Souza
Orientadora: Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues

Florianópolis
Agosto de 2021

Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

A estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para a obtenção do grau de Mestre em Matemática, com Área de Concentração em Álgebra.

Lucas Dodl e Souza
Florianópolis
Agosto de 2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Souza, Lucas Dodl
A estrutura monoidal da categoria ACA / Lucas Dodl Souza ; orientadora, Virgínia Silva Rodrigues, 2021.
94 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2021.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Categoria dos A bimódulos. 3. Álgebra em uma categoria. 4. Módulos em uma categoria. 5. Categorias monoidais. I. Rodrigues, Virgínia Silva. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

A estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$

por

Lucas Dodl e Souza

Esta Dissertação foi julgada para a obtenção do Título de Mestre,
Área de Concentração em Álgebra, e aprovada em sua forma final pelo Curso de
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada.

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Daniel Goncalves
Data: 27/09/2021 14:43:44-0300
CPF: 017.022.459-77
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof. Dr. Daniel Gonçalves
(Coordenador da Pós-Graduação - UFSC)

Comissão examinadora

ICP-Edu
Documento assinado digitalmente
Virginia Silva Rodrigues
Data: 27/09/2021 13:41:54-0300
CPF: 001.753.416-05
Verifique as assinaturas em https://v.ufsc.br

Prof.ª Dra. Virgínia Silva Rodrigues
(Orientadora - UFSC)

Prof.ª Dra. Luz Adriana Mejía Castaño
(Universidad del Norte - Barraquilla - Colômbia)

Prof. Dr. Paulinho Demeneghi
(Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC)

Florianópolis, Agosto de 2021.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha família. Obrigado por me aturarem nesta reta final, por se preocuparem com a minha postura sentado em frente ao computador, por cuidarem dos cachorros enquanto eu estudava e, como sempre, por serem presentes em todo o percurso. Amo vocês.

À minha maravilhosa orientadora, Virgínia. *V*, sua ajuda na concretização deste trabalho foi fundamental. Muito obrigado por todos os ensinamentos, por todas as carinhas raivosas (e com amor) nas folhas de correção e, principalmente, por ser um exemplo de profissional e pessoa.

À Professora Luz Adriana Mejía Castaño e ao Professor Paulinho Demeneghi por terem aceitado participar da banca avaliadora, meus mais sinceros agradecimentos.

Finalmente, obrigado a todos os meus amigos e amigas que contribuíram de alguma forma ao longo desses anos, seja estudando aos finais de semana, auxiliando na construção de seminários e compartilhando listas de exercícios ou até estando disponíveis para um encontro com comida e conversa boa.

Resumo

Sejam $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categoria monoidal abeliana tal que o funtor tensor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é exato à direita em cada variável e A uma álgebra em $\mathcal{C}$. O objetivo deste trabalho é construir a estrutura monoidal para a categoria ${}_A\mathcal{C}_A$ dos A-bimódulos em $\mathcal{C}$.

Palavras chaves: Categoria dos A-bimódulos, álgebra em uma categoria, módulos em uma categoria, categorias monoidais.

Abstract

Let $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ be an abelian monoidal category such that the tensor functor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ is right exact in each variable and let A be an algebra in $\mathcal{C}$. The purpose of this work is to build the monoidal structure to ${}_A\mathcal{C}_A$, the categorie of A-bimodules in $\mathcal{C}$.

Keywords: Categories of A-Bimodules, Algebra in Categories, Modules in Categories, Monoidal Categories.

Sumário

Introdução

A teoria de categorias é apresentada pela primeira vez em 1945 por S. Eilenberg e S. Mac Lane no trabalho intitulado *General Theory of Natural Equivalences*, veja [4]. Como dito em [7], a teoria tem como propósito tentar descrever certos aspectos gerais de diversos campos matemáticos conhecidos. Neste contexto, são abstraídos os conceitos de conjuntos e de funções de estruturas como, por exemplo, as de grupos e homomorfismos na álgebra abstrata e de espaços topológicos e funções contínuas na topologia, para estudar propriedades que possam ser provadas independetemente de onde se encontrem. Assim, a teoria de categorias torna-se muito valiosa em diversas áreas.

> *In a metamathematical sense our theory provides general concepts applicable to all branches of mathematics, and so contributes to the current trend towards uniform treatment of different mathematical disciplines.* ([4], p.236)

Algum tempo mais tarde, em 1963, S. Mac Lane define os *funtores*, que relacionam as categorias, e as *categorias monoidais*, que são categorias munidas de um funtor $\otimes$ e um objeto $\mathbf{1}$ tais que os objetos $(X \otimes Y) \otimes Z$ e $X \otimes (Y \otimes Z)$ se relacionam (pelo chamado *axioma do pentágono*) e tais que os objetos $\mathbf{1} \otimes X$, X, $X \otimes \mathbf{1}$ também se relacionam (pelo chamado *axioma do triângulo*), veja [10] e [11]. Então, pautadas na associatividade dos objetos das categorias, agora possível devido às categorias monoidais, diversas definições novas aparecem, dentre as quais destacamos a *categoria ${}_A\mathcal{C}_A$ dos A-bimódulos*, tema principal desta dissertação.

O objetivo deste trabalho é entender as definições e algumas demonstrações da Seção 3.3 das notas de aula *Una introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones* [12] do Prof. Dr. Martín Mombelli. Nesta seção, são dadas as definições de *álgebra*, *módulo* (à direita e à esquerda) e *bimódulo* em uma categoria $\mathcal{C}$ qualquer, culminando no *Teorema 3.3.10*, em que é definida a estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$. Este teorema é feito para categorias monoidais *estritas*, que são categorias em que $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ e $\mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$. Porém, tal hipótese foi retirada durante nosso estudo. Desta forma, perceber-se-á que devido à esta supressão, o *axioma do pentágono* e a chamada *naturalidade* dos isomorfismos que compõem a definição de uma categoria monoidal são fortemente utilizadas, nos auxiliando na demonstração do teorema. Vale a pena ressaltar que não encontramos na literatura uma demonstração feita sob tais circunstâncias.

No Capítulo 1, apresentamos os pré-requisitos necessários sobre a teoria de categorias. Dividido em seções e com alguns exemplos, este capítulo aborda os conceitos de categorias, funtores e transformações naturais, núcleos e conúcleos e categorias abelianas. Dentre as diversas definições que damos neste capítulo, destacam-se os *coequalizadores*, que são primordiais para a demonstração do teorema principal desta dissertação.

No Capítulo 2, estudamos as categorias monoidais. Este é um capítulo importante, pois estabelecemos definições e propriedades essenciais que são muito utilizadas no capítulo seguinte.

Finalmente, no Capítulo 3, fornecemos as definições de álgebras, módulos (à direita e à esquerda) e bimódulos em uma categoria monoidal. Além disso, apresentamos um exemplo que motiva a construção da segunda parte do capítulo onde, de fato, construímos uma estrutura monoidal para a categoria ${}_A\mathcal{C}_A$.

Tal exemplo inclui o conceito de uma *biálgebra* na categoria dos espaços vetoriais, conceito este no qual está embutida a definição de uma *coálgebra*. Assim, de modo a tornar o nosso trabalho autocontido, desenvolvemos um apêndice com tal definição e algumas propriedades necessárias para o entendimento do exemplo.

Capítulo 1

Pré-requisitos

Este primeiro capítulo tem como objetivo apresentar ao leitor as ferramentas básicas para a compreensão dos capítulos seguintes. Para sua elaboração, foram utilizados [1], [5], [10], [12] e [14].

1.1 Categorias

Definição 1.1.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de*

(i) *uma coleção de objetos, denotada por $Obj(\mathcal{C})$,*

(ii) *para cada par de objetos (X, Y), X, Y em $Obj(\mathcal{C})$, existe uma coleção de morfismos de X para Y em $\mathcal{C}$, denotada por $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$,*

(iii) *para cada X em $Obj(\mathcal{C})$, existe um morfismo $id_X : X \to X$, chamado morfismo identidade,*

(iv) *para quaisquer X, Y, Z em $Obj(\mathcal{C})$ é definida uma operação, chamada composição, dada por*

$$\begin{array}{rccc} \circ: & Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ & (g,f) & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Esta operação deve satisfazer, para quaisquer f em $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ e h em $Hom_{\mathcal{C}}(Z, W)$, as seguintes condições:

(a) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (b) $f \circ id_X = f = id_Y \circ f$.

Na definição de categorias apresentada, evitamos a escrita de "conjunto de objetos" e "conjunto de morfismos", uma vez que tais coleções não são, na maioria das vezes, conjuntos. Neste trabalho, não focamos na explicação dos termos conjuntos e classes (coleções). O leitor pode encontrar explicações sobre este assunto em [2].

Ainda assim, para facilitar a escrita, usamos notações da Teoria de Conjuntos, por abuso, mas deixando claro que temos ciência das diferenças existentes.

Denotamos um morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ por $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$, chamado X, o domínio, e Y, o contradomínio, de f. Também, escreveremos $X \in \mathcal{C}$, para qualquer objeto X em $\mathcal{C}$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, para qualquer morfismo f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Exemplo 1.1.2. A categoria *Set* é aquela cujos objetos são conjuntos e os morfismos são funções entre estes conjuntos.

Para o exemplo a seguir, recordamos que uma relação R entre dois conjuntos A e B é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplo 1.1.3. A categoria ***Rel*** é aquela cujos objetos são conjuntos e os morfismos são as relações. Nesta categoria, dados A, B, C conjuntos e $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ relações, a composição $S \circ R \subseteq A \times C$ é definida como sendo a relação

$$S \circ R := \{(a,c) \in A \times C : \text{existe } b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R \text{ e } (b,c) \in S\}.$$

Aqui, $id_A : A \to A$ é a relação $id_A = \{(a,a) \in A \times A : a \in A\} \subseteq A \times A$.

Os exemplos mais clássicos de categorias são aqueles cujos objetos são conjuntos que possuem uma estrutura adicional e cujos morfismos são funções que preservam esta estrutura.

Exemplo 1.1.4. A categoria *Mon* é aquela cujos objetos são monóides e os morfismos são morfismos de monóides.

Exemplo 1.1.5. A categoria *Grp* é aquela cujos objetos são grupos e os morfismos são homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.1.6. A categoria *Ab* é aquela cujos objetos são grupos abelianos e os morfismos são homomorfismos de grupos.

Exemplo 1.1.7. A categoria *Ring* é aquela cujos objetos são anéis e os morfismos são homomorfismos de anéis.

Exemplo 1.1.8. Seja R um anel. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ (respectivamente $\mathcal{M}_R$) é aquela cujos objetos R-módulo à esquerda (respectivamente à direita) e os morfismos são homomorfismos de R-módulos à esquerda (respectivamente à direita). A categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ é aquela cujos objetos são R-bimódulos e os morfismos são homomorfismos de R-bimódulos.

Exemplo 1.1.9. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. A categoria $Vect_{\mathbb{K}}$ é aquela cujos objetos são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e cujos morfismos são transformações $\mathbb{K}$-lineares.

Define-se também a categoria $vect_{\mathbb{K}}$ cujos objetos são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita e os morfismos são transformações $\mathbb{K}$-lineares.

Exemplo 1.1.10. A categoria *Top* é aquela cujos objetos são os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas.

Exemplo 1.1.11. A categoria *Diff* é aquela cujos objetos são as variedades diferenciáveis e os morfismos são as funções diferenciáveis.

Exemplo 1.1.12. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, chamada *categoria produto*, é aquela cujos objetos são pares (X, X'), em que $X \in \mathcal{C}$ e $X' \in \mathcal{D}$, e que dados $(X, X'), (Y, Y') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$,

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) = (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')).$$

Nesta categoria, dados $(X, X'), (Y, Y'), (Z, Z') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ e

$$\begin{aligned}((g, g'), (f, f')) \in & Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((Y, Y'), (Z, Z')) \times Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Y, Y')) = \\ &= (Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z), Hom_{\mathcal{C}}(Y', Z')) \times (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{D}}(X', Y')),\end{aligned}$$

temos que a composição é dada por

$$\circ((g, g'), (f, f')) = (g, g') \circ (f, f') := (g \circ f, g' \circ f'),$$

em que $(g \circ g, g' \circ f') \in Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X, X'), (Z, Z'))$.

Observemos que nesta categoria $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$. De fato, para todo $(f, f') \in (Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), Hom_{\mathcal{C}}(X', Y'))$ temos que

$$(f, f') \circ (id_X, id_{X'}) = (f \circ id_X, f' \circ id_{X'}) = (f, f'),$$

e, para todo $(g, g') \in (Hom_{\mathcal{C}}(Z, X), Hom_{\mathcal{C}}(Z', X'))$, temos

$$(id_X, id_{X'}) \circ (g, g') = (id_X \circ g, id_{X'} \circ g') = (g, g').$$

Assim, $id_{(X,X')} = (id_X, id_{X'})$.

Exemplo 1.1.13. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. A categoria $\mathcal{C}^{op}$ é aquela cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ e, dados X, Y em $\mathcal{C}$,

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Se $f \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(Y,Z)$, ou seja, $f : Y \to X$ e $g : Z \to Y$ ambos em $\mathcal{C}$, então a composição em $\mathcal{C}^{op}$ é dada por

$$g \circ^{op} f = f \circ g.$$

1.2 Funtores e transformações naturais

Os funtores seriam as "funções" entre as categorias. Eles têm como objetivo relacionar os objetos e os morfismos entre duas categorias. Já as transformações naturais são responsáveis por relacionar os funtores.

Definição 1.2.1. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ consiste de duas aplicações*

(i) *uma aplicação*

$$\begin{array}{cccc} F: & Obj(\mathcal{C}) & \to & Obj(\mathcal{D}) \\ & X & \mapsto & F(X), \end{array}$$

em que cada $X \in \mathcal{C}$ está associado ao objeto $F(X)$ em $\mathcal{D}$,

(ii) *uma aplicação*

$$\begin{array}{cccc} F: & Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) & \to & Hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \\ & f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

tal que, para qualquer $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$, está associado ao morfismo $F(f)$ em $\mathcal{D}$.

Além disso, para quaisquer morfismos f em $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e g em $Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, são satisfeitas

$$\text{(a) } F(id_X) = id_{F(X)} \qquad \text{(b) } F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Um funtor *covariante* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, além de associar morfismos identidades de uma categoria com os morfismos identidade de outra categoria, quando aplicado em uma composição de morfismos, preserva a ordem desta composição. Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "id_X"] \\
\mathcal{C} \arrow[d, "F"'] & & Z & X \\
\mathcal{D} & F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g)\circ F(f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] & F(X) \arrow[d, "id_{F(X)}"] \\
 & & F(Z) & F(X).
\end{tikzcd}$$

Analogamente conseguimos definir o funtor *contravariante*, em que a única diferença figura na condição (b), que "inverte" a composição. Neste caso, quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, deve ocorrer $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "id_X"] \\
\mathcal{C} \arrow[d, "F"'] & & Z & X \\
\mathcal{D} & F(X) & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] & F(X) \arrow[d, "id_{F(X)}"] \\
 & & F(Z) \arrow[ul, "F(f)\circ F(g)"] \arrow[u, "F(g)"'] & F(X).
\end{tikzcd}$$

Neste trabalho, toda vez que nos referirmos a um funtor ele será covariante, salvo quando dito o contrário.

Exemplo 1.2.2. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. O *funtor identidade* $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é tal que $Id_{\mathcal{C}}(X) = X$ e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$, para quaisquer objetos X em $\mathcal{C}$ e morfismos $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$.

Exemplo 1.2.3. Seja $F : Ring \to Ab$ dado por $F(A) = A$ e $F(f) = f$, para todo A em *Ring* e todo $f : A \to B$ morfismo em *Ring*. Este funtor é chamado *funtor esquecimento*, pois em $F(A) = A$ é desconsiderada a estrutura de anéis e é preservada apenas a estrutura de grupos abelianos. Já em $F(f) = f$ é esquecida a estrutura de homomorfismo de anéis e preserva-se apenas f como morfismo de grupos abelianos.

Outros exemplos de funtores similares seriam $F : {}_R\mathcal{M} \to Ab$ e $F : Ab \to Grp$.

Exemplo 1.2.4. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria e X um objeto em $\mathcal{C}$ fixado. Dado um morfismo $f : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, definimos $(X,-) : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ como sendo a aplicação

$$(X,-)(Y) = (X,Y) \text{ e } (X,-)(f) = (id_X, f).$$

Afirmamos que $(X,-)$ é um funtor.

De fato, dado um objeto Y em $\mathcal{C}$ temos que

$$(X,-)(id_Y) = (id_X, id_Y) = id_{(X,Y)} = id_{(X,-)(Y)}$$

e portanto vale (a). Além disso, dados $f : Y \to Z$ e $g : Z \to W$ morfismos em $\mathcal{C}$, temos

$$(X,-)(g \circ f) = (id_X, g \circ f) = (id_X \circ id_X, g \circ f) = (id_X, g) \circ (id_X, f) = (X,-)(g) \circ (X,-)(f),$$

e portanto vale (b).

Analogamente conseguimos definir o funtor $(-,Y)$. Estes funtores são importantes para a definição de um certo funtor ser exato à direita.

Exemplo 1.2.5. Consideremos $\times : Set \times Set \to Set$ definido por

$$\times(X,Y) = X \times Y \text{ e } \times(f,g) = f \times g,$$

em que $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ e assim, $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ é definida por $(f \times g)(x,y) = (f(x), g(y))$, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Afirmamos que $\times$ é um funtor.

De fato, sejam $f : X \to X', f' : X' \to X'', g : Y \to Y'$ e $g' : Y' \to Y''$. Então, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned}
(\times(id_{(X,Y)}))(x,y) &= (\times(id_X, id_Y))(x,y) \\
&= (id_X \times id_Y)(x,y) \\
&= (id_X(x), id_Y(y)) \\
&= (x,y) \\
&= id_{X\times Y}(x,y) \\
&= id_{\times(X,Y)}(x,y)
\end{aligned}$$

e assim $\times(id_{(X,Y)}) = id_{\times(X,Y)}$. Também,

$$\begin{aligned}
(\times((f',g')\circ(f,g)))(x,y) &= (\times(f'\circ f, g'\circ g))(x,y)\\
&= ((f'\circ f)\times(g'\circ g))(x,y)\\
&= ((f'\circ f)(x),(g'\circ g)(y))\\
&= (f'(f(x)),g'(g(y)))\\
&= (f'\times g')(f(x),g(y))\\
&= (f'\times g')((f\times g)(x,y))\\
&= ((f'\times g')\circ(f\times g))(x,y)
\end{aligned}$$

e portanto, $\times((f',g')\circ(f,g)) = (f'\times g')\circ(f\times g) = \times(f',g')\circ\times(f,g)$.

Exemplo 1.2.6. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ categorias. Dados dois funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$, definimos $F\times G : \mathcal{C}\times\mathcal{D} \to \mathcal{C}'\times\mathcal{D}'$ como sendo a aplicação

$$(F\times G)(X,X') = (F(X),G(X')) \quad \text{e} \quad (F\times G)(f,f') = (F(f),G(f')),$$

em que $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são morfismos em $\mathcal{C}$ e $f' : X' \to Y'$ e $g' : Y' \to Z'$ são morfismos em $\mathcal{D}$.
Afirmamos que $F\times G$ é um funtor.

De fato, observemos que

$$\begin{aligned}
(F\times G)(id_{(X,X')}) &= (F\times G)(id_X, id_{X'})\\
&= (F(id_X),G(id_{X'}))\\
&= (id_{F(X)}, id_{G(X')})\\
&= id_{(F(X),G(X'))}\\
&= id_{(F\times G)(X,X')}
\end{aligned}$$

ou seja, é válida a condição (a) da definição de funtor. Daí, como

$$\begin{aligned}
(F\times G)((g,g')\circ(f,f')) &= (F\times G)(g\circ f, g'\circ f')\\
&= (F(g\circ f),G(g'\circ f'))\\
&= (F(g)\circ F(f),G(g')\circ G(f'))\\
&= (F(g),G(g'))\circ(F(f),G(f'))\\
&= (F\times G)(g,g')\circ(F\times G)(f,f'),
\end{aligned}$$

vale a condição (b) e, portanto, $F \times G$ é um funtor.

O exemplo a seguir nos mostra que a composição de funtores também é um funtor.

Exemplo 1.2.7. Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ categorias e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ funtores. A aplicação $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ é definida por

$$(G \circ F)(X) = G(F(X)) \text{ e } (G \circ F) = G(F(f)),$$

para todo objeto X e, para todo morfismo f em $\mathcal{C}$, é um funtor.

De fato, para todo objeto X em $\mathcal{C}$ temos que

$$(G \circ F)(id_X) = G(F(id_X)) = G(id_{F(X)}) = id_{G(F(id_X))} = id_{(G\circ F)(id_X)}.$$

Além disso, para quaisquer morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathcal{C}$, temos

$$(G\circ F)(g\circ f) = G(F(g\circ f)) = G(F(g)\circ F(f)) = G(F(g))\circ G(F(f)) = (G\circ F)(g)\circ(G\circ F)(f).$$

Portanto, $G \circ F$ é um funtor.

Um conceito bastante importante para e estudo da Teoria de Categorias é o de *diagrama comutativo*. Um diagrama comutativo é um diagrama em que todos os seus caminhos com o mesmo início e fim levam ao mesmo resultado por composição. Por exemplo, se $f : X \to X'$, $f' : Y \to Y'$, $g : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ morfismos em uma categoria $\mathcal{C}$, então o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "g'"] \\ Y \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

é dito comutativo se, e somente se, $f' \circ g = g' \circ f$.

Para terminar esta seção, definimos as *transformações naturais*.

Definição 1.2.8. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\mu : F \to G$ é uma coleção de morfismos*

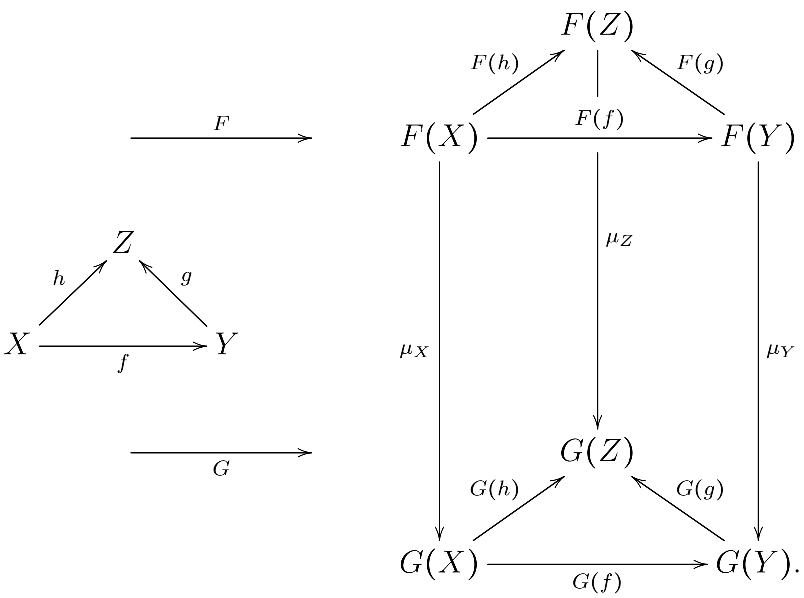
$$\mu = \{\mu_X : F(X) \to G(X)\}_{X\in\mathcal{C}}$$

em $\mathcal{D}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\mu_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\mu_Y"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$, isto é, $\mu_Y \circ F(f) = G(f) \circ \mu_X$.

Podemos pensar nas transformações naturais como uma coleção de morfismos responsável por transferir a composição de certos funtores para outros. Veja o diagrama



Se $\mu_X : F(X) \to G(X)$ é um isomorfismo, para todo objeto X em $\mathcal{C}$, μ é dito um *isomorfismo natural.* Neste caso, dizemos que os funtores F e G são *equivalentes* e escrevemos $F \sim G$.

Exemplo 1.2.9. Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. A *transformação natural identidade* $ID : F \to F$ é definida pela coleção de morfismos $ID = \{ID_X = id_{F(X)} : F(X) \to F(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$. Além disso, ID é um isomorfismo natural, visto que $ID_X = id_{F(X)}$ é um isomorfismo, para qualquer objeto X em $\mathcal{C}$.

1.3 Núcleo e conúcleo

O fato de que os objetos de uma categoria, em geral, não são conjuntos nos impede de aplicar os morfismos em "elementos". Desta forma, quando queremos garatir que uma categoria possua alguma propriedade particular, transferimos estas propriedades para os seus morfismos.

Definição 1.3.1. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um objeto Z em $\mathcal{C}$ é dito objeto zero se, para todo objeto X em $\mathcal{C}$ existem únicos morfismos $\phi_X : X \to Z$ e $\varphi_X : Z \to X$, ou seja, $Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) = \{\phi_X\}$ e $Hom_{\mathcal{C}}(Z, X) = \{\varphi_X\}$.*

Proposição 1.3.2. *O objeto zero, se existir, é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Sejam Z e Z' objetos zero em $\mathcal{C}$. Desta forma, como Z' é objeto zero, existem únicos morfismos $\phi_Z : Z \to Z'$ e $\varphi_Z : Z' \to Z$. Daí, como $Hom_{\mathcal{C}}(Z, Z) = \{id_Z\}$, segue que $\varphi_Z \circ \phi_Z = id_Z$. Analogamento, por Z ser objeto zero, $\phi_Z \circ \varphi_Z = id_{Z'}$. Portanto, $Z \cong Z'$. □

Exemplo 1.3.3. Nas categorias *Grp*, *Ab*, $\mathcal{M}_R$ e $_R\mathcal{M}$ o grupo trivial $\{e\}$ é o objeto zero da categoria.

Definição 1.3.4. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero Z. Para quaisquer objetos X e Y em $\mathcal{C}$ definimos o morfismo nulo $0_Y^X : X \to Y$ como sendo o morfismo que comuta o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "0_Y^X"] \arrow[dr, "\phi_X"'] & & Y \\ & Z. \arrow[ur, "\varphi_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.3.5. Nas categorias *Grp*, *Ab*, $\mathcal{M}_R$ e $_R\mathcal{M}$ o morfismo nulo é homomorfismo trivial.

Proposição 1.3.6. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria em que Z é um objeto zero, X, Y, L, W objetos quaisquer em $\mathcal{C}$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, L)$. Então $f \circ 0_Y^X = 0_L^X$ e $0_W^L \circ f = 0_W^Y$.*

Demonstração. Temos, por definição, que $f \circ 0_Y^X = f \circ \psi_Y \circ \phi_X$. Além disso, $\psi_L = f \circ \psi_Y$, segue da unicidade na definição de objeto zero. Portanto,

$$\begin{aligned} f \circ 0_Y^X &= f \circ \psi_Y \circ \phi_X \\ &= \psi_L \circ \phi_X \\ &= 0_L^X. \end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos a outra igualdade. □

Definição 1.3.7. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$.*

(i) *Um núcleo de f é um par $(Ker(f), k)$, em que $Ker(f)$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $k : Ker(f) \to X$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$. Além disso, dados K' um objeto em $\mathcal{C}$ e $k' : K' \to X$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, então existe um único morfismo $\mu : K' \to Ker(f)$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo*

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y , \\ & K' \arrow[ul, dashed, "\mu"] \arrow[u, "k'"'] & \end{tikzcd}$$

ou seja, $k \circ \mu = k'$.

(ii) *Um conúcleo de f é um par $(Coker(f), q)$, em que $Coker(f)$ é um objeto em $\mathcal{C}$ e $q : Y \to Coker(f)$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q \circ f = 0^X_{Coker(f)}$. Além disso, dados Q' um objeto em $\mathcal{C}$ e $q' : Y \to Q'$ um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que $q' \circ f = 0^X_{Q'}$, então existe um único morfismo $\gamma : Coker(f) \to Q'$ tal que o diagrama abaixo seja comutativo,*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & Coker(f) \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & Q' & \end{tikzcd} ,$$

ou seja,$\gamma \circ q = q'$.

Exemplo 1.3.8. Em ${}_R\mathcal{M}$, todo morfismo possui núcleo e conúcleo.

De fato, seja $f : M \to N$ um morfismo de R-módulos à esquerda. É sabido que $P = \{m \in M : f(m) = 0_N\}$ e $f(M)$ são R-submódulos de M e N, respectivamente. Assim

$$(P, k) \text{ e } \left(\frac{N}{f(M)}, q\right)$$

são um núcleo e um conúcleo de f, respectivamente, em que $k : P \to M$ e $q : N \to \frac{N}{f(M)}$ são a inclusão e a projeção canônicas, respectivamente.

Confome definido acima, os núcleos e os conúcleos são pares formados por um objeto e um morfismo em $\mathcal{C}$. Em alguns momentos, para simplificar a notação, escreveremos apenas o morfismo para representar o par. No caso do núcleo, o domínio e o morfismo representarão o par e, no caso no conúcleo, o contradomínio e o morfismo.

Definição 1.3.9. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.*

(i) *Dizemos que um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é um monomorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : W \to X$ tais que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.*

(ii) *Dizemos que um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ é um epimorfismo se, para quaisquer morfismos $g, h : Y \to W$ tais que $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.*

Notemos que dizer que $f : X \to Y$ é um monomorfismo significa que podemos o cancelar à esquerda. Analogamente, dizer que $f : X \to Y$ é um epimorfismo significa que podemos o cancelar à direita.

Proposição 1.3.10. *Se $f : X \to Y$ é um morfismo $\mathcal{C}$, $k : Ker(f) \to X$ é um núcleo de f e $q : Y \to Coker(f)$ é um conúcleo de f, então k é um monomorfismo e q é um epimorfismo.*

Demonstração. Sejam $g, h : W \to Ker(f)$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $k \circ g = k \circ h$. Como

$$f \circ (k \circ g) = (f \circ k) \circ g = 0_Y^{Ker(f)} \circ g = 0_Y^W,$$

pela unicidade na definição de núcleo, existe um único morfismo $w : W \to Ker(f)$ tal que $k \circ w = k \circ g$. Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd}
Ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
 & Ker(f) \arrow[u, "k"'] & \\
 & W. \arrow[u, "g"'] \arrow[uul, dashed, "w"] &
\end{tikzcd}$$

Porém, como $k \circ g = k \circ h$, pela unicidade de w, segue que $w = g = h$ e portanto, k é um monomorfismo.

Anogamente, se considerarmos agora $g, h : Coker(f) \to W$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $g \circ q = h \circ q$. Como

$$(g \circ q) \circ f = g \circ (q \circ f) = g \circ 0_{Coker(f)}^X = 0_W^X,$$

pela unicidade da definição de conúcleo, existe um único morfismo $w : Coker(f) \to W$ tal que $w \circ q = g \circ q$. Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q"'] & Coker(f) \arrow[ddl, dashed, "w"] \\
 & Coker(f) \arrow[d, "g"'] & \\
 & W. &
\end{tikzcd}$$

Daí, como $g \circ q = h \circ q$, pela unicidade do de w, segue que $w = g = h$ e portanto, q é um epimorfismo. $\square$

Proposição 1.3.11. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$.*

(i) *Se f e g são monomorfismos, então $g \circ f : X \to Z$ também é um monomorfismo.*

(ii) *Se f e g são epimorfismos, então $g \circ f : X \to Z$ também é um epimorfismo.*

Demonstração. (i) Sejam $r, s : W \to X$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $(g \circ f) \circ r = (g \circ f) \circ s$. Como a composição de morfismos em uma categoria é associativa, $g \circ (f \circ r) = g \circ (f \circ s)$. Daí, como g é monomorfismo, $f \circ r = f \circ s$ e como f é monomorfismo, $r = s$. Portanto,

$g \circ f$ é monomorfismo.

(ii) Sejam $r, s : Z \to W$ morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $r \circ (g \circ f) = s \circ (g \circ f)$. Assim, $(r \circ g) \circ f = (s \circ g) \circ f$ e sendo f epimorfismo, $r \circ g = s \circ g$ e como g é epimorfismo, $r = s$. Portanto, $g \circ f$ é epimorfismo. □

Definição 1.3.12. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dois monomorfismos $\iota_1 : X_1 \to X$ e $\iota_2 : X_2 \to X$ em $\mathcal{C}$ são ditos equivalentes se existe um isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ tal que o diagrama comuta,*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, dashed, "u"] \arrow[dr, "\iota_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & X, & \end{tikzcd}$$

isto é, $\iota_2 \circ u = \iota_1$.

Um subobjeto de X é uma classe de equivalência de monomorfismos para X, ou seja, o par (Y, ι) é dito um subobjeto de X se existe um monomorfismo $\iota : Y \to X$. Desta forma, dizer que dois subobjetos (Y_1, ι_1) e (Y_2, ι_2) de X são iguais, é dizer que ι_1 e ι_2 são monomorfismos equivalentes.

Exemplo 1.3.13. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo que possui núcleo. Então $(Ker(f), k)$ é um subobjeto de X.

Proposição 1.3.14. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. O núcleo de f, se existir, é único, como subobjeto de X.*

Demonstração. Sejam $(Ker(f), k)$ e (K', k') núcleos de f. Como $f \circ k' = 0_Y^{K'}$, pela definição de núcleo, existe um único morfismo $u : K' \to Ker(f)$ tal que $k' = k \circ u$. Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} Ker(f) \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & K'. \arrow[ul, dashed, "u"] \arrow[u, "k'"'] & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que u é um isomorfismo. De fato, como $f \circ k = 0_Y^{Ker(f)}$, novamente pela definição de núcleo, existe um único morfismo $u' : Ker(f) \to K'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "k'"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & Ker(f) \arrow[ul, dashed, "u'"] \arrow[u, "k"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, $k = k' \circ u'$. Assim, como $k \circ (u \circ u') = (k \circ u) \circ u' = k' \circ u' = k$ e $k \circ id_{Ker(f)} = k$ segue, da unicidade na definição de núcleo, que $u \circ u' = id_{Ker(f)}$. Analogamente, como

$k' \circ (u' \circ u) = (k' \circ u') \circ u = k \circ u = k'$ e $k' \circ id_{K'} = k'$ segue, da unicidade da definição de núcleo, que $u' \circ u = id_{K'}$. Portanto, $u : K' \to Ker(f)$ é um isomorfismo. Além disso, k e k' são monomorfismos equivalentes pois $k \circ u = k'$. Logo, $(Ker(f), k) = (K', k')$ como subobjetos de X. □

Definição 1.3.15. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Dois epimorfismos $q_1 : X \to X_1$ e $q_2 : X \to X_2$ em $\mathcal{C}$ são ditos equivalentes se existe um isomorfismo $u : X_1 \to X_2$ tal que o diagrama comuta,*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, dashed, "u"] & & X_2 \\ & X, \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] & \end{tikzcd}$$

isto é, $u \circ q_1 = q_2$.

Um quociente de X é uma classe de equivalência de epimorfismos para X, ou seja, o par (Y, q) é dito um quociente de X se existe um epimorfismo $q : X \to Y$. Desta forma, dizer que dois quocientes (Y_1, q_1) e (Y_2, q_2) de X são iguais, é análogo a dizer que q_1 e q_2 são epimorfismos equivalentes.

Exemplo 1.3.16. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo que possui conúcleo. Então $(Coker(f), q)$ é um quociente de Y.

Proposição 1.3.17. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto zero e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. O conúcleo de f, se existir, é único, como quociente de Y.*

Demonstração. Sejam $(Coker(f), q)$ e (Q', q) conúcleos de f. Como $q' \circ f = 0^X_{Q'}$, pela definição de conúcleo, existe um único morfismo $\gamma : Coker(f) \to Q'$ tal que $q' = \gamma \circ q$. Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"'] & Coker(f) \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & Q'. & \end{tikzcd}$$

Afirmamos que γ é um isomorfismo. De fato, como $q \circ f = 0^X_{Coker(f)}$, novamente pela definição de conúcleo, existe um único morfismo $\gamma' : Q' \to Coker(f)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "q"'] & Q' \arrow[dl, dashed, "\gamma'"] \\ & Coker(f) & \end{tikzcd}$$

comuta, isto é, $q = \gamma' \circ q'$. Como

$$(\gamma \circ \gamma') \circ q' = \gamma \circ (\gamma' \circ q') = \gamma \circ q = q'$$

e $id_{Q'} \circ q' = q'$ segue, da unicidade na definição de conúcleo, que $\gamma \circ \gamma' = id_{Q'}$. Anologamente, como

$$(\gamma' \circ \gamma) \circ q = \gamma' \circ (\gamma \circ q) = \gamma \circ q' = q$$

e $id_{Coker(f)} \circ q = q$ segue, da definição de conúcleo, que $\gamma' \circ \gamma = id_{Coker(f)}$. Portanto, $\gamma : Coker(f) \to Q'$ é um isomorfismo e, além disso, $q' = \gamma \circ q$, ou seja, q e q' são epimorfismos equivalentes. Logo, $(Coker(f), q) = (Q', q')$ como quocientes de Y. □

1.4 Categorias abelianas

A existência de núcleos e de conúcleos de quaisquer morfismos não é garantida em qualquer categoria. Motivados por tal necessidade, esta seção tem por objetivo definir as categorias abelianas. Nestas categorias, dentre tantas outras propriedades, núcleos e conúcleos de qualquer morfismo sempre existem.

Definição 1.4.1. *Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se pré-aditiva se*

(i) *$\mathcal{C}$ possui objeto zero;*

(ii) *para quaisquer objetos X, Y em $\mathcal{C}$, $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é um grupo abeliano;*

(iii) *a composição de morfismos é bilinear, isto é, para quaisquer morfismos $f, f' : X \to Y$ e $g, g' : Y \to Z$ valem*

$$g \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f'$$

$$(g + g') \circ f = g \circ f + g' \circ f.$$

Proposição 1.4.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. O elemento neutro de $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ é o morfismo 0_Y^X.*

Demonstração. Seja $e \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ o elemento neutro desse grupo. Assim,

$$0_Y^X = 0_Y^X \circ 0_X^X = (e + 0_Y^X) \circ 0_X^X = e \circ 0_X^X + 0_Y^X \circ 0_X^X = 0_Y^X + 0_Y^X.$$

Logo, $e = 0_Y^X - 0_Y^X = 0_Y^X + 0_Y^X - 0_Y^X = 0_Y^X$. □

Exemplo 1.4.3. A categoria *Ab* é pré-aditiva.

De fato, como visto em exemplos anteriores, o grupo trivial $\{e\}$ é o objeto zero da categoria *Ab*. Além disso, dados $f, g : G \to H$ morfismos de grupos abelianos, é sabido que $Hom_{Ab}(G,H)$ possui uma estrutura de grupo aditivo abeliano dado por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in G.$$

Exemplo 1.4.4. Se A é um anel com unidade, $\mathbb{K}$ é um corpo e R é uma $\mathbb{K}$-álgebra, utilizando os mesmos argumentos do exemplo anterior, conclui-se que as categorias ${}_A\mathcal{M}$, $Vect_{\mathbb{K}}$ e ${}_R\mathcal{M}$ são pré-aditivas.

Definição 1.4.5. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva e X, Y objetos em $\mathcal{C}$. Uma soma direta de X e Y é uma quíntupla $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, \iota_X, \iota_Y)$, em que $X \oplus Y$ é um objeto em $\mathcal{C}$, $\pi_X : X \oplus Y \to X$, $\pi_Y : X \oplus Y \to Y$, $\iota_X : X \to X \oplus Y$ e $\iota_Y : Y \to X \oplus Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$ que satisfazem as seguintes igualdades*

(i) $\pi_X \circ \iota_X = id_X$ *e* $\pi_Y \circ \iota_Y = id_Y$*;*

(ii) $\iota_X \circ \pi_X + \iota_Y \circ \pi_Y = id_{X \oplus Y}$.

Definição 1.4.6. *Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se aditiva se*

(i) *$\mathcal{C}$ é pré-aditiva;*

(ii) *para quaisquer X e Y objetos em $\mathcal{C}$, existe uma soma direta $(X \oplus Y, \pi_X, \pi_Y, \iota_X, \iota_Y)$ de X e Y.*

Exemplo 1.4.7. A categoria Ab é aditiva.

De fato, já vimos que esta categoria é pré-aditiva. Basta considerarmos a soma direta de G e H em Ab como sendo o produto cartesiano $G \times H$ (junto com as inclusões e projeções canônicas).

Exemplo 1.4.8. A categoria ${}_R\mathcal{M}$ é aditiva.

De fato, já vimos que ${}_R\mathcal{M}$ é pré-aditiva. Além disso, dados dois R-módulos M e N, a quíntupla $(M \oplus N, \pi_M, \pi_N, \iota_M, \iota_N)$ é a soma direta de M e N, em que $M \oplus N$ é a soma direta de R-módulos à esquerda já conhecida da álgebra clássica, π_M e π_N são as projeções canônicas e ι_M e ι_N são as inclusões canônicas.

Definição 1.4.9. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias pré-aditivas. Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é dito aditivo se, para todo par de objetos X, Y em $\mathcal{C}$ vale*

$$F(f + g) = F(f) + F(g),$$

para quaisquer $f, g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Exemplo 1.4.10. Seja $\mathcal{C}$ uma categoria pré-aditiva. O funtor identidade é aditivo.

Exemplo 1.4.11. O funtor esquecimento ${}_R\mathcal{M} \to Ab$ é aditivo.

Definição 1.4.12. *Uma categoria $\mathcal{C}$ diz-se abeliana se*

(i) *$\mathcal{C}$ é aditiva;*

(ii) *todo morfismo em $\mathcal{C}$ possui núcleo e conúcleo;*

(iii) *todo monomorfismo é um núcleo e todo epimorfismo é um conúcleo.*

Exemplo 1.4.13. A categoria Ab é abeliana.

De fato, pelo Exemplo 1.4.7 sabemos que Ab é uma categoria aditiva e por um racicínio análogo ao feito no Exemplo 1.3.8 temos que todo morfismo em Ab possui núcleo e conúcleo. Reta-nos mostrar o item (iii) da definição acima.

Suponhamos que $f : G \to H$ é um monomorfismo em Ab. Não é difícil ver que o par (G, f) é o núcleo da projeção canônica $\pi : H \to \frac{H}{f(G)}$. Da mesma forma, se $g : I \to J$ é um epimorfismo, o par (J, g) é o conúcleo da inclusão canônica $\iota : Ker(g) \to I$.

Com os mesmos argumentos apresentados no exemplo anterior mostramos que a categoria ${}_R\mathcal{M}$ é abeliana.

Exemplo 1.4.14 ([12], Ejemplo 2.8.1.4). Se $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana, então C^{op} também o é.

Exemplo 1.4.15 ([12], Ejemplo 2.8.1.4). Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são categorias abelianas, então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ também o é.

Dentre as diversas ferramentas que vamos utilizar no último capítulo, certamente o *coequalizador* é "coração" de todas elas.

Definição 1.4.16. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria e $f, g : X \to Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}$. Um coequalizador para o par (f, g) é um par (Z, c), em que $c : Y \to Z$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que*

(i) *$c \circ f = c \circ g$;*

(ii) *Se $h : Y \to W$ é um morfismo tal que $h \circ f = h \circ g$, então existe um único morfismo $u : Z \to W$ tal que $u \circ c = h$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h"'] & Z \arrow[d, dashed, "u"] \\ & & W \end{tikzcd}$$

Assim como feito para o núcleo e para o conúcleo, para simplificar a notação, escreveremos em alguns momentos apenas o morfismo $c : Y \to Z$ para denotar o coequalizador (Z, c). Entende-se, neste caso, que o par é constituído pelo contradomínio do morfismo c e pelo próprio morfismo.

Proposição 1.4.17. *Sejam $f, g : X \to Y$ morfismos em $\mathcal{C}$. O coequalizador do par (f, g), se existe, é único, como quociente de Y.*

Demonstração. Sejam (Z, c) e (Z', c') coequalizadores de (f, g). Então $c' \circ f = c' \circ g$ e sendo $c : Y \to Z$ um coequalizador, existe um único morfismo $u : Z \to Z'$ tal que $u \circ c = c'$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & Z \arrow[d, dashed, "u"] \\ & & Z' \end{tikzcd}$$

Afirmamos que u é um isomorfismo. De fato, como $c \circ f = c \circ g$ e sendo $c' : Y \to Z'$ um coequalizador, existe um único morfismo $u' : Z' \to Z$ tal que $u' \circ c' = c$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c'"] \arrow[dr, "c"'] & Z' \arrow[d, dashed, "u'"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

Além disso, também pelo fato de $c : Y \to Z$ ser coequalizador, o morfismo $id_Z : Z \to Z$ é único tal que comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c"'] & Z \arrow[d, dashed, "id_C"] \\ & & Z. \end{tikzcd}$$

Ora, mas temos também que

$$(u' \circ u) \circ c = u' \circ (u \circ c) = u' \circ c' = c,$$

ou seja, $u' \circ u : Z \to Z'$ também comuta o diagrama. Assim, concluímos que $u' \circ u = id_Z$. Analogamente, por $c' : Z \to Z'$ ser coequalizador, $u \circ u' = id_{Z'}$. Portanto, $u : Z \to Z'$ é um isomorfismo e sendo $u \circ c = c'$, concluímos também que c e c' são epimorfismos equivalentes. Logo, $(Z, c) = (Z', c')$ como quocientes de Y. □

O leitor pode questionar-se sobre a existência dos coequalizadores em uma categoria qualquer, visto que, certamente, não são em todas as categorias em que a existência dos coequalizadores é garantida. Entretanto, como trabalhamos com categorias abelianas, é garantida a existência de coequalizador para quaisquer pares de morfismos. De fato, como veremos na proposição a seguir, em toda categoria abeliana, o coequalizador de um par qualquer de morfismos (f, g) é o conúcleo da diferença $f - g$ daqueles morfismos. Em categorias abelianas, todo morfismo possui conúcleo e assim, a existência dos coequalizadores está assegurada.

Proposição 1.4.18. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana, $f, g : X \to Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}$ e $c : Y \to Z$ o coequalizador de (f, g). Então (Z, c) é o conúcleo do morfismo $f - g : X \to Y$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que $c \circ (f - g) = 0_Z^X$ e que dado um morfismo $h : Y \to W$ em $\mathcal{C}$ tal que $h \circ (f - g) = 0_W^X$, então existe um único morfismo $\gamma : Z \to W$ tal que $\gamma \circ c = h$.

Como c é coequalizador de (f, g), temos que $c \circ f = c \circ g$ e portanto, $c \circ f - c \circ g = 0_Z^X$. Sendo a composição de morfismos em $\mathcal{C}$ bilinear, visto que $\mathcal{C}$ é abeliana (e portanto pré-aditiva), segue que $c \circ (f - g) = 0_Z^X$.

Consideremos agora um morfismo $h : Y \to W$, em que W é um objeto em $\mathcal{C}$ tal que $h \circ (f - g) = 0_W^X$. Assim, $h \circ f - h \circ g = 0_W^X$ e, portanto, $h \circ f = h \circ g$. Como c é um coequalizador, existe um único morfismo $\gamma : Z \to W$ tal que $\gamma \circ c = h$, veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f-g"] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[d, "h"'] & Z \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\ & W. & \end{tikzcd}$$

Portanto, (Z, c) é o conúcleo para $f - g$. □

Corolário 1.4.19. *Em uma cateogira abeliana, todo coequalizador é um epimorfismo.*

Demonstração. Segue diretamente da proposição anterior e da Proposição 1.3.10. □

Enunciamos agora, sem provar, alguns resultados e definições envolvendo sequências exatas em uma categoria abeliana.

Até o final do capítulo, consideremos $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana. Usamos [14] como referência.

Definição 1.4.20. *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$. A imagem de f, denotada por $Im(f)$, é dada por*

$$Im(f) = Ker(coKer(f)).$$

Definição 1.4.21. *Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ morfismos em $\mathcal{C}$. A sequência*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

é uma sequência exata em Y se $Im(f) = Ker(g)$, como subobjetos de Y.

Generalizando a definição anterior, uma sequência

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1}$$

é dita *exata* se é exata em X_i, para todo $i \in \{2, 3, ..., n-1, n\}$.

Proposição 1.4.22 (**[14], Proposição 1.1.16**). *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$ e $(Ker(f), k)$ o núcleo de f. São equivalentes:*

(i) *f é um monomorfismo;*

(ii) *$(Ker(f), k) = (0, 0_X^0)$;*

(iii) $0 \xrightarrow{0_X^0} X \xrightarrow{f} Y$ *é uma sequência exata.*

Abaixo enunciamos a mesma versão para epimorfismos.

Proposição 1.4.23 (**[14], Proposição 1.1.17**). *Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$ e $(Coker(f), q)$ o núcleo de f. São equivalentes:*

(i) *f é um epimorfismo;*

(ii) *$(Coker(f), q) = (0, 0_0^Y)$;*

(iii) $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{0_0^Y} 0$ *é uma sequência exata.*

Exemplo 1.4.24 (**[14], Lema 1.1.21**). Sejam $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{C}$,$(Ker(f), k)$ o núcleo de f e $(Coker(f), q)$ o conúcleo de f. A sequência

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{k} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{q} Coker(f) \longrightarrow 0$$

é exata.

Finalmente, terminamos o capítulo dando a definição de funtor exato à direita. Para [12], um funtor aditivo é dito exato à direita se ele preserva os conúcleos. Já para [5], é um funtor que preserva epimorfismos em sequências exatas curtas. Porém, em ([9], p. 24) temos o resultado que mostra a equivalência entre estas definições.

Definição 1.4.25 (**[12], Definición 2.7.36**). *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias abelianas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se exato à direita se, para todo morfismo $f : X \to Y$, $Coker(F(f)) = F(Coker(f))$.*

Definição 1.4.26 (**[5], Definition 1.6.1**). *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias abelianas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ diz-se exato à direita se para toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

em $\mathcal{C}$, *a sequência*

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{D}$.

Capítulo 2

Categorias monoidais

Segundo os autores em [5], uma maneira agradável de pensarmos sobre teoria de categoria é que a mesma seria uma "categorificação" da álgebra clássica. De uma outra forma, existe um dicionário entre os dois assuntos, em que as estruturas algébricas são obtidas das estruturas categóricas correspondentes considerando o conjunto de classes de isomorfismo de objetos.

A noção de uma categoria é a categorificação da noção de conjunto. Similarmente, categorias abelianas são a categorificação de grupos abelianos, o que justifca a terminologia. Assim, como há outros dicionários para certas categorias como em [6], já mencionada anteriormente.

Recordamos que um *monóide* é uma terna $(A, \cdot, 1)$, em que A é um conjunto não vazio com uma operação $\cdot$ associativa e o elemento $1 \in A$ é tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a, \forall a \in A$. A noção de uma categoria monoidal é uma categorificação da noção de um monóide.

Esse capítulo é fundamental, pois o principal teorema da dissertação versa exatamente sobre fornecer uma estrutura monoidal a uma determinada categoria. Para sua elaboração utilizamos [5] e [12].

2.1 Definições e propriedades

Definição 2.1.1. *Uma categoria monoidal é uma sêxtupla $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ em que $\mathcal{C}$ é uma categoria, $\otimes$ é um funtor, chamado funtor tensor, tal que*

$$\begin{array}{rccc} \otimes: & \mathcal{C} \times \mathcal{C} & \rightarrow & \mathcal{C} \\ & (X, Y) & \mapsto & \otimes(X, Y) = X \otimes Y \\ & (f, g) & \mapsto & \otimes(f, g) = f \otimes g, \end{array}$$

em que se $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ *são morfismos em* $\mathcal{C}$, *então* $f \otimes g : X \otimes Z \to Y \otimes W$ *é um morfismo em* $\mathcal{C}$ *e* $\mathbf{1}$ *é um objeto em* $\mathcal{C}$, *chamado unidade. A tripla* a, l, r *são isomorfismos naturais tais que*

$$a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$$

$$l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}}$$

$$r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}}$$

em que, para quaisquer X, Y, Z *em* $\mathcal{C}$,

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z),\ l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X \text{ e } r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X$$

são isomorfismos em $\mathcal{C}$.

Além disso, para quaisquer X, Y, Z, W *em* $\mathcal{C}$, *os diagramas abaixo*

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,Y,Z} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[d, "a_{X, Y \otimes Z, W}"'] & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "a_{X,Y,Z \otimes W}"] \\
X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

comutam.

Na definição acima, a comutatividade do primeiro diagrama chama-se *axioma do pentágono* e do segundo chama-se *axioma do triângulo.* O isomorfismo natural a chama-se *associatividade* da categoria monoidal $\mathcal{C}$.

Notemos que para o isomorfismo natural $a : \otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}) \to \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)$, os funtores envolvidos são

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes \times Id_{\mathcal{C}}"] \arrow[rr, bend left, "\otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}})"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "Id_{\mathcal{C}} \times \otimes"] \arrow[rr, bend left, "\otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[r, "\otimes"] & \mathcal{C}.
\end{tikzcd}$$

Para os isomorfismos naturais $l : \mathbf{1} \otimes - \to Id_{\mathcal{C}}$ e $r : - \otimes \mathbf{1} \to Id_{\mathcal{C}}$, temos que

$$\mathbf{1} \otimes -, - \otimes \mathbf{1}, Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}.$$

Escrevemos aqui como tais funtores aplicam-se aos morfismos. Sejam $f : X \to Y, g : W \to Z$ e $h : L \to K$ morfismos em $\mathcal{C}$. Então

$$(\otimes \circ (\otimes \times Id_{\mathcal{C}}))(f, g, h) = (f \otimes g) \otimes h \text{ e } \otimes \circ (Id_{\mathcal{C}} \times \otimes)(f, g, h) = f \otimes (g \otimes h),$$

$$(\mathbf{1} \otimes -)(f) = id_{\mathbf{1}} \otimes f \text{ e } (- \otimes \mathbf{1})(f) = f \otimes id_{\mathbf{1}}.$$

A seguir, descrevemos como o funtor $\otimes$ aplica-se numa composição e à identidade. Os resultados produzidos por esse cálculo são muito utilizados não somente neste capítulo como também no próximo. Iremos usá-los sem fazer qualquer menção. Para $f : X \to Y, f' : Y \to W, g : X' \to Y'$ e $g' : Y' \to W'$ morfismos em $\mathcal{C}$, temos que

$$\otimes((f', g') \circ (f, g)) = \otimes(f' \circ f, g' \circ g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$$

Por outro lado, por ser $\otimes$ um funtor, segue que

$$\otimes((f', g') \circ (f, g)) = \otimes(f', g') \circ \otimes(f, g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g).$$

Logo,

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g).$$

Também,

$$\otimes(id_X, id_Y) = \otimes(id_{(X,Y)}) = id_{\otimes(X,Y)} = id_{X \otimes Y}$$

e, por definição, $\otimes(id_X, id_Y) = id_X \otimes id_Y$. Portanto,

$$id_{X \otimes Y} = id_X \otimes id_Y.$$

Além disso, dados $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ e $h : Z \to Z'$ morfismos em $\mathcal{C}$, é importante ressaltarmos que as naturalidades de a, l e r, muitíssimas utilizadas no próximo capítulo, são representas, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "(f \otimes g) \otimes h"'] & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[d, "f \otimes (g \otimes h)"] \\
(X' \otimes Y') \otimes Z' \arrow[r, "a_{X',Y',Z'}"'] & X' \otimes (Y' \otimes Z'),
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\mathbf{1} \otimes X' \arrow[r, "l_{X'}"'] & X'
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f \otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X' \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{X'}"'] & X'.
\end{tikzcd}$$

A seguinte proposição também fornece resultados usados no Capítulo 3, sem que façamos qualquer menção à mesma.

Proposição 2.1.2. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então são válidas as afirmações.*

(i) *Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W,Z)$. Então*

$$f \otimes g = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_W) \quad e \quad f \otimes g = (f \otimes id_Z) \circ (id_X \otimes g).$$

(ii) *Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W,Z)$. Se f e g são isomorfismos então $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(W,Z)$. Então

$$f \otimes g = (f \circ id_X) \otimes (id_Z \circ g) = (f \otimes id_Z) \circ (id_X \circ g)$$

e

$$f \otimes g = (id_Y \circ f) \otimes (g \circ id_W) = (id_Y \otimes g) \circ (f \otimes id_W)$$

e portanto, vale (i). Além disso, se f e g forem isomorfismos, como $\otimes$ é funtor, temos que

$$\begin{aligned}(f^{-1} \otimes g^{-1}) \circ (f \otimes g) &= (f^{-1} \circ f) \otimes (g^{-1} \circ g) \\ &= id_X \otimes id_W \\ &= \otimes(id_X, id_W) \\ &= \otimes(id_{(X,W)}) \\ &= id_{\otimes(X,W)} \\ &= id_{X \otimes W}.\end{aligned}$$

Analogamente, $(f \otimes g) \circ (f^{-1} \otimes g^{-1}) = id_{Y \otimes Z}$ e portanto $(f^{-1} \otimes g^{-1}) = (f \otimes g)^{-1}$. □

Proposição 2.1.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então o objeto **1** é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Suponhamos que exista $\mathbf{1}'$ um outro objeto unidade em $\mathcal{C}$. Consideremos o isomorfismo natural $l' : \mathbf{1}' \otimes - \to Id_{\mathcal{C}}$. Assim, para todo $X \in \mathcal{C}$, $l'_X : \mathbf{1}' \otimes X \to X$ é um isomorfismos em $\mathcal{C}$. Em particular, se $X = \mathbf{1}$ em l'_X e $X = \mathbf{1}'$ em r_X, então $l'_{\mathbf{1}} : \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1} \to \mathbf{1}$ e $r_{\mathbf{1}'} : \mathbf{1}' \otimes \mathbf{1} \to \mathbf{1}'$. Portanto, $r_{\mathbf{1}'} \circ (l'_{\mathbf{1}})^{-1} : \mathbf{1} \to \mathbf{1}'$ é um isomorfismo, pois é a composição de isomorfismos. Logo, os objetos $\mathbf{1}$ e $\mathbf{1}'$ são isomorfos. □

O próximo resultado é usado para provar a Proposição 2.1.5 que virá a seguir. Esta proposição é uma peça importante para o próximo capítulo.

Lema 2.1.4. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Se $f, g : X \to Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que $id_{\mathbf{1}} \otimes f = id_{\mathbf{1}} \otimes g$, então $f = g$. Analogamente, se $f \otimes id_{\mathbf{1}} = g \otimes id_{\mathbf{1}}$, então $f = g$.*

Demonstração. Da naturalidade de l, segue o diagrama comutativo abaixo

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbf{1} \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Temos que $f \circ l_X = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes f) = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes g)$ pois, por hipótese, $id_{\mathbf{1}} \otimes f = id_{\mathbf{1}} \circ g$. Da naturalidade de l, segue que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}} \otimes g"'] & X \arrow[d, "g"] \\ \mathbf{1} \otimes Y \arrow[r, "l_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, como $f \circ l_X = l_Y \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes g) = g \circ l_X$, segue que $f \circ l_X \circ (l_X)^{-1} = g \circ l_X \circ (l_X)^{-1}$. Então $f \circ id_X = g \circ id_X$ e portanto, $f = g$.

Agora, consideremos o diagrama cuja comutatividade vem da naturalidade de r

$$\begin{tikzcd} X \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f \otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_Y"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Portanto, $f \circ r_X = r_Y \circ (f \otimes id_{\mathbf{1}}) = r_Y \circ (g \otimes id_{\mathbf{1}})$. Com um diagrama análogo ao anterior, trocando f por g, segue que $f \circ r_X = r_Y \circ (g \otimes id_{\mathbf{1}}) = g \circ r_X$ o que implica $f = g$. □

Proposição 2.1.5. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Então são válidas as afirmações abaixo.*

(i) $l_{\mathbf{1} \otimes X} = id_{\mathbf{1}} \otimes l_X$ *e* $r_{X \otimes \mathbf{1}} = r_X \otimes id_{\mathbf{1}}$.

(ii) *Os diagramas*

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbf{1},X,Y}"] \arrow[dr, "l_X \otimes id_Y"'] & \arrow[d, phantom, "(A)"] & \mathbf{1} \otimes (X \otimes Y) \arrow[dl, "l_{X \otimes Y}"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (X \otimes Y) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "a_{X,Y,\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "r_{X \otimes Y}"'] & \arrow[d, phantom, "(B)"] & X \otimes (Y \otimes \mathbf{1}) \arrow[dl, "id_X \otimes r_Y"] \\ & X \otimes Y & \end{tikzcd}$$

comutam.

(iii) $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$.

Demonstração. (i) Devido às naturalidades de l e r, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes X) \arrow[r, "l_{\mathbf{1}\otimes X}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes l_X"'] & \mathbf{1}\otimes X \arrow[d, "l_X"] \\
\mathbf{1}\otimes X \arrow[r, "l_X"'] & X
\end{tikzcd}
\quad \text{e} \quad
\begin{tikzcd}
(X\otimes\mathbf{1})\otimes\mathbf{1} \arrow[r, "r_{X\otimes\mathbf{1}}"] \arrow[d, "r_X\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & X\otimes\mathbf{1} \arrow[d, "r_X"] \\
X\otimes\mathbf{1} \arrow[r, "r_X"'] & X.
\end{tikzcd}$$

comutam. Daí, como l_X e r_X são isomorfismos, segue que

$$l_{\mathbf{1}\otimes X} = (l_X)^{-1}\circ l_X\circ(id_{\mathbf{1}}\otimes l_X) = id_{\mathbf{1}\otimes X}\circ(id_{\mathbf{1}}\otimes l_X) = id_{\mathbf{1}}\otimes l_X$$

e

$$r_{X\otimes\mathbf{1}} = (r_X)^{-1}\circ r_X\circ(r_X\otimes id_{\mathbf{1}}) = id_{X\otimes\mathbf{1}}\circ(r_X\otimes id_{\mathbf{1}}) = r_X\otimes id_{\mathbf{1}}.$$

(ii) Para mostrarmos a comutatividade do diagrama (A), consideremos o diagrama abaixo, em que X, Y, W são objetos quaisquer em $\mathcal{C}$,

$$\begin{tikzcd}
 & & (X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W \arrow[drr, "id_{(X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W}"] & & \\
((X\otimes\mathbf{1})\otimes Y)\otimes W \arrow[urr, "a_{X,\mathbf{1},Y}\otimes id_W"] \arrow[drr, "(r_X\otimes id_Y)\otimes id_W"'] \arrow[ddd, "a_{X\otimes\mathbf{1},Y,W}"'] \arrow[rrrr, phantom, "(1)"] \arrow[ddrr, phantom, "(2)"] & & & & (X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W \arrow[dll, "(id_X\otimes l_Y)\otimes id_W"] \arrow[ddd, "a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}"] \arrow[ddll, phantom, "(3)"] \\
 & & (X\otimes Y)\otimes W \arrow[d, "a_{X,Y,W}"] & & \\
 & & X\otimes(Y\otimes W) & & \\
(X\otimes\mathbf{1})\otimes(Y\otimes W) \arrow[urr, "r_X\otimes(id_{Y\otimes W})"] \arrow[drr, "a_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}"'] \arrow[rr, phantom, "(4)"] & & & & X\otimes((\mathbf{1}\otimes Y)\otimes W) \arrow[ull, "id_X\otimes(l_Y\otimes id_W)"'] \arrow[dll, "id_X\otimes a_{\mathbf{1},Y,W}"] \arrow[ll, phantom, "(5)"] \\
 & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes(Y\otimes W)) \arrow[uu, "id_X\otimes l_{Y\otimes W}"] & &
\end{tikzcd}$$

Uma vez que podemos omitir no diagrama acima o morfismo $id_{(X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W}$, segue que o diagrama externo ao diagrama acima é o axioma do pentágono e portanto comuta, veja abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) \otimes W \arrow[dl, "a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{X \otimes \mathbf{1},Y,W}"] & \\
(X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \otimes W \arrow[d, "a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}"'] & (P) & (X \otimes \mathbf{1}) \otimes (Y \otimes W) \arrow[d, "a_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}"'] \\
X \otimes ((\mathbf{1} \otimes Y) \otimes W) \arrow[rr, "id_X \otimes a_{\mathbf{1},Y,W}"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes (Y \otimes W)).
\end{tikzcd}$$

A comutatividade de (1) vem do axioma do triângulo dado abaixo

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y}"] \arrow[dr, "r_X \otimes id_Y"'] & & X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y) \arrow[dl, "id_X \otimes l_Y"] \\
 & X \otimes Y. &
\end{tikzcd}$$

De fato, temos que $r_X \otimes id_Y = (id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y}$ e assim,

$$\begin{aligned}
\otimes(r_X \otimes id_Y, id_W) = (r_X \otimes id_Y) \otimes id_W &= \otimes((id_X \otimes l_Y) \circ a_{X,\mathbf{1},Y}, id_W) \\
&= \otimes((id_X \otimes l_Y, id_W) \circ (a_{X,\mathbf{1},Y}, id_W)) \\
&= ((id_X \otimes l_Y) \otimes id_W) \circ (a_{X,\mathbf{1},Y} \otimes id_W),
\end{aligned}$$

que nos garante a comutatividade de (1).

As comutatividades de (2) e (3) seguem diretamente da naturalidade de a, ilustradas abaixo pelos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes \mathbf{1}) \otimes Y) \otimes W \arrow[r, "a_{X\otimes\mathbf{1},Y,W}"] \arrow[d, "(r_X \otimes id_Y) \otimes id_W"'] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & (X \otimes \mathbf{1}) \otimes (Y \otimes W) \arrow[d, "r_X \otimes (id_{Y \otimes W})"] \\
(X \otimes Y) \otimes W \arrow[r, "a_{X,Y,W}"'] & X \otimes (Y \otimes W)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes (\mathbf{1} \otimes Y)) \otimes W \arrow[r, "a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}"] \arrow[d, "(id_X \otimes l_Y) \otimes id_W"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & X \otimes ((\mathbf{1} \otimes Y) \otimes W) \arrow[d, "id_X \otimes (l_Y \otimes id_W)"] \\
(X \otimes Y) \otimes W \arrow[r, "a_{X,Y,W}"'] & X \otimes (Y \otimes W).
\end{tikzcd}$$

A comutatividade de (4) é exatamente o axioma do triângulo, conforme mostra o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes \mathbf{1})\otimes(Y\otimes W) \arrow[rr, "a_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}"] \arrow[dr, "r_X\otimes id_{Y\otimes W}"'] & & X\otimes(\mathbf{1}\otimes(Y\otimes W)) \arrow[dl, "id_X\otimes l_{Y\otimes W}"] \\
& X\otimes(Y\otimes W). &
\end{tikzcd}$$

Finalmente, mostremos que o diagrama (5) comuta.

$$\begin{tikzcd}
& & (X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W \arrow[dll, "a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y}\otimes id_W"'] & & \\
((X\otimes\mathbf{1})\otimes Y)\otimes W \arrow[drr, "(r_X\otimes id_Y)\otimes id_W"] \arrow[ddd, "a_{X\otimes\mathbf{1},Y,W}"'] & & (1) & & (X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W \arrow[ull, "id_{(X\otimes(\mathbf{1}\otimes Y))\otimes W}"'] \arrow[dll, "(id_X\otimes l_Y)\otimes id_W"'] \arrow[ddd, shift right, "a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}"'] \\
& & (X\otimes Y)\otimes W \arrow[d, "a_{X,Y,W}"] & & \\
& (2) & X\otimes(Y\otimes W) & (3) & \\
(X\otimes\mathbf{1})\otimes(Y\otimes W) \arrow[urr, "r_X\otimes(id_{Y\otimes W})"] \arrow[drr, "a_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}"'] & (4) & & (5) & X\otimes((\mathbf{1}\otimes Y)\otimes W) \arrow[ull, "id_X\otimes(l_Y\otimes id_W)"'] \arrow[dll, "id_X\otimes a_{\mathbf{1},Y,W}"] \arrow[uuu, shift right, "a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}"'] \\
& & X\otimes(\mathbf{1}\otimes(Y\otimes W)) \arrow[uu, "id_X\otimes l_{Y\otimes W}"] & &
\end{tikzcd}$$

Pelo axioma do pentágono, temos

$$id_X\otimes a_{\mathbf{1},Y,W} \overset{(P)}{=} a_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}\circ a_{X\otimes\mathbf{1},Y,W}\circ(a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(id_X\otimes l_{Y\otimes W})\circ(id_X\otimes a_{\mathbf{1},Y,W}) &\overset{(4)}{=} (r_X\otimes id_{Y\otimes W})\circ(id_X\otimes a_{\mathbf{1},Y,W})\\
&\overset{(P)}{=} (r_X\otimes id_{Y\otimes W})\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}\otimes a_{X,\mathbf{1},Y\otimes W}\circ a_{X\otimes\mathbf{1},Y,W}\circ(a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}\\
&= (r_X\otimes id_{Y\otimes W})\circ a_{X\otimes\mathbf{1},Y,W}\circ(a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}\\
&\overset{(2)}{=} a_{X,Y,W}\circ((r_X\otimes id_Y)\otimes id_W)\circ(a^{-1}_{X,\mathbf{1},Y}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}\\
&\overset{(1)}{=} a_{X,Y,W}\circ((id_X\otimes l_Y)\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}\\
&\overset{(3)}{=} id_X\otimes(l_Y\otimes id_W)\circ a_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}\circ a^{-1}_{X,\mathbf{1}\otimes Y,W}\\
&= id_X\otimes(l_Y\otimes id_W).
\end{aligned}$$

Logo, o diagrama (5) comuta. Como X é qualquer, fazendo $X = \mathbf{1}$, temos

$$(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{Y\otimes W}) \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes a_{\mathbf{1},Y,W}) = id_{\mathbf{1}} \otimes (l_Y \otimes id_W),$$

ou seja,

$$id_{\mathbf{1}} \otimes (l_{Y\otimes W} \circ a_{\mathbf{1},Y,W}) = id_{\mathbf{1}} \circ (l_Y \otimes id_W).$$

Assim, pelo Lema 2.1.4, segue que

$$l_{Y\otimes W} \circ a_{\mathbf{1},Y,W} = l_Y \otimes id_W.$$

A comutatividade do segundo diagrama de (B), é feita de maneira similar, observando-se apenas o diagrama inicial a ser considerado.

(iii) Fazendo $X = Y = \mathbf{1}$ no axioma do triângulo e no diagrama (B) temos, respectivamente, que $(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}$ e que $(id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} \overset{(i)}{=} r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}}$. Logo,

$$(id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}} \otimes id_{\mathbf{1}} = (id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}) \circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}$$

e sendo $a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}$ um isomorfismo, segue que $id_{\mathbf{1}} \otimes l_{\mathbf{1}} = id_{\mathbf{1}} \otimes r_{\mathbf{1}}$. Pelo Lema 2.1.4, $l_{\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$. □

2.2 Exemplos

Abaixo apresentamos alguns exemplos de categorias monoidais.

Exemplo 2.2.1. A categoria *Set* é monoidal.

Consideremos $\otimes : Set \times Set \to Set$ como sendo o produto cartesiano, $\mathbf{1} = \{*\}$, um conjunto unitário qualquer, e, para X, Y e Z, conjuntos em *Set*, definimos

$$\begin{array}{rccc} a_{X,Y,Z}: & (X\times Y)\times Z & \to & X\times(Y\times Z) \\ & ((x,y),z) & \mapsto & (x,(y,z)), \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} l_X: & \{*\}\times X & \to & X \\ & (*,x) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} r_X: & X\times\{*\} & \to & X \\ & (x,*) & \mapsto & x. \end{array}$$

Com esta estrutura definida, afirmamos que $(Set, \times, \{*\}, a, l, r)$ é uma categoria monoidal.

Pelo Exemplo 1.2.5 já sabemos que $\times$ é funtor. Então, resta-nos mostrar que a, l e r são isomorfismos naturais e que os axiomas do triângulo e do pentágono são verificados.

Sejam $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ e $h : Z \to Z'$ funções. Precisamos verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(X \times Y) \times Z \arrow[r, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "(f\times g)\times h"'] & X \times (Y \times Z) \arrow[d, "f\times(g\times h)"] \\
(X' \times Y') \times Z' \arrow[r, "a_{X',Y',Z'}"'] & X' \times (Y' \times Z')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{*\} \times X \arrow[r, "l_X"] \arrow[d, "id_{\{*\}}\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\
\{*\} \otimes X' \arrow[r, "l_{X'}"'] & X'
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
X \times \{*\} \arrow[r, "r_X"] \arrow[d, "f\times id_{\{*\}}"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X' \otimes \{*\} \arrow[r, "r_{X'}"'] & X'
\end{tikzcd}$$

comutam. Sejam $x \in X, y \in Y$ e $z \in Z$. Então

$$\begin{aligned}
((f \times (g \times h)) \circ a_{X,Y,Z})((x,y),z) &= (f \times (g \times h))(a_{X,Y,Z}((x,y),z)) \\
&= (f \times (g \times h))(x,(y,z)) \\
&= (f(x),(g \times h)(y,z)) \\
&= (f(x),(g(y),h(z))) \\
&= a_{X',Y',Z'}((f(x),g(y)),h(z)) \\
&= a_{X',Y',Z'}(((f \times g) \times h)((x,y),z)) \\
&= (a_{X',Y',Z'} \circ ((f \times g) \times h))((x,y),z)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \circ l_X)(*,x) &= f(l_X(*,x)) \\
&= f(x) \\
&= l_{X'}(\{*\},f(x)) \\
&= l_{X'}((id_{\{*\}} \times f)(*,x)) \\
&= (l_{X'} \circ (id_{\{*\}} \times f))(*,x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(f \circ r_X)(x,*) &= f(r_X(x,*)) \\
&= f(x) \\
&= r_{X'}(f(x),*) \\
&= r_{X'}((f \times id_{\{*\}})(x,*)) \\
&= (r_{X'} \circ (f \times id_{\{*\}}))(x,*).
\end{aligned}$$

Portanto, os três diagramas comutam e a, l e r são transformações naturais. Além disso, como $a_{X,Y,Z}, l_X$ e r_X são bijeções para quaisquer conjuntos X, Y e Z em *Set*, segue que a, l e r são isomorfismos naturais.

Para terminarmos, verifiquemos o axioma do pentágono e do triângulo. Sejam $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ e $w \in W$. Então

$$\begin{aligned}
(a_{X,Y,Z\times W} \circ a_{X\times Y,Z,W})(((x,y),z),w) &= a_{X,Y,Z\times W}(a_{X\times Y,Z,W}(((x,y),z),w)) \\
&= a_{X,Y,Z\times W}((x,y),(z,w)) \\
&= (x,(y,(z,w))) \\
&= (id_X \times a_{Y,Z,W})(x,((y,z),w)) \\
&= (id_X \times a_{Y,Z,W})(a_{X,Y\times Z,W}((x,(y,z)),w)) \\
&= (id_X \times a_{Y,Z,W})(a_{X,Y\times Z,W}((a_{X,Y,Z} \times id_W)(((x,y),z),w))) \\
&= ((id_X \times a_{Y,Z,W}) \circ a_{X,Y\times Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \times id_W))(((x,y),z),w)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(r_X \times id_Y)((x,*),y) &= (x,y) \\
&= (id_X \times l_Y)(x,(*,y)) \\
&= (id_X \times l_Y)(a_{X,\{*\},Y}((x,*),y)) \\
&= ((id_X \times l_Y) \circ a_{X,\{*\},Y})((x,*),y).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2. Seja R um anel com unidade. A categoria ${}_R\mathcal{M}_R$ é monoidal.

Consideremos $\otimes : {}_R\mathcal{M}_R \times {}_R\mathcal{M}_R \to {}_R\mathcal{M}_R$ como sendo o produto tensorial $\otimes_R$ sobre R, $\mathbf{1} = R$ e, para qualquer R-bimódulos M, N e P, definimos

$$\begin{array}{rccc}
a_{M,N,P}: & (M \otimes_R N) \otimes_R P & \to & M \otimes_R (N \otimes_R P) \\
& (m \otimes_R n) \otimes_R p & \mapsto & m \otimes_R (n \otimes_R p),
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccccc}
l_M: & R \otimes_R M & \to & M & \text{e} & r_M: & M \otimes_R R & \to & M \\
& r \otimes_R m & \mapsto & rm & & & m \otimes_R r & \mapsto & mr.
\end{array}$$

Com esta estrutura definida, afirmamos que $({}_R\mathcal{M}_R, \otimes_R, R, a, l, r)$ é uma categoria monoidal.

O fato de que $\otimes_R$ é funtor e de que a, l e r são isomorfismos naturais são conhecidos e podem ser consultados em ([8], Chapter V). Abaixo mostramos apenas a naturalidade.

Sejam $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ e $h : P \to P'$ morfismos de R-bimódulos. Precisamos verificar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R N) \otimes_R P \arrow[r, "a_{M,N,P}"] \arrow[d, "(f\otimes_R g)\otimes_R h"'] & M \otimes_R (N \otimes_R P) \arrow[d, "f\otimes_R (g\otimes_R h)"] \\
(M' \otimes_R N') \otimes_R P' \arrow[r, "a_{M',N',P'}"'] & M' \otimes_R (N' \otimes_R P')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
R \otimes_R M \arrow[r, "l_M"] \arrow[d, "id_R\otimes_R f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
R \otimes_R M' \arrow[r, "l_{M'}"'] & M'
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
M \otimes_R R \arrow[r, "r_M"] \arrow[d, "f\otimes_R id_R"'] & M \arrow[d, "f"] \\
M' \otimes_R R \arrow[r, "r_{M'}"'] & M'
\end{tikzcd}$$

comutam. Sejam M, N e P R-bimódulos, $m \in M, n \in N$, $p \in P$ e $r \in R$. Então, como

$$\begin{aligned}
((f \otimes_R (g \otimes_R h)) \circ a_{M,N,P})((m \otimes_R n) \otimes_R p) &= (f \otimes_R (g \otimes_R h))(a_{M,N,P}((m \otimes_R n) \otimes_R p)) \\
&= (f \otimes_R (g \otimes_R h))(m \otimes_R (n \otimes_R p)) \\
&= f(m) \otimes_R ((g \otimes_R h)(n \otimes_R p)) \\
&= f(m) \otimes_R (g(n) \otimes_R h(p)) \\
&= a_{M',N',P'}((f(m) \otimes_R g(n)) \otimes_R h(p)) \\
&= a_{M',N',P'}(((f \otimes_R g) \otimes_R h)((m \otimes_R n) \otimes_R p)) \\
&= (a_{M',N',P'} \circ ((f \otimes_R g) \otimes_R h))((m \otimes_R n) \otimes_R p),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f \circ l_M)(r \otimes_R m) &= f(l_M(r \otimes_R m)) \\
&= f(rm) \\
&= rf(m) \\
&= l_{M'}(r \otimes_R f(m)) \\
&= l_{M'}((id_R \otimes_R f)(r \otimes_R m)) \\
&= (l_{M'} \circ (id_R \otimes_R f))(r \otimes_R m)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(f \circ r_M)(m \otimes_R r) &= f(r_M(m \otimes_R r)) \\
&= f(mr) \\
&= f(m)r \\
&= r_{M'}(f(m) \otimes_R r) \\
&= r_{M'}((f \otimes_R id_R)(m \otimes_R r))
\end{aligned}$$

$$= (r_{M'} \circ (f \otimes_R id_R))(m \otimes_R r)$$

segue que os três diagramas comutam e portanto, a, l e r são isomorfismos naturais.

Resta-nos mostrar a comutatividade do pentágono e do triângulo. De fato, sejam $m \in M, n \in N, p \in P$ e $q \in Q$, em que M, N, P e Q são R-bimódulos, e $r \in R$. Então

$$\begin{aligned}
(a_{M,N,P\otimes_R Q} \circ a_{M\otimes_R N,P,Q})(((m \otimes_R n) \otimes_R p) \otimes_R q) &= \\
&= a_{M,N,P\otimes_R Q}(a_{M\otimes N,P,Q}(((m \otimes_R n) \otimes_R p) \otimes_R q)) \\
&= a_{M,N,P\otimes_R Q}((m \otimes_R n) \otimes_R (p \otimes_R q)) \\
&= m \otimes_R (n \otimes_R (p \otimes_R q)) \\
&= (id_M \otimes_R a_{N,P,Q})(m \otimes_R ((n \otimes_R p) \otimes_R q)) \\
&= (id_M \otimes_R a_{N,P,Q})(a_{M,N\otimes_R P,Q}((m \otimes_R (n \otimes_R p)) \otimes_R q)) \\
&= (id_M \otimes_R a_{N,P,Q})(a_{M,N\otimes_R P,Q}((a_{M,N,P} \otimes_R id_Q)(((m \otimes_R n) \otimes_R p) \otimes_R q))) \\
&= ((id_M \otimes_R a_{N,P,Q}) \circ a_{M,N\otimes_R P,Q} \circ (a_{M,N,P} \otimes_R id_Q))(((m \otimes_R n) \otimes_R p) \otimes_R q)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(r_M \otimes_R id_N)((m \otimes_R r) \otimes_R n) &= mr \otimes_R n \\
&= m \otimes_R rn \\
&= (id_M \otimes l_N)(m \otimes_R (r \otimes_R n)) \\
&= (id_M \otimes l_N)(a_{M,R,N}((m \otimes_R r) \otimes_R n)) \\
&= ((id_M \otimes l_N) \circ a_{M,R,N})((m \otimes_R r) \otimes_R n).
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3. Com base no exemplo anterior, fazendo $R = \mathbb{K}$, concluímos que

$$(Vect_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K}, a, l, r) \quad \text{e} \quad (vect_{\mathbb{K}}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K}, a, l, r)$$

são categorias monoidais.

Capítulo 3

Categoria dos A-bimódulos

Como já exposto diversas vezes neste trabalho, um dos objetivos da teoria de categorias é apresentar uma nova visão da álgebra clássica. De acordo com V. Ostrik, em [13], as categorias monoidais abelianas estão para a teoria de categorias assim como os anéis estão para a álgebra. Desta forma, assim como dado um anel comutativo R conseguimos dotá-lo de uma estrutura de A-bimódulo sobre uma R-álgebra A, gostaríamos de entender sob quais condições conseguimos transportar esta ideia para a teoria de categorias. Para a elaboração deste capítulo, utilizamos [5] e [12].

Neste capítulo, $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal.

3.1 Álgebras e módulos sobre $\mathcal{C}$

Definição 3.1.1. *Uma álgebra A em $\mathcal{C}$ é uma terna (A, m, u) em que A é um objeto em $\mathcal{C}$, $m : A \otimes A \to A$, $u : \mathbf{1} \to A$ são morfismos em $\mathcal{C}$ tais que os seguintes diagramas*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "m \otimes id_A"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id_A \otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "m"'] & & A
\end{tikzcd} \tag{3.1}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes A \arrow[rr, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
& A &
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "id_A \otimes u"] \arrow[dr, "r_A"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
& A &
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

sejam comutativos, ou seja, $m \circ (m \otimes id_A) = m \circ (id_A \otimes m) \circ a_{A,A,A}$, $m \circ (u \otimes id_A) = l_A$ e $m \circ (id_A \otimes u) = r_A$.

Exemplo 3.1.2. Se $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r)$ uma categorial monoidal, então $\mathbf{1}$ é uma álgebra.

De fato, consideremos $m = r_{\mathbf{1}} \overset{2.1.5(iii)}{=} l_{\mathbf{1}} : \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \to \mathbf{1}$ e $u = id_{\mathbf{1}} : \mathbf{1} \to \mathbf{1}$. Verifiquemos que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\otimes\mathbf{1} \arrow[r, "a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}"] \arrow[d, "r_{\mathbf{1}}\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & \mathbf{1}\otimes(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}) \arrow[r, "id_{\mathbf{1}}\otimes r_{\mathbf{1}}"] & \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[d, "r_{\mathbf{1}}"] \\
\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[rr, "r_{\mathbf{1}}"'] & & \mathbf{1}
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[rr, "id_{\mathbf{1}}\otimes id_{\mathbf{1}}"] \arrow[dr, "l_{\mathbf{1}}=r_{\mathbf{1}}"'] & & \mathbf{1}\otimes\mathbf{1} \arrow[dl, "r_{\mathbf{1}}=l_{\mathbf{1}}"] \\
& \mathbf{1} &
\end{tikzcd}$$

comutam. De fato,

$$r_{\mathbf{1}}\circ(r_{\mathbf{1}}\otimes id_{\mathbf{1}}) \overset{2.1.5(i)}{=} r_{\mathbf{1}}\circ r_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} \overset{2.1.5(ii)}{=} r_{\mathbf{1}}\circ(id_{\mathbf{1}}\otimes r_{\mathbf{1}})\circ a_{\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}}$$

e portanto, o primeiro diagrama comuta. Também,

$$r_{\mathbf{1}}\circ(id_{\mathbf{1}}\otimes id_{\mathbf{1}}) = r_{\mathbf{1}}\circ id_{\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}} = r_{\mathbf{1}}$$

e portanto, o segundo diagrama comuta.

Com base no exemplo anterior, vemos que $\{*\}$ é uma álgebra em Set, R é uma álgebra em ${}_R\mathcal{M}_R$, $\mathbb{K}$ é uma álgebra em $Vect_{\mathbb{K}}$ e $\mathbb{K}$ é uma álgebra em $vect_{\mathbb{K}}$.

Definição 3.1.3. *Seja (A,m,u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Um A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$ é um par (V,λ_V) em que V é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\lambda_V : A\otimes V \to V$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que os diagramas*

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)\otimes V \arrow[r, "a_{A,A,V}"] \arrow[d, "m\otimes id_V"'] & A\otimes(A\otimes V) \arrow[r, "id_A\otimes\lambda_V"] & A\otimes V \arrow[d, "\lambda_V"] \\
A\otimes V \arrow[rr, "\lambda_V"'] & & V
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\otimes V \arrow[rr, "u\otimes id_V"] \arrow[dr, "l_V"'] & & A\otimes V \arrow[dl, "\lambda_V"] \\
& V &
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

sejam comutativos, ou seja, $\lambda_V\circ(id_A\otimes\lambda_V)\circ a_{A,A,V} = \lambda_V\circ(m\otimes id_V)$ e $\lambda_V\circ(u\otimes id_V) = l_V$.

De forma análoga, define-se A-módulo à direita em uma categoria monoidal $\mathcal{C}$.

Definição 3.1.4. *Seja (A,m,u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Um A-módulo à direita em $\mathcal{C}$ é um par (W,ρ_W) em que W é um objeto em $\mathcal{C}$ e $\rho_W : W\otimes A \to W$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal* *que os diagramas*

$$
\begin{tikzcd}
(W \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{W,A,A}"] \arrow[d, "\rho_W \otimes id_A"'] & W \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id_W \otimes m"] & W \otimes A \arrow[d, "\rho_W"] \\
W \otimes A \arrow[rr, "\rho_W"'] & & W
\end{tikzcd}
\tag{3.5}
$$

$$
\begin{tikzcd}
W \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "id_W \otimes u"] \arrow[dr, "r_W"'] & & W \otimes A \arrow[dl, "\rho_W"] \\
& W &
\end{tikzcd}
\tag{3.6}
$$

sejam comutativos, ou seja, $\rho_W \circ (\rho_W \otimes id_A) = \rho_W \circ (id_W \otimes m) \circ a_{W,A,A}$ *e* $\rho_W \circ (id_W \otimes u) = r_W$.

Queremos determinar como os A-módulos relacionam-se entre si. Baseado nisto, seguem as definições de morfismos de A-módulos tanto à direita quanto à esquerda.

Definição 3.1.5. *Sejam* (V, λ_V) *e* (W, λ_W) *dois* A*-módulos à esquerda em* $\mathcal{C}$ *em que* (A, m, u) *é uma álgebra em* $\mathcal{C}$*. Um morfismo* $f : V \to W$ *em* $\mathcal{C}$ *é chamado morfismo de* A*-módulos à esquerda se o diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes V \arrow[r, "id_A \otimes f"] \arrow[d, "\lambda_V"'] & A \otimes W \arrow[d, "\lambda_W"] \\
V \arrow[r, "f"'] & W
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

é comutativo, ou seja, $f \circ \lambda_V = \lambda_W \circ (id_A \otimes f)$.

Definição 3.1.6. *Sejam* (V, ρ_V) *e* (W, ρ_W) *dois* A*-módulos à direita em* $\mathcal{C}$ *em que* (A, m, u) *é uma álgebra em* $\mathcal{C}$*. Um morfismo* $g : V \to W$ *em* $\mathcal{C}$ *é chamado morfismo de* A*-módulos à direita se o diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes A \arrow[r, "g \otimes id_A"] \arrow[d, "\rho_V"'] & W \otimes A \arrow[d, "\rho_W"] \\
V \arrow[r, "g"'] & W
\end{tikzcd}
\tag{3.8}
$$

é comutativo, ou seja, $g \circ \rho_V = \rho_W \circ (g \otimes id_A)$.

A proposição à seguir nos mostra que a composição de morfismos de A-módulos à esquerda também é um morfismo de A-módulos à esquerda. Não faremos a demonstração para o caso à direita pois esta é análoga a apresentada abaixo.

Proposição 3.1.7. *Sejam* (A, m, u) *uma álgebra em* $\mathcal{C}$ *e* (V, λ_V), (W, λ_W) *e* (U, λ_U) *três* A*-módulos à esquerda em* $\mathcal{C}$*. Se* $f : U \to W$ *e* $g : V \to U$ *são morfismos de* A*-módulos à esquerda, então* $f \circ g : V \to W$ *é morfismos de* A*-módulo à esquerda.*

Demonstração. Precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes V \arrow[r, "id_A \otimes (f \circ g)"] \arrow[d, "\lambda_V"'] & A \otimes W \arrow[d, "\lambda_W"] \\ V \arrow[r, "f \circ g"'] & W \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

é comutativo. Temos que

$$\begin{aligned} \lambda_W \circ (id_A \otimes (f \circ g)) &= \lambda_W \circ ((id_A \otimes f) \circ (id_A \otimes g)) \\ &= (\lambda_W \circ (id_A \otimes f)) \circ (id_A \otimes g) \\ &\overset{(a)}{=} (f \circ \lambda_U) \circ (id_A \otimes g) \\ &= f \circ (\lambda_U \circ (id_A \otimes g)) \\ &\overset{(b)}{=} f \circ (g \circ \lambda_V) \\ &= (f \circ g) \circ \lambda_V, \end{aligned}$$

em que as igualdades (a) e (b) ocorrem, respectivamente, por f e g serem morfismos de A-módulos à esquerda. □

A proposição à seguir nos mostra que se $f : V \to W$ é um morfismo de A-módulos à esquerda que é um isomorfismo, então $f^{-1} : W \to V$ também é um morfismo de A-módulos à esquerda. Não faremos a demonstração para o caso à direita pois esta é análoga a apresentada abaixo.

Proposição 3.1.8. *Sejam (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$ e $f : V \to W$ um morfismo de A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$. Se $f : V \to W$ é um isomorfismo, então $f^{-1} : W \to V$ é um morfismo de A-módulos à esquerda.*

Demonstração. Precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes W \arrow[r, "id_A \otimes f^{-1}"] \arrow[d, "\lambda_W"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_V"] \\ W \arrow[r, "f^{-1}"'] & V \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

é comutativo. Ora, como f é morfismo de A-módulos à esquerda, sabemos que $f \circ \lambda_V = \lambda_W \circ (id_A \otimes f)$. Compondo f^{-1} à esquerda em ambos os lados da igualdade anterior, temos que $f^{-1} \circ (f \circ \lambda_V) = f^{-1} \circ (\lambda_W \circ (id_A \otimes f))$, ou seja,

$$\lambda_V = (f^{-1} \circ \lambda_W) \circ (id_A \otimes f).$$

Compondo $id_A \otimes f^{-1}$ à direita em ambos os lados da igualdade anterior, temos que $\lambda_V \circ (id_A \otimes f^{-1}) = ((f^{-1} \circ \lambda_W) \circ (id_A \otimes f)) \circ (id_A \otimes f^{-1})$, ou seja,

$$\lambda_V \circ (id_A \otimes f^{-1}) = f^{-1} \circ \lambda_W.$$

Portanto, o diagrama em questão comuta. □

Dada uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, denotamos por ${}_A\mathcal{C}$ a categoria dos A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$, cujos objetos são A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$ e os morfismos são morfismos de A-módulos à esquerda. Analogamente, denotamos por $\mathcal{C}_A$ a categoria dos A-módulos à direita em $\mathcal{C}$, cujos objetos são A-módulos à direita em $\mathcal{C}$ e os morfismos são morfismos de A-módulos à direita. Em ambas as categorias, a composição dos morfismos é dada pela composição de $\mathcal{C}$ e, para cada A-módulo V dado (tanto à esquerda, quanto à direita), o morfismo identidade destas categorias é dado por $id_V : V \to V$, ou seja, o morfismo identidade em $\mathcal{C}$.

Tendo em vista o que foi dito no parágrafo acima, dada uma categoria monoidal $\mathcal{C}$, denotamos por ${}_A\mathcal{C}_A$ a categoria dos A-bimódulos em $\mathcal{C}$, cujos objetos são A-bimódulos em $\mathcal{C}$ e cujos morfismos são morfismos de A-bimódulos, ou seja, morfismos de A-módulos à esquerda e à direita em $\mathcal{C}$. Abaixo, segue a definição de A-bimódulo em $\mathcal{C}$.

Definição 3.1.9. *Seja (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Um A-bimódulo em $\mathcal{C}$ é uma terna (V, ρ_V, λ_V) em que (V, ρ_V) é um A-módulo à direita em $\mathcal{C}$, (V, λ_V) é um A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$ e o diagrama*

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes V) \otimes A \arrow[r, "a_{A,V,A}"] \arrow[d, "\lambda_V \otimes id_A"'] & A \otimes (V \otimes A) \arrow[r, "id_A \otimes \rho_V"] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_V"] \\
V \otimes A \arrow[rr, "\rho_V"'] & & V
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

comuta, ou seja, $\lambda_V \circ (id_A \otimes \rho_V) \circ a_{A,V,A} = \rho_V \circ (\lambda_V \otimes id_A)$.

Exemplo 3.1.10. Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Então A é um A-bimódulo em $\mathcal{C}$.

De fato, considerando $\lambda_A = \rho_A = m$, os diagramas comutativos da definição de uma álegbra em $\mathcal{C}$ são exatamente os mesmos das definições de A-módulos à direita, à esquerda e de A-bimódulos em $\mathcal{C}$.

A partir de agora, consideremos $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal abeliana. Sendo assim, como aplicação da Definição 1.4.26, fazendo $F = \otimes \circ (-, L)$, para qualquer objeto L em $\mathcal{C}$, e $F = \otimes \circ (W, -)$, para qualquer objeto W em $\mathcal{C}$, escrevemos o que significa dizer que o funtor $\otimes$ é exato à direita em cada variável.

Definição 3.1.11. *O funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é dito exato à direita na primeira variável se, para todo L em $\mathcal{C}$, o funtor $\otimes \circ (-, L) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é exato à direita, ou seja, se*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta em $\mathcal{C}$, então a sequência

$$X \otimes L \xrightarrow{f \otimes id_L} Y \otimes L \xrightarrow{g \otimes id_L} Z \otimes L \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{C}$.

Analogamente, define-se a exatidão à direita na segunda variável.

Definição 3.1.12. *O funtor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é dito exato à direita na segunda variável se, para todo W em $\mathcal{C}$, o funtor $\otimes \circ (W, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é exato à direita, ou seja, se*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta em $\mathcal{C}$, então a sequência

$$W \otimes X \xrightarrow{id_W \otimes f} W \otimes Y \xrightarrow{id_W \otimes g} W \otimes Z \longrightarrow 0$$

é exata em $\mathcal{C}$.

Portanto, o funtor $\otimes$ ser exato à direita em cada variável, significa que $\otimes$ é exato à direita tanto na primeira quanto na segunda variável.

Apenas como curiosidade, chamamos atenção para o fato de que a categoria ${}_A\mathcal{C}_A$ herda a condição de ser abeliana quando $\mathcal{C}$ o é. No entanto, não faremos esta demonstração, mas indicamos a referência ([12], Ejercicio 3.3.3) para consulta.

Proposição 3.1.13. *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal e (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$. Se $\mathcal{C}$ é abeliana, então ${}_A\mathcal{C}_A$ é abeliana.*

O exemplo à seguir motiva a construção da estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$. Para auxiliar na sua compreensão, veja o Apêndice.

Exemplo 3.1.14. Sejam $\mathbb{K}$ corpo e $\mathcal{C} = Vect_{\mathbb{K}}$, a categoria monoidal já definida anteriormente, em que $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$. Seja $(H, \Delta, \varepsilon, m, u)$ uma $\mathbb{K}$-biálgebra que, em particular, é uma álgebra em $\mathcal{C}$.

Sejam (V, λ_V) um H-módulo à esquerda e (W, ρ_W) um H-módulo à direita, ambos em $Vect_{\mathbb{K}}$. Tendo em vista a equivalência, bem conhecida, dessa definição (via diagramas) com a definição clássica de um H-módulo à esquerda (à direita), escrevemos $\lambda_V(h \otimes v) = hv$ e $\rho_W(w \otimes h) = wh$, para quaisquer $h \in H$, $v \in V$ e $w \in W$.

Agora, consideremos (V, ρ_V, λ_V) e (W, ρ_W, λ_W) dois H-bimódulos em $Vect_{\mathbb{K}}$. A estrutura de H-módulo à esquerda de $V \otimes W$ é dada por

$$h \cdot (v \otimes w) := \sum h_1 v \otimes h_2 w \in V \otimes W,$$

em que $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$. Tal ação é a composição

$$\lambda_{V \otimes W} := (\lambda_V \otimes \lambda_W) \circ (id_H \otimes T \otimes id_W) \circ (\Delta \otimes id_V \otimes id_W) \tag{3.12}$$

de morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, como constatamos abaixo

$$\begin{aligned}
&(\lambda_V \otimes \lambda_W) \circ (id_H \otimes T \otimes id_W) \circ (\Delta \otimes id_V \otimes id_W)(h \otimes v \otimes w) \\
&= (\lambda_V \otimes \lambda_W) \circ (id_H \otimes T \otimes id_W)((\textstyle\sum h_1 \otimes h_2) \otimes v \otimes w) \\
&= (\lambda_V \otimes \lambda_W) \circ (id_H \otimes T \otimes id_W)(\textstyle\sum (h_1 \otimes h_2 \otimes v \otimes w)) \\
&= (\lambda_V \otimes \lambda_W)(\textstyle\sum (id_H \otimes T \otimes id_W)(h_1 \otimes h_2 \otimes v \otimes w)) \\
&= (\lambda_V \otimes \lambda_W)(\textstyle\sum (h_1 \otimes v \otimes h_2 \otimes w)) \\
&= \textstyle\sum (\lambda_V \otimes \lambda_W)((h_1 \otimes v) \otimes (h_2 \otimes w)) \\
&= \textstyle\sum (\lambda_V(h_1 \otimes v) \otimes \lambda_W(h_2 \otimes w)) \\
&= \textstyle\sum h_1 v \otimes h_2 w.
\end{aligned}$$

Daí,

$$h \cdot (v \otimes w) = \lambda_{V \otimes W}(h \otimes (v \otimes w)) = \sum h_1 v \otimes h_2 w.$$

Analogamente, definimos a estrutura de H-módulo à direita de $V \otimes W$ como

$$(v \otimes w) \cdot h := \sum v h_1 \otimes w h_2 \in V \otimes W,$$

que é a composição de morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais

$$\rho_{V \otimes W} := (\rho_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes T \otimes id_H) \circ (id_V \otimes id_W \otimes \Delta). \tag{3.13}$$

Daí,

$$(v \otimes w) \cdot h = \rho_{V \otimes W}((v \otimes w) \otimes h) = \sum v h_1 \otimes w h_2.$$

Afirmação 1: As ações dadas em (3.12) e (3.13) tornam $V \otimes W$ um H-módulo à esquerda e à direita, respectivamente. Fazemos o caso à esquerda, uma vez que o caso à direita é análogo.

É necessário mostrarmos que os diagramas (3.3) e (3.4) comutam para o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V \otimes W$. De fato, sejam $h, h' \in H, v \in V$ e $w \in W$. Então

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{V\otimes W} \circ (m \otimes id_{V\otimes W}))((h \otimes h') \otimes (v \otimes w)) = \\
&= \lambda_{V\otimes W}(hh' \otimes (v \otimes w)) \\
&= (hh') \cdot (v \otimes w) \\
&= \sum (hh')_1 v \otimes (hh')_2 w \\
&= \sum \sum (h_1 h'_1) v \otimes (h_2 h'_2) w \\
&\overset{(3.3)}{=} \sum \sum h_1(h'_1 v) \otimes h_2(h'_2 w) \\
&= \lambda_{V\otimes W}(h \otimes (\sum h'_1 v \otimes h'_2 w)) \\
&= \lambda_{V\otimes W}(h \otimes (\lambda_{V\otimes W}(h' \otimes (v \otimes w)))) \\
&= \lambda_{V\otimes W}((id_H \otimes \lambda_{V\otimes W})(h \otimes (h' \otimes (v \otimes w)))) \\
&= (\lambda_{V\otimes W} \circ (id_H \otimes \lambda_{V\otimes W}))(h \otimes (h' \otimes (v \otimes w))) \\
&= (\lambda_{V\otimes W} \circ (id_H \otimes \lambda_{V\otimes W}))(a_{H,H,V\otimes W}((h \otimes h') \otimes (v \otimes w))) \\
&= (\lambda_{V\otimes W} \circ (id_H \otimes \lambda_{V\otimes W}) \circ a_{H,H,V\otimes W})((h \otimes h') \otimes (v \otimes w))
\end{aligned}
$$

e agora verifiquemos a comutatividade do outro diagrama, temos

$$
\begin{aligned}
(\lambda_{V\otimes W} \circ (u \otimes id_{V\otimes W}))(1_{\mathbb{K}} \otimes (v \otimes w)) &= \lambda_{V\otimes W}(1_H \otimes (v \otimes w)) \\
&= 1_H \cdot (v \otimes w) \\
&= 1_H v \otimes 1_H w \\
&\overset{(3.4)}{=} v \otimes w \\
&= 1_{\mathbb{K}}(v \otimes w) \\
&= l_{V\otimes W}(1_{\mathbb{K}} \otimes (v \otimes w)).
\end{aligned}
$$

As comutatividades acima nos mostram que

$$
(hh') \cdot (v \otimes w) = h \cdot (h' \cdot (v \otimes w)) \quad \text{e} \quad 1_H \cdot (v \otimes w) = v \otimes w.
$$

Afirmação 2: $(V \otimes W, \rho_{V\otimes W}, \lambda_{V\otimes W})$ é um H-bimódulo em $\mathcal{C}$, para quaisquer H-bimódulos V, W em $\mathcal{C}$.

É necessário verificarmos que o diagrama (3.11) comuta para o $\mathbb{K}$-espaço vetorial $V \otimes W$. De fato,

$$
\begin{aligned}
(\rho_{V\otimes W} \circ (\lambda_{V\otimes W} \otimes id_H))((h \otimes (v \otimes w)) \otimes h') &= \rho_{V\otimes W}(h \cdot (v \otimes w) \otimes h') \\
&= \rho_{V\otimes W}((\sum h_1 v \otimes h_2 w) \otimes h')
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\textstyle\sum h_1 v \otimes h_2 w) \cdot h' \\
&= \textstyle\sum((h_1 v \otimes h_2 w) \cdot h') \\
&= \textstyle\sum(\sum(h_1 v)h'_1 \otimes (h_2 w)h'_2) \\
&\overset{(3.11)}{=} \textstyle\sum(\sum h_1(vh'_1) \otimes h_2(wh'_2)) \\
&= \textstyle\sum h \cdot (vh'_1 \otimes wh'_2) \\
&= h \cdot \textstyle\sum vh'_1 \otimes wh'_2 \\
&= \lambda_{V\otimes W}(h \otimes (\textstyle\sum vh'_1 \otimes wh'_2)) \\
&= \lambda_{V\otimes W}(h \otimes ((v \otimes w) \cdot h')) \\
&= (\lambda_{V\otimes W} \circ (id_H \otimes \rho_{V\otimes W}))(h \otimes ((v \otimes w) \otimes h')) \\
&= (\lambda_{V\otimes W} \circ (id_H \otimes \rho_{V\otimes W}))(a_{H,V\otimes W,H}((h \otimes (v \otimes w)) \otimes h')) \\
&= (\lambda_{V\otimes W} \circ (id_H \otimes \rho_{V\otimes W}) \circ a_{H,V\otimes W,H})((h \otimes (v \otimes w)) \otimes h')
\end{aligned}
$$

e a comutatividade acima nos diz que

$$(h \cdot (v \otimes w)) \cdot h' = h \cdot ((v \otimes w) \cdot h').$$

Esse exemplo ilustra o que significam as categorias ${}_A\mathcal{C}, \mathcal{C}_A$ e ${}_A\mathcal{C}_A$ quando $\mathcal{C} = Vect_{\mathbb{K}}$ e $A = H$ uma biálgebra, no sentido de que a estrutura monoidal de $Vect_{\mathbb{K}}$ é "bem comportada" para as estruturas de módulos e bimódulos (assim como para morfismos) sobre uma biálgebra (em particular, uma álgebra) em $\mathcal{C}$.

Mas assim como fazemos na álgebra clássica, e se agora considerássemos o funtor $\otimes_H$ invés de $\otimes_{\mathbb{K}}$, veja Exemplo 2.2.2, o que ocorreria com essas categorias? É simples percebermos que nem ${}_H\mathcal{C}$ e nem $\mathcal{C}_H$ seriam monoidais, mas e a categoria dos H-bimódulos ${}_H\mathcal{C}_H$ seria monoidal? Essa é a motivação para o estudo da próxima seção desse trabalho, onde nos propusemos a detalhar como é a estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$, em que $\mathcal{C}$ é uma categoria monoidal qualquer.

3.2 A estrutura monoidal da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$

Nosso objetivo é construir uma estrutura monoidal para ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isto, consideremos que $\mathcal{C}$ é uma categoria abeliana monoidal tal que o funtor tensor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é um funtor exato à direita em cada variável. Além disso, consideremos (A, m, u) uma álgebra em $\mathcal{C}$.

Primeiramente precisamos definir o funtor $\otimes_A : {}_A\mathcal{C}_A \times {}_A\mathcal{C}_A \to {}_A\mathcal{C}_A$. Sejam (V, ρ_V, λ_V) e (W, ρ_W, λ_W) objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$.

Consideremos os morfismos

$$\rho_V \otimes id_W : (V \otimes A) \otimes W \to V \otimes W$$

e

$$(id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W} : (V \otimes A) \otimes W \xrightarrow{a_{V,A,W}} V \otimes (A \otimes W) \xrightarrow{id_A \otimes \lambda_W} V \otimes W.$$

Definimos $\pi_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes_A W$ como o coequalizador do par de morfismos $\rho_V \otimes id_W$ e $(id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}$. Isto quer dizer que

$$\pi_{V,W} \circ (\rho_V \otimes id_W) = \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W} \tag{3.14}$$

e que se qualquer outro morfismo $h : V \otimes W \to Z$ é tal que $h \circ (\rho_V \otimes id_W) = h \circ (id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}$, então existe um único morfismo $v : V \otimes_A W \to Z$ tal que $v \circ \pi_{V,W} = h$. Podemos ilustrar esta definição com o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes A) \otimes W \arrow[r, shift left, "(id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}"] \arrow[r, shift right, "\rho_V \otimes id_W"'] & V \otimes W \arrow[r, "\pi_{V,W}"] \arrow[dr, "h"'] & V \otimes_A W \arrow[d, dashed, "v"] \\
& & Z.
\end{tikzcd}$$

Pela Proposição 1.4.18, sabemos também que $\pi_{V,W}$ é o conúcleo da diferença dos morfismos $(id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}$ e $\rho_V \otimes id_W$.

Lema 3.2.1. *Sejam $f : V \to W$ e $g : V' \to W'$ morfismos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Então são válidas as afirmações:*

(i) $\pi_{W,W'} \circ (f \otimes g) \circ (\rho_V \otimes id_{V'}) = \pi_{W,W'} \circ (f \otimes g) \circ (id_V \otimes \lambda_{V'}) \circ a_{V,A,V'}$;

(ii) *existe um único morfismo $f \otimes_A g : V \otimes_A V' \to W \otimes_A W'$ tal que*

$$(f \otimes_A g) \circ \pi_{V,V'} = \pi_{W,W'} \circ (f \otimes g). \tag{3.15}$$

Demonstração. (i) Temos

$$\begin{aligned}
\pi_{W,W'} \circ (f \otimes g) \circ (\rho_V \otimes id_{V'}) &= \pi_{W,W'} \circ ((f \circ \rho_V) \otimes g) \\
&\overset{(3.8)}{=} \pi_{W,W'} \circ ((\rho_W \circ (f \otimes id_A)) \otimes g) \\
&= \pi_{W,W'} \circ (\rho_W \otimes id_{W'}) \circ ((f \otimes id_A) \otimes g) \\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{W,W'} \circ (id_W \otimes \lambda_{W'}) \circ a_{W,A,W'} \circ ((f \otimes id_A) \otimes g) \\
&\overset{(3.16)}{=} \pi_{W,W'} \circ (id_W \otimes \lambda_{W'}) \circ (f \otimes (id_A \otimes g)) \circ a_{V,A,V'}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi_{W,W'} \circ (f \otimes (\lambda_{W'} \circ (id_A \otimes g))) \circ a_{V,A,V'} \\
&\overset{(3.7)}{=} \pi_{W,W'} \circ (f \otimes (g \circ \lambda_{V'})) \circ a_{V,A,V'} \\
&= \pi_{W,W'} \circ (f \otimes g) \circ (id_V \otimes \lambda_{V'}) \circ a_{V,A,V'},
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (3.16) segue da naturalidade de a com o diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
(V \otimes A) \otimes V' \arrow[r, "a_{V,A,V'}"] \arrow[d, "(f\otimes id_A)\otimes g"'] & V \otimes (A \otimes V') \arrow[d, "f\otimes(id_A\otimes g)"] \\
(W \otimes A) \otimes W' \arrow[r, "a_{W,A,W'}"'] & W \otimes (A \otimes W').
\end{tikzcd}
\tag{3.16}
$$

(ii) Consideremos o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes A \otimes V' \arrow[r, shift left, "(id_V\otimes\lambda_{V'})\circ a_{V,A,V'}"] \arrow[r, shift right, "\rho_V\otimes id_V"'] & V \otimes V' \arrow[rr, "\pi_{V,V'}"] \arrow[dr, "f\otimes g"'] & & V \otimes_A V' \arrow[dd, dashed, "f\otimes_A g"] \\
& & W \otimes W' \arrow[dr, "\pi_{W,W'}"'] & \\
& & & W \otimes_A W'.
\end{tikzcd}
$$

Pelo fato de $\pi_{V,V'}$ ser o coequalizador do par de morfismos $(id_V \otimes \lambda_V) \circ a_{V,A,V'}$ e $\rho_V \otimes id_V$ e por (i), segue que existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $f \otimes_A g : V \otimes_A V' \to W \otimes_A W'$ tal que

$$(f \otimes_A g) \circ \pi_{V,V'} = \pi_{W,W'} \circ (f \otimes g).$$

$\square$

Nosso objetivo agora é mostrar que $V \otimes_A W$ é, de fato, um objeto em ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isto precisamos definir o que são $\rho_{V\otimes_A W}$ e $\lambda_{V\otimes_A W}$, ou seja, algo do tipo $(V \otimes_A W) \otimes A \to V \otimes_A W$ e $A \otimes (V \otimes_A W) \to V \otimes_A W$. Para isso, definimos $\phi : (V \otimes W) \otimes A \to V \otimes_A W$ como sendo a composição

$$\phi : (V \otimes W) \otimes A \xrightarrow{a_{V,W,A}} V \otimes (W \otimes A) \xrightarrow{id_V \otimes \rho_W} V \otimes W \xrightarrow{\pi_{V,W}} V \otimes_A W,$$

isto é,

$$\phi = \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A}. \tag{3.17}$$

Afirmamos que

$$\phi \circ [(((id_V \otimes \lambda_W) \otimes id_A) \circ (a_{V,A,W} \otimes id_A)) - ((\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A)] = 0, \tag{3.18}$$

ou seja, que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((V \otimes A) \otimes W) \otimes A \arrow[dr, "(\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A"] \arrow[dd, "a_{V,A,W} \otimes id_A"'] & & \\
& (V \otimes W) \otimes A \arrow[r, "\phi"] & V \otimes_A W \\
(V \otimes (A \otimes W)) \otimes A \arrow[ur, "(id_V \otimes \lambda_W) \otimes id_A"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato,

$$\begin{aligned}
\phi \circ ((\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A) &\overset{(3.17)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A} \circ ((\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A) \\
&\overset{(3.19)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (\rho_V \otimes (id_W \otimes id_A)) \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (\rho_V \otimes id_{W\otimes A}) \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (\rho_V \otimes \rho_W) \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (\rho_V \otimes id_W) \circ (id_{V\otimes A} \otimes \rho_W) \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W} \circ ((id_V \otimes id_A) \otimes \rho_W) \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&\overset{(3.20)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \lambda_W) \circ (id_V \otimes (id_A \otimes \rho_W)) \circ a_{V,A,W\otimes A} \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes (\lambda_W \otimes (id_A \otimes \rho_W))) \circ a_{V,A,W\otimes A} \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&\overset{(3.11)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes (\rho_W \circ (\lambda_W \otimes id_A) \circ a^{-1}_{A,W,A})) \circ a_{V,A,W\otimes A} \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes (\lambda_W \otimes id_A)) \circ (id_V \otimes a^{-1}_{A,W,A}) \circ a_{V,A,W\otimes A} \\
&\quad \circ a_{V\otimes A,W,A} \\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes (\lambda_W \otimes id_A)) \circ a_{V,A\otimes W,A} \circ (a_{V,A,W} \otimes id_A) \\
&\overset{(3.21)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A} \circ ((id_V \otimes \lambda_W) \otimes id_A) \circ (a_{V,A,W} \otimes id_A) \\
&\overset{(3.17)}{=} \phi \circ ((id_V \otimes \lambda_W) \otimes id_A) \circ (a_{V,A,W} \otimes id_A),
\end{aligned}$$

em que as igualdades (3.19), (3.20) e (3.21) ocorrem devido à naturalidade de a, ilustrada, respectivamente, pelos diagramas

$$\begin{tikzcd}
((V \otimes A) \otimes W) \otimes A \arrow[r, "a_{V\otimes A,W,A}"] \arrow[d, "(\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A"'] & (V \otimes A) \otimes (W \otimes A) \arrow[d, "\rho_V \otimes (id_W \otimes id_A)"] \\
(V \otimes W) \otimes A \arrow[r, "a_{V,W,A}"'] & V \otimes (W \otimes A),
\end{tikzcd} \tag{3.19}$$

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes A) \otimes (W \otimes A) \arrow[r, "a_{V,A,W\otimes A}"] \arrow[d, "(id_V \otimes id_A)\otimes \rho_W"'] & V \otimes (A \otimes (W \otimes A)) \arrow[d, "id_V \otimes (id_A \otimes \rho_W)"] \\
(V \otimes A) \otimes W \arrow[r, "a_{V,A,W}"'] & V \otimes (A \otimes W)
\end{tikzcd} \tag{3.20}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes (A \otimes W)) \otimes A \arrow[r, "a_{V,A\otimes W,A}"] \arrow[d, "(id_V \otimes \lambda_W)\otimes id_A"'] & V \otimes ((A \otimes W) \otimes A) \arrow[d, "id_V \otimes (\lambda_W \otimes id_A)"] \\
(V \otimes W) \otimes A \arrow[r, "a_{V,W,A}"'] & V \otimes (W \otimes A).
\end{tikzcd} \tag{3.21}$$

O fato de $\otimes$ ser exato à direita em cada variável nos diz, em particular, que o funtor $\otimes \circ (-, A)$ é exato à direita. Chamando $f = ((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}) - (\rho_V \otimes id_W)$ e sabendo que $(V \otimes_A W, \pi_{V,W})$ é o conúcleo de f, pela Definição 1.4.25, temos que

$$(\otimes \circ (-, A))(V \otimes_A W, \pi_{V,W}) = ((V \otimes_A W) \otimes A, \pi_{V,W} \otimes id_A)$$

é o conúcleo de $f \otimes id_A$. Assim,

$$\begin{aligned}
\phi \circ (f \otimes id_A) &= \phi \circ ((((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}) - (\rho_V \otimes id_W)) \otimes id_A) \\
&= \phi \circ [(((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}) \otimes id_A) - ((\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A)] \\
&= \phi \circ [((((id_V \otimes \lambda_W) \otimes id_A) \circ (a_{V,A,W} \otimes id_A)) - ((\rho_V \otimes id_W) \otimes id_A)] \\
&\overset{(3.18)}{=} 0
\end{aligned}$$

e portanto, existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $\rho_{V \otimes_A W} : (V \otimes_A W) \otimes A \to V \otimes_A W$ tal que $\rho_{V \otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes id_A) = \phi$, isto é, tal que

$$\rho_{V \otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes id_A) = \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A}. \tag{3.22}$$

Veja o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
((V \otimes A) \otimes W) \otimes A \arrow[r, "f \otimes id_A"] & (V \otimes W) \otimes A \arrow[r, "\pi_{V,W} \otimes id_A"] \arrow[d, "\phi"'] & (V \otimes_A W) \otimes A \arrow[dl, dashed, "\rho_{V \otimes_A W}"] \\
& V \otimes_A W. &
\end{tikzcd}$$

Antes de enunciarmos o próximo lema, observemos que o fato de termos $\pi_{V,W} : V \otimes W \to V \otimes_A W$ um epimorfismo (Corolário 1.4.19) e de $\otimes$ ser um funtor exato à direita em cada variável, os morfismos $(\pi_{V,W} \otimes id_A) \otimes id_A$ e $\pi_{V,W} \otimes id_{\mathbf{1}}$ também são epimorfismos. De fato, se considerarmos a sequência exata

$$0 \longrightarrow Ker(f) \xrightarrow{k} (V \otimes A) \otimes W \xrightarrow{f} V \otimes W \xrightarrow{\pi_{V,W}} V \otimes_A W \longrightarrow 0$$

e aplicarmos a exatidão à direita de $\otimes$ na primeira variável, temos que a sequência

$$Ker(f) \otimes A \xrightarrow{k \otimes id_A} ((V \otimes A) \otimes W) \otimes A \xrightarrow{f \otimes id_A} (V \otimes W) \otimes A \xrightarrow{\pi_{V,W} \otimes id_A} (V \otimes_A W) \otimes A \longrightarrow 0$$

é exata. Portanto, segue da Proposição 1.4.23, que $\pi_{V,W} \otimes id_A$ é, também, epimorfismo. Repetindo este processo, mostramos que $(\pi_{V,W} \otimes id_A) \otimes id_A$ e $\pi_{V,W} \otimes id_{\mathbf{1}}$ são epimorfismos.

Lema 3.2.2. *O morfismo $\rho_{V \otimes_A W}$ define uma ação à direita sobre o objeto $V \otimes_A W$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
((V \otimes_A W) \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{V \otimes_A W, A, A}"] \arrow[d, "\rho_{V \otimes_A W} \otimes id_A"'] & (V \otimes_A W) \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id_{V \otimes_A W} \otimes m"] & (V \otimes_A W) \otimes A \arrow[d, "\rho_{V \otimes_A W}"] \\
(V \otimes_A W) \otimes A \arrow[rr, "\rho_{V \otimes_A W}"'] & & V \otimes_A W
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes_A W) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "id_{V \otimes_A W} \otimes u"] \arrow[dr, "r_{V \otimes_A W}"'] & & (V \otimes_A W) \otimes A \arrow[dl, "\rho_{V \otimes_A W}"] \\
& V \otimes_A W &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Temos

$$\begin{aligned}
\rho_{V \otimes_A W} &\circ (id_{V \otimes_A W} \otimes m) \circ a_{V \otimes_A W, A, A} \circ ((\pi_{V,W} \otimes id_A) \otimes id_A) = \\
&\overset{(3.23)}{=} \rho_{V \otimes_A W} \circ (id_{V \otimes_A W} \otimes m) \circ (\pi_{V,W} \otimes (id_A \otimes id_A)) \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&= \rho_{V \otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes m) \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&= \rho_{V \otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes id_A) \circ (id_{V \otimes W} \otimes m) \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&\overset{(3.22)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A} \circ ((id_V \otimes id_W) \otimes m) \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&\overset{(3.24)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes m)) \circ a_{V,W,A \otimes A} \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes (\rho_W \circ (id_W \otimes m)) \circ a_{V,W,A \otimes A} \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&\overset{(3.5)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes (\rho_W \circ (\rho_W \otimes id_A) \circ a^{-1}_{W,A,A})) \circ a_{V,W,A \otimes A} \circ a_{V \otimes W, A, A} \\
&= \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes (\rho_W \otimes id_A)) \circ (id_V \otimes a^{-1}_{W,A,A}) \\
&\quad \circ a_{V,W,A \otimes A} \circ a_{V \otimes W, A, A}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes (\rho_W \otimes id_A)) \circ a_{V,W\otimes A,A} \circ (a_{V,W,A} \otimes id_A) \\
&\overset{(3.25)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A} \circ ((id_V \otimes \rho_W) \otimes id_A) \circ (a_{V,W,A} \otimes id_A) \\
&\overset{(3.22)}{=} \rho_{V\otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes id_A) \circ ((id_V \otimes \rho_W) \otimes id_A) \circ (a_{V,W,A} \otimes id_A) \\
&= \rho_{V\otimes_A W} \circ ((\pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A}) \otimes id_A) \\
&\overset{(3.22)}{=} \rho_{V\otimes_A W} \circ ((\rho_{V\otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes id_A)) \otimes id_A) \\
&= \rho_{V\otimes_A W} \circ (\rho_{V\otimes_A W} \otimes id_A) \circ ((\pi_{V,W} \otimes id_A) \otimes id_A),
\end{aligned}
$$

em que (3.23), (3.24) e (3.25) ocorrem devido à naturalidade de a, ilustrada, respectivamente, pelos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
((V \otimes W) \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{V\otimes W,A,A}"] \arrow[d, "(\pi_{V,W}\otimes id_A)\otimes id_A"'] & (V \otimes W) \otimes (A \otimes A) \arrow[d, "\pi_{V,W}\otimes(id_A\otimes id_A)"] \\
((V \otimes_A W) \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{V\otimes_A W,A,A}"'] & (V \otimes_A W) \otimes (A \otimes A),
\end{tikzcd}
\tag{3.23}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "a_{V,W,A\otimes A}"] \arrow[d, "(id_V\otimes id_W)\otimes m"'] & V \otimes (W \otimes (A \otimes A)) \arrow[d, "id_V\otimes(id_W\otimes m)"] \\
(V \otimes W) \otimes A \arrow[r, "a_{V,W,A}"'] & V \otimes (W \otimes A)
\end{tikzcd}
\tag{3.24}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}
(V \otimes (W \otimes A)) \otimes A \arrow[r, "a_{V,W\otimes A,A}"] \arrow[d, "(id_V\otimes\rho_W)\otimes id_A"'] & V \otimes ((W \otimes A) \otimes A) \arrow[d, "id_V\otimes(\rho_W\otimes id_A)"] \\
(V \otimes W) \otimes A \arrow[r, "a_{V,W,A}"'] & V \otimes (W \otimes A).
\end{tikzcd}
\tag{3.25}
$$

Como já dissemos acima, $(\pi_{V,W} \otimes id_A) \otimes id_A)$ é um epimorfismo e portanto, cancelável à direita. Logo, $\rho_{V\otimes_A W} \circ (id_{V\otimes_A W} \otimes m) \otimes a_{V\otimes_A W,A,A} = \rho_{V\otimes_A W} \circ (\rho_{V\otimes_A W} \otimes id_A)$ e assim, vale a comutatividade do primeiro diagrama.

Verifiquemos a comutatividade do segundo diagrama. Observemos que

$$
\begin{aligned}
\rho_{V\otimes_A W} \circ (id_{V\otimes_A W} \otimes u) \circ (\pi_{V,W} \otimes id_{\mathbf{1}}) &= \rho_{V\otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes u) \\
&= \rho_{V\otimes_A W} \circ (\pi_{V,W} \otimes id_A) \circ (id_{V\otimes W} \otimes u) \\
&\overset{(3.22)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ a_{V,W,A} \circ ((id_V \otimes id_W) \otimes u) \\
&\overset{(3.26)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \rho_W) \circ (id_V \otimes (id_W \otimes u)) \circ a_{V,W,1} \\
&= \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes (\rho_W \circ (id_W \otimes u))) \circ a_{V,W,\mathbf{1}}) \\
&\overset{(3.6)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes r_W) \circ a_{V,W,\mathbf{1}} \\
&\overset{2.1.5}{=} \pi_{V,W} \circ r_{V\otimes W}
\end{aligned}
$$

$$\overset{(3.27)}{=} r_{V\otimes_A W}\circ(\pi_{V,W}\otimes id_{\mathbf{1}}),$$

em que (3.26) ocorre devido à naturalidade de a e (3.27) ocorre devido à naturalidade de r, conforme ilustram os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(V\otimes W)\otimes\mathbf{1} \arrow[r, "a_{V,W,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "(id_V\otimes id_W)\otimes u"'] & V\otimes(W\otimes\mathbf{1}) \arrow[d, "id_V\otimes(id_W\otimes u)"] \\
(V\otimes W)\otimes A \arrow[r, "a_{V,W,A}"'] & V\otimes(W\otimes A)
\end{tikzcd} \tag{3.26}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(V\otimes W)\otimes\mathbf{1} \arrow[r, "r_{V\otimes W}"] \arrow[d, "\pi_{V,W}\otimes id_{\mathbf{1}}"'] & V\otimes W \arrow[d, "\pi_{V,W}"] \\
(V\otimes_A W)\otimes\mathbf{1} \arrow[r, "r_{V\otimes_A W}"'] & V\otimes_A W.
\end{tikzcd} \tag{3.27}$$

Assim, como $\pi_{V,W}\otimes id_{\mathbf{1}}$ é um epimorfismo, segue que $\rho_{V\otimes_A W}\circ(id_{V\otimes_A W}\otimes u) = r_{V\otimes_A W}$ e portanto, o segundo diagrama comuta. □

Com a ação à direita bem definida, nos resta determinar $\lambda_{V\otimes_A W}$. Definimos $\varphi : A\otimes(V\otimes W)\to V\otimes_A W$ como sendo a composição

$$\varphi : A\otimes(V\otimes W)\xrightarrow{a^{-1}_{A,V,W}}(A\otimes V)\otimes W\xrightarrow{\lambda_V\otimes id_W}V\otimes W\xrightarrow{\pi_{V,W}}V\otimes_A W,$$

isto é,

$$\varphi = \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V,W}. \tag{3.28}$$

Verifiquemos que

$$\varphi\circ[((id_A\otimes(id_V\otimes\lambda_W))\circ(id_A\otimes a_{V,A,W}))-(id_A\otimes(\rho_V\otimes id_W))] = 0, \tag{3.29}$$

ou seja, que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A\otimes((V\otimes A)\otimes W) \arrow[dd, "id_A\otimes a_{V,A,W}"'] \arrow[dr, "id_A\otimes(\rho_V\otimes id_W)"] & & \\
 & A\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "\varphi"] & V\otimes_A W \\
A\otimes(V\otimes(A\otimes W)) \arrow[ur, "id_A\otimes(id_V\otimes\lambda_W)"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato,

$$
\begin{aligned}
\varphi\circ(id_A\otimes(\rho_V\otimes id_W)) &\overset{(3.28)}{=} \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V,W}\circ(id_A\otimes(\rho_V\otimes id_W))\\
&\overset{(3.30)}{=} \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ((id_A\otimes\rho_V)\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V\otimes A,W}\\
&= \pi_{V,W}\circ((\lambda_V\circ(id_A\otimes\rho_V))\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V\otimes A,W}\\
&\overset{(3.11)}{=} \pi_{V,W}\circ((\rho_V\circ(\lambda_V\otimes id_A)\circ a^{-1}_{A,V,A})\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V\otimes A,W}\\
&= \pi_{V,W}\circ(\rho_V\otimes id_W)\circ((\lambda_V\otimes id_A)\otimes id_W)\circ(a^{-1}_{A,V,A}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V\otimes A,W}\\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{V,W}\circ(\rho_V\otimes id_W)\circ((\lambda_V\otimes id_A)\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A\otimes V,A,W}\circ a^{-1}_{A,V,A\otimes W}\\
&\quad\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&\overset{(3.31)}{=} \pi_{V,W}\circ(\rho_V\otimes id_W)\circ a^{-1}_{V,A,W}\circ(\lambda_V\otimes(id_A\otimes id_W))\circ a^{-1}_{A,V,A\otimes W}\\
&\quad\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{V,W}\circ(id_V\otimes\lambda_W)\circ(\lambda_V\otimes id_{A\otimes W})\circ a^{-1}_{A,V,A\otimes W}\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&= \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes\lambda_W)\circ a^{-1}_{A,V,A\otimes W}\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&= \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ(id_{A\otimes V}\otimes\lambda_W)\circ a^{-1}_{A,V,A\otimes W}\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&= \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ((id_A\otimes id_V)\otimes\lambda_W)\circ a^{-1}_{A,V,A\otimes W}\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&\overset{(3.32)}{=} \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V,W}\circ(id_A\otimes(id_V\otimes\lambda_W))\circ(id_A\otimes a_{V,A,W})\\
&\overset{(3.28)}{=} \varphi\circ(id_A\otimes(id_V\otimes\lambda_W))\circ(id_A\otimes a_{V,A,W}),
\end{aligned}
$$

em que as igualdades (3.30), (3.31) e (3.32) ocorrem devido à naturalidade de a, ilustrada, respectivamente, pelos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes(V\otimes A))\otimes W \arrow[r, "a_{A,V\otimes A,W}"] \arrow[d, "(id_A\otimes\rho_V)\otimes id_W"'] & A\otimes((V\otimes A)\otimes W) \arrow[d, "id_A\otimes(\rho_V\otimes id_W)"] \\
(A\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{A,V,W}"'] & A\otimes(V\otimes W),
\end{tikzcd}
\tag{3.30}
$$

$$
\begin{tikzcd}
((A\otimes V)\otimes A)\otimes W \arrow[r, "a_{A\otimes V,A,W}"] \arrow[d, "(\lambda_V\otimes id_A)\otimes id_W"'] & (A\otimes V)\otimes(A\otimes W) \arrow[d, "\lambda_V\otimes(id_A\otimes id_W)"] \\
(V\otimes A)\otimes W \arrow[r, "a_{V,A,W}"'] & V\otimes(A\otimes W)
\end{tikzcd}
\tag{3.31}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}
(A\otimes V)\otimes(A\otimes W) \arrow[r, "a_{A,V,A\otimes W}"] \arrow[d, "(id_A\otimes id_V)\otimes\lambda_W"'] & A\otimes(V\otimes(A\otimes W)) \arrow[d, "id_A\otimes(id_V\otimes\lambda_W)"] \\
(A\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{A,V,W}"'] & A\otimes(V\otimes W).
\end{tikzcd}
\tag{3.32}
$$

Por um raciocínio análogo ao já feito anteriormente, sendo $\otimes$ exato à direita na segunda variável e $(V \otimes_A W, \pi_{V,W})$ o conúcleo de $f = ((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}) - (\rho_V \otimes id_W)$, temos que

$$\otimes \circ (A, -)(V \otimes_A W, \pi_{V,W}) = (A \otimes (V \otimes_A W), id_A \otimes \pi_{V,W})$$

é o conúcleo de $id_A \otimes f$. Daí, como

$$\begin{aligned}
\varphi \circ (id_A \otimes f) &= \varphi \circ (id_A \otimes (((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}) - (\rho_V \otimes id_W))) \\
&= \varphi \circ [(id_A \otimes ((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W})) - (id_A \otimes (\rho_V \otimes id_W))] \\
&= \varphi \circ [((id_A \otimes (id_V \otimes \lambda_W)) \circ (id_A \otimes a_{V,A,W})) - (id_A \otimes (\rho_V \otimes id_W))] \\
&\overset{(3.18)}{=} 0,
\end{aligned}$$

existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $\lambda_{V \otimes_A W} : A \otimes (V \otimes_A W) \to V \otimes_A W$ tal que $\lambda_{V \otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}) = \varphi$, isto é, tal que

$$\lambda_{V \otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}) = \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,V,W}. \tag{3.33}$$

Veja o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
A \otimes ((V \otimes A) \otimes W) \arrow[r, "id_A \otimes f"] & A \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "id_A \otimes \pi_{V,W}"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \otimes (V \otimes_A W) \arrow[dl, dashed, "\lambda_{V \otimes_A W}"] \\
& V \otimes_A W. &
\end{tikzcd}$$

Observemos também, como feito anteriormente, que pelo fato de $\pi_{V,W}$ ser um epimorfismo e $\otimes$ ser um funtor exato à direita em cada variável, os morfismos $id_A \otimes (id_A \otimes \pi_{V,W})$ e $id_A \otimes \pi_{V,W}$ são também epimorfismos.

Lema 3.2.3. *O morfismo $\lambda_{V \otimes_A W}$ define uma ação à esquerda sobre o objeto $V \otimes_A W$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes (V \otimes_A W) \arrow[r, "a_{A,A,V \otimes_A W}"] \arrow[d, "m \otimes id_{V \otimes_A W}"'] & A \otimes (A \otimes (V \otimes_A W)) \arrow[r, "id_A \otimes \lambda_{V \otimes_A W}"] & A \otimes (V \otimes_A W) \arrow[d, "\lambda_{V \otimes_A W}"] \\
A \otimes (V \otimes_A W) \arrow[rr, "\lambda_{V \otimes_A W}"'] & & V \otimes_A W
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes (V \otimes_A W) \arrow[rr, "u \otimes id_{V \otimes_A W}"] \arrow[dr, "l_{V \otimes_A W}"'] & & A \otimes (V \otimes_A W) \arrow[dl, "\lambda_{V \otimes_A W}"] \\
& V \otimes_A W &
\end{tikzcd}$$

são comutativos. Notemos que

$$\begin{aligned}
&\lambda_{V\otimes_A W} \circ (m \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes (id_A \otimes \pi_{V,W})) = \\
&\overset{(3.34)}{=} \lambda_{V\otimes_A W} \circ (m \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ ((id_A \otimes id_A) \circ \pi_{V,W}) \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&= \lambda_{V\otimes_A W} \circ (m \otimes \pi_{V,W}) \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&= \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}) \circ (m \otimes id_{V\otimes W}) \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&\overset{(3.33)}{=} \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,V,W} \circ (m \otimes (id_V \otimes id_W)) \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&\overset{(3.35)}{=} \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ ((m \otimes id_V) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A\otimes A,V,W} \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&= \pi_{V,W} \circ ((\lambda_V \circ (m \otimes id_V)) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A\otimes A,V,W} \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&\overset{(3.3)}{=} \pi_{V,W} \circ ((\lambda_V \circ (id_A \otimes \lambda_V) \circ a_{A,A,V}) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A\otimes A,V,W} \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&= \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ ((id_A \otimes \lambda_V) \circ id_W) \circ (a_{A,A,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A\otimes A,V,W} \\
&\quad \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes W} \\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ ((id_A \otimes \lambda_V) \circ id_W) \circ a^{-1}_{A,A\otimes V,W} \circ (id_A \otimes a^{-1}_{A,V,W}) \\
&\overset{(3.36)}{=} \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,V,W} \circ (id_A \otimes (\lambda_V \otimes id_W)) \circ (id_A \otimes a^{-1}_{A,V,W}) \\
&\overset{(3.33)}{=} \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}) \circ (id_A \otimes (\lambda_V \otimes id_W)) \circ (id_A \otimes a^{-1}_{A,V,W}) \\
&= \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes (\pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,V,W})) \\
&\overset{(3.33)}{=} \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes (\lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}))) \\
&= \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \lambda_{V\otimes_A W}) \circ (id_A \otimes (id_A \otimes \pi_{V,W})),
\end{aligned}$$

em que as igualdades (3.34), (3.35) e (3.36) ocorrem devido à naturalidade de a, ilustrada, respectivamente, pelos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "a_{A,A,V\otimes W}"] \arrow[d, "(id_A \otimes id_A)\otimes \pi_{V,W}"'] & A \otimes (A \otimes (V \otimes W)) \arrow[d, "id_A \otimes (id_A \otimes \pi_{V,W})"] \\
(A \otimes A) \otimes (V \otimes_A W) \arrow[r, "a_{A,A,V\otimes_A W}"'] & A \otimes (A \otimes (V \otimes_A W)),
\end{tikzcd} \tag{3.34}$$

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes A) \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{A\otimes A,V,W}"] \arrow[d, "(m\otimes id_V)\otimes id_W"'] & (A \otimes A) \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "m\otimes(id_V\otimes id_W)"] \\
(A \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{A,V,W}"'] & m \otimes (id_V \otimes id_W)
\end{tikzcd} \tag{3.35}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes (A \otimes V)) \otimes W \arrow[r, "a_{A,A\otimes V,W}"] \arrow[d, "(id_A\otimes\lambda_V)\otimes id_W"'] & A \otimes ((A \otimes V) \otimes W) \arrow[d, "id_A\otimes(\lambda_V\otimes id_W)"] \\
(A \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{A,V,W}"'] & A \otimes (V \otimes W).
\end{tikzcd} \tag{3.36}$$

Assim, sendo $id_A \otimes (id_A \otimes \pi_{V,W})$ um epimorfismo, segue que $\lambda_{V\otimes_A W} \circ (m \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ a^{-1}_{A,A,V\otimes_A W} = \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \lambda_{V\otimes_A W})$, isto é, o primeiro diagrama comuta.

Agora, verifiquemos a comutatividade do segundo diagrama. Temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_{V\otimes_A W} \circ (u \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes \pi_{V,W}) &= \lambda_{V\otimes_A W} \circ (u \otimes \pi_{V,W}) \\
&= \lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}) \circ (u \otimes id_{V\otimes W}) \\
&\overset{(3.33)}{=} \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,V,W} \circ (u \otimes (id_V \otimes id_W)) \\
&\overset{(3.37)}{=} \pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ ((u \otimes id_V) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \\
&= \pi_{V,W} \circ ((\lambda_V \circ (u \otimes id_V)) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \\
&\overset{(3.4)}{=} \pi_{V,W} \circ (l_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},V,W} \\
&\overset{2.1.5}{=} \pi_{V,W} \circ l_{V\otimes W} \\
&\overset{(3.38)}{=} l_{V\otimes_A W} \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes \pi_{V,W}),
\end{aligned}$$

em que (3.37) ocorre devido à naturalidade de a e (3.38) ocorre devido à naturalidade de l, conforme ilustram os diagramas

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{\mathbf{1},V,W}"] \arrow[d, "(u\otimes id_V)\otimes id_W"'] & \mathbf{1} \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "u\otimes(id_V\otimes id_W)"] \\
(A \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{A,V,W}"'] & A \otimes (V \otimes W)
\end{tikzcd} \tag{3.37}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "l_{V\otimes W}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes\pi_{V,W}"'] & V \otimes W \arrow[d, "\pi_{V,W}"] \\
\mathbf{1} \otimes (V \otimes_A W) \arrow[r, "l_{V\otimes_A W}"'] & V \otimes_A W.
\end{tikzcd} \tag{3.38}$$

Assim, como $id_{\mathbf{1}} \otimes \pi_{V,W}$ é um epimorfismo, segue que $\lambda_{V\otimes_A W} \circ (u \otimes id_{V\otimes_A W}) = l_{V\otimes_A W}$ e portanto, o segundo diagrama comuta. $\square$

Agora que sabemos que $V \otimes_A W$ possui uma estrutura de A-módulo à direita e à esquerda em $\mathcal{C}$, verifiquemos que este também possui uma estrutura de A-bimódulo em $\mathcal{C}$.

Lema 3.2.4. *$(V \otimes_A W, \lambda_{V\otimes_A W}, \rho_{V\otimes_A W})$ é um A-bimódulo em $\mathcal{C}$.*

Demonstração. Precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes(V\otimes_A W))\otimes A \arrow[r, "a_{A,V\otimes_A W,A}"] \arrow[d, "\lambda_{V\otimes_A W}\otimes id_A"'] & A\otimes((V\otimes_A W)\otimes A) \arrow[r, "id_A\otimes\rho_{V\otimes_A W}"] & A\otimes(V\otimes_A W) \arrow[d, "\lambda_{V\otimes_A W}"] \\
(V\otimes_A W)\otimes A \arrow[rr, "\rho_{V\otimes_A W}"'] & & V\otimes_A W
\end{tikzcd}$$

comuta.

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\rho_{V\otimes_A W}\circ(\lambda_{V\otimes_A W}\otimes id_A)\circ((id_A\otimes\pi_{V,W})\otimes id_A) = \\
&= \rho_{V\otimes_A W}\circ((\lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\pi_{V,W}))\otimes id_A) \\
&\overset{(3.33)}{=} \rho_{V\otimes_A W}\circ((\pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&= \rho_{V\otimes_A W}\circ(\pi_{V,W}\otimes id_A)\circ((\lambda_V\otimes id_W)\otimes id_A)\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&\overset{(3.22)}{=} \pi_{V,W}\circ(id_V\otimes\rho_W)\circ a_{V,W,A}\circ((\lambda_V\otimes id_W)\otimes id_A)\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&\overset{(3.39)}{=} \pi_{V,W}\circ(id_V\otimes\rho_W)\circ(\lambda_V\otimes(id_W\otimes id_A))\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&= \pi_{V,W}\circ(id_V\otimes\rho_W)\circ(\lambda_V\otimes id_{W\otimes A}))\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&= \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes\rho_W)\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&= \pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ(id_{A\otimes V}\otimes\rho_W)\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&\overset{(3.33)}{=} \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\pi_{V,W})\circ a_{A,V,W}\circ((id_A\otimes id_V)\otimes\rho_W)\circ a_{A\otimes V,W,A} \\
&\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&\overset{(3.40)}{=} \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\pi_{V,W})\circ(id_A\otimes(id_V\otimes\rho_W))\circ a_{A,V,W\otimes A}\circ a_{A\otimes V,W,A} \\
&\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&= \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes(\pi_{V,W}\circ(id_V\otimes\rho_W)))\circ a_{A,V,W\otimes A}\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&\overset{(3.22)}{=} \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes(\rho_{V\otimes_A W}\circ(\pi_{V,W}\otimes id_A)\circ a^{-1}_{V,W,A}))\circ a_{A,V,W\otimes A} \\
&\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&= \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ(id_A\otimes(\pi_{V,W}\otimes id_A))\circ(id_A\otimes a^{-1}_{V,W,A}) \\
&\circ a_{A,V,W\otimes A}\circ a_{A\otimes V,W,A}\circ(a^{-1}_{A,V,W}\otimes id_A) \\
&\overset{(2.1)}{=} \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ(id_A\otimes(\pi_{V,W}\otimes id_A))\circ a_{A,V\otimes W,A} \\
&\overset{(3.41)}{=} \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ a_{A,V\otimes_A W,A}\circ((id_A\otimes\pi_{V,W})\otimes id_A),
\end{aligned}$$

em que (3.39), (3.40) e (3.41) seguem da naturalidade de a, representada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} ((A\otimes V)\otimes W)\otimes A \arrow[r, "a_{A\otimes V,W,A}"] \arrow[d, "(\lambda_V\otimes id_W)\otimes id_A"'] & (A\otimes V)\otimes(W\otimes A) \arrow[d, "\lambda_V\otimes(id_W\otimes id_A)"] \\ (V\otimes W)\otimes A \arrow[r, "a_{V,W,A}"'] & V\otimes(W\otimes A), \end{tikzcd} \tag{3.39}$$

$$\begin{tikzcd} (A\otimes V)\otimes(W\otimes A) \arrow[r, "a_{A,V,W\otimes A}"] \arrow[d, "(id_A\otimes id_V)\otimes\rho_W"'] & A\otimes(V\otimes(W\otimes A)) \arrow[d, "id_A\otimes(id_V\otimes\rho_W)"] \\ (A\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{A,V,W}"'] & A\otimes(V\otimes W) \end{tikzcd} \tag{3.40}$$

e

$$\begin{tikzcd} (A\otimes(V\otimes W))\otimes A \arrow[r, "a_{A,V\otimes W,A}"] \arrow[d, "(id_A\otimes\pi_{V,W})\otimes id_A"'] & A\otimes((V\otimes W)\otimes A) \arrow[d, "id_A\otimes(\pi_{V,W}\otimes id_A)"] \\ (A\otimes(V\otimes_A W))\otimes A \arrow[r, "a_{A,V\otimes_A W,A}"'] & A\otimes((V\otimes_A W)\otimes A). \end{tikzcd} \tag{3.41}$$

Assim, como $\pi_{V,W}$ é epimorfismo e $\otimes$ é exato à direita tanto na primeira quanto na segunda variável, segue que $(id_A\otimes\pi_{V,W})\otimes id_A$ é também um epimorfismo. Logo, vale a igualdade

$$\rho_{V\otimes_A W}\circ(\lambda_{V\otimes_A W}\otimes id_A) = \lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ a_{A,V\otimes_A W,A}. \tag{3.42}$$

$\square$

Agora que já sabemos que dados dois A-bimódulos V e W em ${}_A\mathcal{C}_A$ o produto $V\otimes_A W$ também está em ${}_A\mathcal{C}_A$, podemos mostrar que $f\otimes_A g : V\otimes_A V' \to W\otimes_A W'$ é, de fato, um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$, para quaisquer $f : V\to W$ e $g : V'\to W'$ morfismos em ${}_A\mathcal{C}_A$.

Lema 3.2.5. *O morfismo $f\otimes_A g : V\otimes_A V' \to W\otimes_A W'$ é um morfismo de A-bimódulos.*

Demonstração. Precisamos mostrar que os diagramas

$$\begin{tikzcd} A\otimes(V\otimes_A V') \arrow[r, "id_A\otimes(f\otimes_A g)"] \arrow[d, "\lambda_{V\otimes_A V'}"'] & A\otimes(W\otimes_A W') \arrow[d, "\lambda_{W\otimes_A W'}"] \\ V\otimes_A V' \arrow[r, "f\otimes_A g"'] & W\otimes_A W' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (V\otimes_A V')\otimes A \arrow[r, "(f\otimes_A g)\otimes id_A"] \arrow[d, "\rho_{V\otimes_A V'}"'] & (W\otimes_A W')\otimes A \arrow[d, "\rho_{W\otimes_A W'}"] \\ V\otimes_A V' \arrow[r, "f\otimes_A g"'] & W\otimes_A W' \end{tikzcd}$$

comutam. Observemos que

$$\begin{aligned} \lambda_{W\otimes_A W'}\circ(id_A\otimes(f\otimes_A g))\circ(id_A\otimes\pi_{V,V'}) &= \lambda_{W\otimes_A W'}\circ(id_A\otimes((f\otimes_A g)\circ\pi_{V,V'})) \\ &\overset{(3.15)}{=} \lambda_{W\otimes_A W'}\circ(id_A\otimes(\pi_{W,W'}\circ(f\otimes g))) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda_{W\otimes_A W'} \circ (id_A \otimes \pi_{W,W'}) \circ (id_A \otimes (f \otimes g)) \\
&\overset{(3.33)}{=} \pi_{W,W'} \circ (\lambda_W \otimes id_{W'}) \circ a^{-1}_{A,W,W'} \circ (id_A \otimes (f \otimes g)) \\
&\overset{(3.43)}{=} \pi_{W,W'} \circ (\lambda_W \otimes id_{W'}) \circ ((id_A \otimes f) \otimes g) \circ a^{-1}_{A,V,V'} \\
&= \pi_{W,W'} \circ ((\lambda_W \circ (id_A \otimes f)) \otimes g) \circ a^{-1}_{A,V,V'} \\
&\overset{(3.7)}{=} \pi_{W,W'} \circ ((f \circ \lambda_V) \otimes g) \circ a^{-1}_{A,V,V'} \\
&= \pi_{W,W'} \circ (f \otimes g) \circ (\lambda_V \otimes id_{V'}) \circ a^{-1}_{A,V,V'} \\
&\overset{(3.15)}{=} (f \otimes_A g) \circ \pi_{V,V'} \circ (\lambda_V \otimes id_{V'}) \circ a^{-1}_{A,V,V'} \\
&\overset{(3.33)}{=} (f \otimes_A g) \circ \lambda_{V\otimes_A V'} \circ (id_A \otimes \pi_{V,V'}),
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (3.43) ocorre devido à naturalidade de a, representada pela comutatividade do diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes V) \otimes V' \arrow[r, "a_{A,V,V'}"] \arrow[d, "(id_A \otimes f)\otimes g"'] & A \otimes (V \otimes V') \arrow[d, "id_A \otimes (f \otimes g)"] \\
((A \otimes W) \otimes W' \arrow[r, "a_{A,W,W'}"'] & A \otimes (W \otimes W').
\end{tikzcd}
\tag{3.43}
$$

Daí, como $id_A \otimes \pi_{V,V'}$ é epimorfismo, visto que $\otimes$ é exato à direita em cada variável, segue que $\lambda_{W\otimes_A W'} \circ (id_A \otimes (f \otimes_A g)) = (f \otimes_A g) \circ \lambda_{V \otimes_A V'}$. Portanto, o primeiro diagrama comuta e isto nos diz que $f \otimes_A g$ é um morfismo de A-módulos à esquerda em $\mathcal{C}$.

Agora, verifiquemos o segundo diagrama. Temos que

$$
\begin{aligned}
\rho_{W\otimes_A W'} \circ ((f \otimes_A g) \otimes id_A) \circ (\pi_{V,V'} \otimes id_A) &= \rho_{W\otimes_A W'} \circ (((f \otimes_A g) \circ \pi_{V,V'}) \otimes id_A) \\
&\overset{(3.15)}{=} \rho_{W\otimes_A W'} \circ ((\pi_{W,W'} \circ (f \otimes g)) \otimes id_A) \\
&= \rho_{W\otimes_A W'} \circ (\pi_{W,W'} \otimes id_A) \circ ((f \otimes g) \otimes id_A) \\
&\overset{(3.22)}{=} \pi_{W,W'} \circ (id_W \otimes \rho_{W'}) \circ a_{W,W',A} \circ ((f \otimes g) \otimes id_A) \\
&\overset{(3.44)}{=} \pi_{W,W'} \circ (id_W \otimes \rho_{W'}) \circ (f \otimes (g \otimes id_A)) \circ a_{V,V',A} \\
&= \pi_{W,W'} \circ (f \otimes (\rho_{W'} \circ (g \otimes id_A))) \circ a_{V,V',A} \\
&\overset{(3.8)}{=} \pi_{W,W'} \circ (f \otimes (g \circ \rho_{V'})) \circ a_{V,V',A} \\
&= \pi_{W,W'} \circ (f \otimes g) \circ (id_V \otimes \rho_{V'}) \circ a_{V,V',A} \\
&\overset{(3.15)}{=} (f \otimes_A g) \circ \pi_{V,V'} \circ (id_V \otimes \rho_{V'}) \circ a_{V,V',A} \\
&\overset{(3.22)}{=} (f \otimes_A g) \circ \rho_{V\otimes_A V'} \circ (\pi_{V,V'} \otimes id_A),
\end{aligned}
$$

em que a igualdade (3.44) ocorre devido à naturalidade de a, representada pela comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} (V \otimes V') \otimes A \arrow[r, "a_{V,V',A}"] \arrow[d, "(f\otimes g)\otimes id_A"'] & V \otimes (V' \otimes A) \arrow[d, "f\otimes(g\otimes id_A)"] \\ (W \otimes W') \otimes A \arrow[r, "a_{W,W',A}"'] & W \otimes (W' \otimes A). \end{tikzcd} \tag{3.44}$$

Daí, como $\pi_{V,V'} \otimes id_A$ é epimorfismo, visto que $\otimes$ é exato à direita em cada variável, segue que $\rho_{W\otimes_A W'} \circ ((f \otimes_A g) \otimes id_A) = (f \otimes_A g) \circ \rho_{V\otimes_A V'}$. Portanto, o segundo diagrama comuta e isto nos diz que $f \otimes_A g$ é um morfismo de A-módulos à direita em $\mathcal{C}$. Assim, $f \otimes_A g$ é morfismo de A-bimódulos. $\square$

Portanto, pelos Lemas 3.2.4 e 3.2.5, temos que para quaisquer dois A-bimódulos V e W, o objeto $V \otimes_A W \in {}_A\mathcal{C}_A$. O mesmo ocorre para morfismos f e g em ${}_A\mathcal{C}_A$, $f \otimes_A g \in {}_A\mathcal{C}_A$. Sendo assim, o objetivo do próximo lema é mostrar que $\otimes_A$ é funtor.

Lema 3.2.6. *Mantendo as notações acima, $\otimes_A$ é um funtor.*

Demonstração. Pelo já exposto acima,

$$\begin{array}{rcl} \otimes_A : {}_A\mathcal{C}_A \times {}_A\mathcal{C}_A & \to & {}_A\mathcal{C}_A \\ (V, W) & \mapsto & V \otimes_A W \\ (f, g) & \mapsto & f \otimes_A g. \end{array}$$

Lembramos que $id_{(V,W)} = (id_V, id_W)$ e $(f, f') \circ (g, g') = (f \circ g, f' \circ g')$ para quaisquer $g : X \to Y$, $f : Y \to Z$, $g' : X' \to Y'$ e $f' : Y' \to Z'$ morfismos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Resta-nos provar que

$$\otimes_A(id_{(V,W)}) = id_{\otimes_A(V,W)} \ \text{ e } \ \otimes_A ((f, f') \circ (g, g')) = \otimes_A(f, f') \circ \otimes_A(g, g'),$$

ou seja,

$$id_V \otimes_A id_W = id_{V\otimes_A W} \ \text{ e } \ (f \circ g) \otimes_A (f' \circ g') = (f \otimes_A f') \circ (g \otimes_A g').$$

Sabemos que, para quaisquer objetos V e W em ${}_A\mathcal{C}_A$, temos

$$\begin{aligned} (id_V \otimes_A id_W) \circ \pi_{V,W} &\overset{(3.15)}{=} \pi_{V,W} \circ (id_V \otimes id_W) \\ &= \pi_{V,W} \circ id_{V\otimes W} \\ &= \pi_{V,W} \\ &= id_{V\otimes_A W} \circ \pi_{V,W} \end{aligned}$$

e como $\pi_{V,W}$ é um epimorfismo, segue que $id_V \otimes_A id_W = id_{V\otimes_A W}$.

Agora, provamos a segunda igualdade. Temos que

$$\begin{aligned}
((f\circ g)\otimes_A (f'\circ g'))\circ \pi_{X,X'} &\overset{(3.15)}{=} \pi_{Z,Z'}\circ ((f\circ g)\otimes (f'\circ g'))\\
&= \pi_{Z,Z'}\circ ((f\otimes f')\circ (g\otimes g'))\\
&= (\pi_{Z,Z'}\circ (f\otimes f'))\circ (g\otimes g')\\
&\overset{(3.15)}{=} ((f\otimes_A f')\circ \pi_{Y,Y'})\circ (g\otimes g')\\
&= (f\otimes_A f')\circ (\pi_{Y,Y'}\circ (g\otimes g'))\\
&\overset{(3.15)}{=} (f\otimes_A f')\circ ((g\otimes_A g')\circ \pi_{X,X'})\\
&= ((f\otimes_A f')\circ (g\otimes_A g'))\circ \pi_{X,X'}
\end{aligned}$$

e como $\pi_{X,X'}$ é um epimorfismo, segue que $(f\circ g)\otimes_A (f'\circ g') = (f\otimes_A f')\circ (g\otimes_A g')$. □

Precisamos determinar a associatividade da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$. Assim, necessitamos de isomorfismos

$$a'_{U,V,W} : (U\otimes_A V)\otimes_A W \to U\otimes_A (V\otimes_A W),$$

para quaisquer U, V e W objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isso, definimos o morfismo

$$\alpha_{U,V,W} : (U\otimes V)\otimes W \to U\otimes_A (V\otimes_A W)$$

como sendo a composição

$$\alpha_{U,V,W} : (U\otimes V)\otimes W \xrightarrow{a_{U,V,W}} U\otimes (V\otimes W) \xrightarrow{id_U\otimes \pi_{V,W}} U\otimes (V\otimes_A W)$$

$$\xrightarrow{\pi_{U\otimes_A W}} U\otimes_A (V\otimes_A W),$$

isto é,

$$\alpha_{U,V,W} = \pi_{U,V\otimes_A W}\circ (id_U\otimes \pi_{V,W})\circ a_{U,V,W}. \tag{3.45}$$

Verifiquemos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd}
((U\otimes A)\otimes V)\otimes W \arrow[d, "a_{U,A,V}\otimes id_W"'] \arrow[dr, "(\rho_U\otimes id_V)\otimes id_W"] & & \\
& (U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "\alpha_{U,V,W}"] & U\otimes_A (V\otimes_A W). \\
(U\otimes (A\otimes V))\otimes W \arrow[ur, "(id_U\otimes \lambda_V)\circ id_W"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.46}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\alpha_{U,V,W}\circ((\rho_U\otimes id_V)\otimes id_W) &\overset{(3.45)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U,V,W}\circ((\rho_U\otimes id_V)\otimes id_W)\\
&\overset{(3.47)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ(\rho_U\otimes(id_V\otimes id_W))\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ(\rho_U\otimes id_{V\otimes W})\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(\rho_U\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(\rho_U\otimes id_{V\otimes_A W})\circ(id_{U\otimes A}\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\lambda_{V\otimes_A W})\circ a_{U,A,V\otimes_A W}\circ((id_U\otimes id_A)\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(3.48)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\lambda_{V\otimes_A W})\circ(id_U\otimes(id_A\otimes\pi_{V,W}))\circ a_{U,A,V\otimes W}\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes(\lambda_{V\otimes_A W}\circ(id_A\otimes\pi_{V,W})))\circ a_{U,A,V\otimes W}\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(3.33)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes(\pi_{V,W}\circ(\lambda_V\otimes id_W)\circ a^{-1}_{A,V,W}))\circ a_{U,A,V\otimes W}\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ(id_U\otimes(\lambda_V\otimes id_W))\circ(id_U\otimes a^{-1}_{A,V,W})\circ a_{U,A,V\otimes W}\\
&\quad\circ a_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ(id_U\otimes(\lambda_V\otimes id_W))\circ a_{U,A\otimes V,W}\circ(a_{U,A,V}\otimes id_W)\\
&\overset{(3.49)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U,V,W}\circ((id_U\otimes\lambda_V)\otimes id_W)\circ(a_{U,A,V}\otimes id_W)\\
&\overset{(3.45)}{=} \alpha_{U,V,W}\circ((id_U\otimes\lambda_V)\otimes id_W)\circ(a_{U,A,V}\otimes id_W),
\end{aligned}$$

em que (3.47), (3.48) e (3.49) seguem da naturalidade de a, representada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
((U\otimes A)\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U\otimes A,V,W}"] \arrow[d, "(\rho_U\otimes id_V)\otimes id_W"'] & (U\otimes A)\otimes(V\otimes W) \arrow[d, "\rho_U\otimes(id_V\otimes id_W)"] \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U\otimes(V\otimes W),
\end{tikzcd} \tag{3.47}$$

$$\begin{tikzcd}
(U\otimes A)\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "a_{U,A,V\otimes W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes id_A)\otimes\pi_{V,W}"'] & U\otimes(A\otimes(V\otimes W)) \arrow[d, "id_U\otimes(id_A\otimes\pi_{V,W})"] \\
(U\otimes A)\otimes(V\otimes_A W) \arrow[r, "a_{U,A,V\otimes_A W}"'] & U\otimes(A\otimes(V\otimes_A W))
\end{tikzcd} \tag{3.48}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(U\otimes(A\otimes V))\otimes W \arrow[r, "a_{U,A\otimes V,W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes\lambda_V)\otimes id_W"'] & U\otimes((A\otimes V)\otimes W) \arrow[d, "id_U\otimes(\lambda_V\otimes id_W)"] \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U\otimes(V\otimes W)
\end{tikzcd} \tag{3.49}$$

Portanto, o diagrama em questão comuta.

Consideremos $f = ((id_U \otimes \lambda_V) \circ a_{U,A,V}) - (\rho_U \otimes id_V)$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((U \otimes A) \otimes V) \otimes W \arrow[r, "f \otimes id_W"] & (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "\pi_{U,V} \otimes id_W"] \arrow[d, "\alpha_{U,V,W}"'] & (U \otimes_A V) \otimes W \arrow[dl, dashed, "\beta_{U,V,W}"] \\
& U \otimes_A (V \otimes_A W). &
\end{tikzcd}$$

Sendo $(U \otimes_A V, \pi_{U,V})$ o conúcleo de f e por ser $\otimes$ exato à direita em cada variável, segue da Definição 1.4.25 que $((U \otimes_A V) \otimes W, \pi_{U,V} \otimes id_W)$ é o conúcleo de $f \otimes id_W$. Assim,

$$\begin{aligned}
\alpha_{U,V,W} \circ (f \otimes id_W) &= \alpha_{U,V,W} \circ ((((id_U \otimes \lambda_V) \circ a_{U,A,V}) - (\rho_U \otimes id_V)) \otimes id_W) \\
&= \alpha_{U,V,W} \circ [(((id_U \otimes \lambda_V) \circ a_{U,A,V}) \otimes id_W) - ((\rho_U \otimes id_V) \otimes id_W)] \\
&= \alpha_{U,V,W} \circ [((((id_U \otimes \lambda_V) \otimes id_A) \circ (a_{U,A,V} \otimes id_W)) - ((\rho_U \otimes id_V) \otimes id_W)] \\
&= \alpha_{U,V,W} \circ ((id_U \otimes \lambda_V) \otimes id_A) \circ (a_{U,A,V} \otimes id_W) - \alpha_{U,V,W} \circ ((\rho_U \otimes id_V) \otimes id_W) \\
&\overset{(3.46)}{=} 0
\end{aligned}$$

e portanto, existe um único morfismo em $\mathcal{C}$, $\beta_{U,V,W} : (U \otimes_A V) \otimes W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$ tal que $\beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) = \alpha_{U,V,W}$, ou seja

$$\beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) = \pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W}. \tag{3.50}$$

De modo análogo, consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
((U \otimes_A V) \otimes A) \otimes W \arrow[dd, "a_{U \otimes_A V,A,W}"'] \arrow[dr, "\rho_{U \otimes_A V} \otimes id_W"] & & \\
& (U \otimes_A V) \otimes W \arrow[r, "\pi_{U \otimes_A V,W}"] \arrow[dd, "\beta_{U,V,W}"] & (U \otimes_A V) \otimes_A W. \arrow[ddl, dashed, "a'_{U,V,W}"] \\
(U \otimes_A V) \otimes (A \otimes W) \arrow[ur, "id_{U \otimes_A V} \otimes \lambda_W"'] & & \\
& U \otimes_A (V \otimes_A W) &
\end{tikzcd} \tag{3.51}$$

e mostremos que

$$\beta_{U,V,W} \circ [((id_{U \otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ a_{U \otimes_A V,A,W}) - (\rho_{U \otimes_A V} \otimes id_W)] = 0. \tag{3.52}$$

Ocorrendo esta igualdade e sendo $((U \otimes_A V) \otimes_A W, \pi_{U \otimes_A V,W})$ o conúcleo de $((id_{U \otimes_A V} \circ$

$a_{U\otimes_A V,A,W}) - (\rho_{U\otimes_A V} \otimes id_W)$, segue que existe um único morfismo em $\mathcal{C}$,

$$a'_{U,V,W} : (U \otimes_A W) \otimes_A W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$$

tal que

$$a'_{U,V,W} \circ \pi_{U\otimes_A V,W} = \beta_{U,V,W}. \tag{3.53}$$

Verifiquemos que ocorre (3.52). Temos que

$$\begin{aligned}
\beta_{U,V,W} \circ (\rho_{U\otimes_A V} \otimes id_W) \circ ((\pi_{U,V} \otimes id_A) \otimes id_W) &= \beta_{U,V,W} \circ ((\rho_{U\otimes_A V} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_A)) \otimes id_W) \\
&\overset{(3.22)}{=} \beta_{U,V,W} \circ ((\pi_{U,V} \circ (id_U \otimes \rho_V) \circ a_{U,V,A}) \otimes id_W) \\
&= \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((id_U \otimes \rho_V) \otimes id_W) \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.50)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \circ ((id_U \otimes \rho_V) \otimes id_W) \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.54)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (id_U \otimes (\rho_V \otimes id_W)) \circ a_{U,V\otimes A,W} \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&= \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes (\pi_{V,W} \circ (\rho_V \otimes id_W))) \circ a_{U,V\otimes A,W} \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes (\pi_{V,W} \circ (id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W})) \circ a_{U,V\otimes A,W} \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&= \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (id_U \otimes (id_V \otimes \lambda_W)) \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \circ a_{U,V\otimes A,W} \\
&\quad \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.50)}{=} \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (id_V \otimes \lambda_W)) \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \\
&\quad \circ a_{U,V\otimes A,W} \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.55)}{=} \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((id_U \otimes id_V) \otimes \lambda_W) \circ a^{-1}_{U,V,A\otimes W} \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \\
&\quad \circ a_{U,V\otimes A,W} \circ (a_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\overset{(2.1)}{=} \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ (id_{U\otimes V} \otimes \lambda_W) \circ a_{U\otimes V,A,W} \\
&= \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes \lambda_W) \circ a_{U\otimes V,A,W} \\
&= \beta_{U,V,W} \circ (id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ (\pi_{U,V} \otimes id_{A\otimes W}) \circ a_{U\otimes V,A,W} \\
&= \beta_{U,V,W} \circ (id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ (\pi_{U,V} \otimes (id_A \otimes id_W)) \circ a_{U\otimes V,A,W} \\
&\overset{(3.56)}{=} \beta_{U,V,W} \circ (id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ a_{U\otimes_A V,A,W} \circ ((\pi_{U,V} \otimes id_A) \otimes id_W),
\end{aligned}$$

em que (3.54), (3.55) e (3.56) seguem da naturalidade de a, representada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes (V \otimes A)) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V\otimes A,W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes\rho_V)\otimes id_W"'] & U \otimes ((V \otimes A) \otimes W) \arrow[d, "id_U\otimes(\rho_V\otimes id_W)"] \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U \otimes (V \otimes W),
\end{tikzcd} \tag{3.54}$$

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes (A \otimes W) \arrow[r, "a_{U,V,A\otimes W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes id_V)\otimes\lambda_W"'] & U \otimes (V \otimes (A \otimes W)) \arrow[d, "id_U\otimes(id_V\otimes\lambda_W)"] \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U \otimes (V \otimes W)
\end{tikzcd} \tag{3.55}$$

e

$$\begin{tikzcd}
((U \otimes V) \otimes A) \otimes W \arrow[r, "a_{U\otimes V,A,W}"] \arrow[d, "(\pi_{U,V}\otimes id_A)\otimes id_W"'] & (U \otimes V) \otimes (A \otimes W) \arrow[d, "\pi_{U,V}\otimes(id_A\otimes id_W)"] \\
((U \otimes_A V) \otimes A) \otimes W \arrow[r, "a_{U\otimes_A V,A,W}"'] & (U \otimes_A V) \otimes (A \otimes W).
\end{tikzcd} \tag{3.56}$$

Como $(\pi_{U,V} \otimes id_A) \otimes id_W$ é epimorfismo, visto que $\otimes$ é exato à direita em cada variável, segue a igualdade 3.52.

Lema 3.2.7. *A coleção* $a' = \{a'_{U,V,W} : (U \otimes_A V) \otimes_A W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)\}_{U,V,W \in {}_A\mathcal{C}_A}$ *é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Primeiramente mostremos que $a'_{U,V,W} : (U \otimes_A V) \otimes_A W \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$ é morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$ para quaisquer A-bimódulos U, V e W. Para isso, é necessário verificarmos a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes ((U \otimes_A V) \otimes_A W) \arrow[r, "id_A\otimes a'_{U,V,W}"] \arrow[d, "\lambda_{(U\otimes_A V)\otimes_A W}"'] & A \otimes (U \otimes_A (V \otimes_A W)) \arrow[d, "\lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}"] \\
(U \otimes_A V) \otimes_A W \arrow[r, "a'_{U,V,W}"'] & U \otimes_A (V \otimes_A W)
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
((U \otimes_A V) \otimes_A W) \otimes A \arrow[r, "a'_{U,V,W}\otimes id_A"] \arrow[d, "\rho_{(U\otimes_A V)\otimes_A W}"'] & (U \otimes_A (V \otimes_A W)) \otimes A \arrow[d, "\rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}"] \\
(U \otimes_A V) \otimes_A W \arrow[r, "a'_{U,V,W}"'] & U \otimes_A (V \otimes_A W).
\end{tikzcd}$$

Verifiquemos a comutatividade do primeiro diagrama. Temos que

$$\begin{aligned}
a'_{U,V,W} \circ \lambda_{(U\otimes_A V)\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{U\otimes_A V,W}) \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)) =& \\
\overset{(3.33)}{=}\ & a'_{U,V,W} \circ \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\lambda_{U\otimes_A V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes_A V,W} \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)) \\
\overset{(3.53)}{=}\ & \beta_{U,V,W} \circ (\lambda_{U\otimes_A V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes_A V,W} \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)) \\
\overset{(3.57)}{=}\ & \beta_{U,V,W} \circ (\lambda_{U\otimes_A V} \otimes id_W) \circ ((id_A \otimes \pi_{U,V}) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes V,W} \\
=\ & \beta_{U,V,W} \circ ((\lambda_{U\otimes_A V} \circ (id_A \otimes \pi_{U,V})) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes V,W} \\
\overset{(3.33)}{=}\ & \beta_{U,V,W} \circ ((\pi_{U,V} \circ (\lambda_U \otimes id_V) \circ a^{-1}_{A,U,V}) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes V,W} \\
=\ & \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((\lambda_U \otimes id_V) \otimes id_W) \circ (a^{-1}_{A,U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes V,W}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(3.50)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \circ ((\lambda_U \otimes id_V) \otimes id_W) \circ (a^{-1}_{A,U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes V,W} \\
&\overset{(3.58)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (\lambda_U \otimes (id_V \otimes id_W)) \circ a_{A\otimes U,V,W} \circ (a^{-1}_{A,U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,U\otimes V,W} \\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (\lambda_U \otimes id_{V\otimes W}) \circ a^{-1}_{A,U,V\otimes W} \circ (id_A \otimes a_{U,V,W}) \\
&= \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (\lambda_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a^{-1}_{A,U,V\otimes W} \circ (id_A \otimes a_{U,V,W}) \\
&= \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (\lambda_U \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ (id_{A\otimes U} \otimes \pi_{V,W}) \circ a^{-1}_{A,U,V\otimes W} \circ (id_A \otimes a_{U,V,W}) \\
&= \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (\lambda_U \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ ((id_A \otimes id_U) \otimes \pi_{V,W}) \circ a^{-1}_{A,U,V\otimes W} \circ (id_A \otimes a_{U,V,W}) \\
&\overset{(3.59)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (\lambda_U \otimes id_{V\otimes_A W}) \circ a^{-1}_{A,U,V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes (id_U \otimes \pi_{V,W})) \circ (id_A \otimes a_{U,V,W}) \\
&\overset{(3.33)}{=} \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes \pi_{U,V\otimes_A W}) \circ (id_A \otimes (id_U \otimes \pi_{V,W})) \circ (id_A \otimes a_{U,V,W}) \\
&= \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W})) \\
&\overset{(3.50)}{=} \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes (\beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W))) \\
&= \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes \beta_{U,V,W}) \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)) \\
&\overset{(3.53)}{=} \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes (a'_{U,V,W} \circ \pi_{U\otimes_A V,W})) \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)) \\
&= \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes a'_{U,V,W}) \circ (id_A \otimes \pi_{U\otimes_A V,W}) \circ (id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)),
\end{aligned}$$

em que (3.57), (3.58) e (3.59) seguem da naturalidade de a, representada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes(U\otimes V))\otimes W \arrow[r, "a_{A,U\otimes V,W}"] \arrow[d, "(id_A\otimes\pi_{U,V})\otimes id_W"'] & A\otimes((U\otimes V)\otimes W) \arrow[d, "id_A\otimes(\pi_{U,V}\otimes id_W)"] \\
(A\otimes(U\otimes_A V))\otimes W \arrow[r, "a_{A,U\otimes_A V,W}"'] & A\otimes((U\otimes_A V)\otimes W),
\end{tikzcd} \tag{3.57}$$

$$\begin{tikzcd}
((A\otimes U)\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{A\otimes U,V,W}"] \arrow[d, "(\lambda_U\otimes id_V)\otimes id_W"'] & (A\otimes U)\otimes(V\otimes W) \arrow[d, "\lambda_U\otimes(id_V\otimes id_W)"] \\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U\otimes(V\otimes W)
\end{tikzcd} \tag{3.58}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes U)\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "a_{A,U,V\otimes W}"] \arrow[d, "(id_A\otimes id_U)\otimes\pi_{V,W}"'] & A\otimes(U\otimes(V\otimes W)) \arrow[d, "id_A\otimes(id_U\otimes\pi_{V,W})"] \\
(A\otimes U)\otimes(V\otimes_A W) \arrow[r, "a_{A,U,V\otimes_A W}"'] & A\otimes(U\otimes(V\otimes_A W)).
\end{tikzcd} \tag{3.59}$$

Assim, como $id_A \otimes \pi_{U\otimes_A V,W}$ e $id_A \otimes (\pi_{U,V} \otimes id_W)$ são epimorfismos, segue que

$$a'_{U,V,W} \circ \lambda_{(U\otimes_A V)\otimes_A W} = \lambda_{U\otimes_A(V\otimes_A W)} \circ (id_A \otimes a'_{U,V,W})$$

e, portanto, o primeiro diagrama comuta.

A comutatividade do segundo diagrama é análoga. Temos que

$$
\begin{aligned}
&a'_{U,V,W}\circ\rho_{(U\otimes_A V)\otimes_A W}\circ(\pi_{U\otimes_A V,W}\otimes id_A)\circ((\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A) =\\
&\overset{(3.22)}{=} a'_{U,V,W}\circ\pi_{U\otimes_A V,W}\circ(id_{U\otimes_A V}\otimes\rho_W)\circ a_{U\otimes_A V,W,A}\circ((\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A)\\
&\overset{(3.53)}{=} \beta_{U,V,W}\circ(id_{U\otimes_A V}\otimes\rho_W)\circ a_{U\otimes_A V,W,A}\circ((\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A)\\
&\overset{(3.60)}{=} \beta_{U,V,W}\circ(id_{U\otimes_A V}\otimes\rho_W)\circ(\pi_{U,V}\otimes(id_W\otimes id_A))\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&= \beta_{U,V,W}\circ(id_{U\otimes_A V}\otimes\rho_W)\circ(\pi_{U,V}\otimes id_{W\otimes A})\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&= \beta_{U,V,W}\circ(\pi_{U,V}\otimes\rho_W)\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&= \beta_{U,V,W}\circ(\pi_{U,V}\otimes id_W)\circ(id_{U\otimes V}\otimes\rho_W)\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&\overset{(3.50)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U,V,W}\circ((id_U\otimes id_V)\otimes\rho_W)\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&\overset{(3.61)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ(id_U\otimes(id_V\otimes\rho_W))\circ a_{U,V,W\otimes A}\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes(\pi_{V,W}\circ(id_V\otimes\rho_W)))\circ a_{U,V,W\otimes A}\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&\overset{(3.22)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes(\rho_{V\otimes_A W}\circ(\pi_{V,W}\otimes id_A)\circ a^{-1}_{V,W,A}))\circ a_{U,V,W\otimes A}\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&= \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ(id_U\otimes(\pi_{V,W}\otimes id_A))\circ(id_U\otimes a^{-1}_{V,W,A})\circ a_{U,V,W\otimes A}\\
&\quad\circ a_{U\otimes V,W,A}\\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ(id_U\otimes(\pi_{V,W}\otimes id_A))\circ a_{U,V\otimes W,A}\circ(a_{U,V,W}\otimes id_A)\\
&\overset{(3.62)}{=} \pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\rho_{V\otimes_A W})\circ a_{U,V\otimes_A W,A}\circ((id_U\otimes\pi_{V,W})\otimes id_A)\circ(a_{U,V,W}\otimes id_A)\\
&\overset{(3.22)}{=} \rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}\circ(\pi_{U,V\otimes_A W}\otimes id_A)\circ((id_U\otimes\pi_{V,W})\otimes id_A)\circ(a_{U,V,W}\otimes id_A)\\
&= \rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}\circ((\pi_{U,V\otimes_A W}\circ(id_U\otimes\pi_{V,W})\circ a_{U,V,W})\otimes id_A)\\
&\overset{(3.50)}{=} \rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}\circ((\beta_{U,V,W}\circ(\pi_{U,V}\otimes id_W))\otimes id_A)\\
&= \rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}\circ(\beta_{U,V,W}\otimes id_A)\circ((\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A)\\
&\overset{(3.53)}{=} \rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}\circ((a'_{U,V,W}\circ\pi_{U\otimes_A V,W})\otimes id_A)\circ((\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A)\\
&= \rho_{U\otimes_A(V\otimes_A W)}\circ(a'_{U,V,W}\otimes id_A)\circ(\pi_{U\otimes_A V,W}\otimes id_A)\circ((\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A),
\end{aligned}
$$

em que (3.60), (3.61) e (3.62) seguem da naturalidade de a, representada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
((U\otimes V)\otimes W)\otimes A \arrow[r, "a_{U\otimes V,W,A}"] \arrow[d, "(\pi_{U,V}\otimes id_W)\otimes id_A"'] & (U\otimes V)\otimes(W\otimes A) \arrow[d, "\pi_{U,V}\otimes(id_W\otimes id_A)"] \\
((U\otimes_A V)\otimes W)\otimes A \arrow[r, "a_{U\otimes_A,W,A}"'] & (U\otimes_A V)\otimes(W\otimes A),
\end{tikzcd}
\tag{3.60}
$$

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes (W \otimes A) \arrow[r, "a_{U,V,W\otimes A}"] \arrow[d, "(id_U \otimes id_V)\otimes \rho_W"'] & U \otimes (V \otimes (W \otimes A)) \arrow[d, "id_U \otimes (id_V \otimes \rho_W)"] \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U \otimes (V \otimes W)
\end{tikzcd} \tag{3.61}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes (V \otimes W)) \otimes A \arrow[r, "a_{U,V\otimes W,A}"] \arrow[d, "(id_U \otimes \pi_{V,W})\otimes id_A"'] & U \otimes ((V \otimes W) \otimes A) \arrow[d, "id_U \otimes (\pi_{V,W} \otimes id_A)"] \\
(U \otimes (V \otimes_A W)) \otimes A \arrow[r, "a_{U,V\otimes_A W,A}"'] & U \otimes ((V \otimes_A W) \otimes A).
\end{tikzcd} \tag{3.62}$$

Assim, como $\pi_{U\otimes_A V,W} \otimes id_A$ e $(\pi_{U,V} \otimes id_W) \otimes id_A$ são epimorfismos, segue que

$$a'_{U,V,W} \circ \rho_{(U\otimes_A V)\otimes_A W} = \rho_{U\otimes_A (V\otimes_A W)} \circ (a'_{U,V,W} \otimes id_A)$$

e, portanto, o segundo diagrama comuta.

Verifiquemos agora que $a' = \{a'_{U,V,W}\}_{U,V,W \in {}_A\mathcal{C}_A}$ é uma transformação natural. Sejam $f : U \to U'$, $g : V \to V'$ e $h : W \to W'$ morfismos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Precisamos demonstrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes_A V) \otimes_A W \arrow[r, "a'_{U,V,W}"] \arrow[d, "(f\otimes_A g)\otimes_A h"'] & U \otimes_A (V \otimes_A W) \arrow[d, "f\otimes_A (g\otimes_A h)"] \\
(U' \otimes_A V') \otimes_A W' \arrow[r, "a'_{U',V',W'}"'] & U' \otimes_A (V' \otimes_A W')
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Observemos que

$$\begin{aligned}
(f \otimes_A (g \otimes_A h)) \circ a'_{U,V,W} \circ \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) &\overset{(3.53)}{=} (f \otimes_A (g \otimes_A h)) \otimes \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.50)}{=} (f \otimes_A (g \otimes_A h)) \circ \pi_{U,V\otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \\
&\overset{(3.15)}{=} \pi_{U',V'\otimes_A W'} \circ (f \otimes (g \otimes_A h)) \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \\
&= \pi_{U',V'\otimes_A W'} \circ (f \otimes ((g \otimes_A h) \circ \pi_{V,W})) \circ a_{U,V,W} \\
&\overset{(3.15)}{=} \pi_{U',V'\otimes_A W'} \circ (f \otimes (\pi_{V',W'} \circ (g \otimes h))) \circ a_{U,V,W} \\
&= \pi_{U',V'\otimes_A W'} \circ (id_{U'} \otimes \pi_{V',W'}) \circ (f \otimes (g \otimes h)) \circ a_{U,V,W} \\
&\overset{(3.63)}{=} \pi_{U',V'\otimes_A W'} \circ (id_{U'} \otimes \pi_{V',W'}) \circ a_{U',V',W'} \circ ((f \otimes g) \otimes h) \\
&\overset{(3.50)}{=} \beta_{U',V',W'} \circ (\pi_{U',V'} \otimes id_{W'}) \circ ((f \otimes g) \otimes h) \\
&\overset{(3.53)}{=} a'_{U',V',W'} \circ \pi_{U'\otimes_A V',W'} \circ (\pi_{U',V'} \otimes id_{W'}) \circ ((f \otimes g) \otimes h) \\
&= a'_{U',V',W'} \circ \pi_{U'\otimes_A V',W'} \circ ((\pi_{U',V'} \circ (f \otimes g)) \otimes h) \\
&\overset{(3.15)}{=} a'_{U',V',W'} \circ \pi_{U'\otimes_A V',W'} \circ (((f \otimes_A g) \circ \pi_{U,V}) \otimes h) \\
&= a'_{U',V',W'} \circ \pi_{U'\otimes_A V',W'} \circ ((f \otimes_A g) \otimes h) \circ (\pi_{U,V} \otimes h)
\end{aligned}$$

$$\overset{(3.15)}{=} a'_{U',V',W'} \circ ((f \otimes_A g) \otimes_A h) \circ \pi_{U \otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes h),$$

em que (3.63) segue devido à naturalidade de a, ilustrado pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "(f \otimes g) \otimes h"'] & U' \otimes (V' \otimes W') \arrow[d, "f \otimes (g \otimes h)"] \\
(U' \otimes V') \otimes W' \arrow[r, "a_{U',V',W'}"'] & U' \otimes (V' \otimes W').
\end{tikzcd} \tag{3.63}$$

Pela exatidão à direita em ambas as variáveis, $\pi_{U,V} \otimes id_W$ é epimorfismo e assim, $\pi_{U \otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W)$ também é epimorfismo. Portanto, $(f \otimes_A (g \otimes_A h)) \circ a'_{U,V,W} = a'_{U',V',W'} \circ ((f \otimes_A g) \otimes_A h)$ e isso nos diz que a' é uma transformação natural.

Para provarmos que a' é um isomorfismo natural, é necessário fazermos um raciocínio análogo ao que fizemos ao definirmos $\alpha_{U,V,W}$ e $\beta_{U,V,W}$ anteriormente.

Definimos

$$\overline{\alpha}_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes W) \to (U \otimes_A V) \otimes_A W$$

como sendo a composição

$$\overline{\alpha}_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes W) \xrightarrow{a^{-1}_{U,V,W}} (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\pi_{U,V} \otimes id_W} (U \otimes_A V) \otimes W \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\pi_{U \otimes_A V,W}} (U \otimes_A V) \otimes_A W,$$

isto é,

$$\overline{\alpha}_{U,V,W} = \pi_{U \otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W}. \tag{3.64}$$

Afirmamos que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \otimes ((V \otimes A) \otimes W) \otimes W \arrow[dr, "id_U \otimes (\rho_V \otimes id_W)"] \arrow[dd, "id_U \otimes a_{V,A,W}"'] & & \\
& U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\overline{\alpha}_{U,V,W}"] & (U \otimes_A V) \otimes_A W \\
U \otimes (V \otimes (A \otimes W)) \arrow[ur, "id_U \otimes (id_V \otimes \lambda_W)"'] & &
\end{tikzcd} \tag{3.65}$$

comuta. De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (\rho_V \otimes id_W)) &\overset{(3.64)}{=} \pi_{U \otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (\rho_V \otimes id_W)) \\
&\overset{(3.66)}{=} \pi_{U \otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((id_U \otimes \rho_V) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V \otimes A,W} \\
&= \pi_{U \otimes_A V,W} \circ ((\pi_{U,V} \circ (id_U \otimes \rho_V)) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V \otimes A,W}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.22)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ ((\rho_{U\otimes_A V} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_A) \circ a^{-1}_{U,V,A}) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V\otimes A,W} \\
&= \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\rho_{U\otimes_A V} \otimes id_W) \circ ((\pi_{U,V} \otimes id_A) \otimes id_W) \circ (a^{-1}_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\quad \circ a^{-1}_{U,V\otimes A,W} \\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ a_{U\otimes_A V,A,W} \circ ((\pi_{U,V} \otimes id_A) \otimes id_W) \\
&\quad \circ (a^{-1}_{U,V,A} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V\otimes A,W} \\
&\overset{(3.67)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ (\pi_{U,V} \otimes (id_A \otimes id_W)) \circ a_{U\otimes_A V,A,W} \\
&\quad \circ (a^{-1}_{U,V,A} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V\otimes A,W} \\
&= \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (id_{U\otimes_A V} \otimes \lambda_W) \circ (\pi_{U,V} \otimes id_{A\otimes W}) \circ a_{U\otimes_A V,A,W} \circ (a^{-1}_{U,V,A} \otimes id_W) \\
&\quad \circ a^{-1}_{U,V\otimes A,W} \\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes \lambda_W) \circ a^{-1}_{U,V,A\otimes W} \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \\
&= \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ (id_{U\otimes V} \otimes \lambda_W) \circ a^{-1}_{U,V,A\otimes W} \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \\
&= \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((id_U \otimes id_V) \otimes \lambda_W) \circ a^{-1}_{U,V,A\otimes W} \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \\
&\overset{(3.68)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (id_V \otimes \lambda_W)) \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}) \\
&\overset{(3.64)}{=} \overline{\alpha}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (id_V \otimes \lambda_W)) \circ (id_U \otimes a_{V,A,W}),
\end{aligned}
$$

em que (3.66), (3.67) e (3.68) seguem da naturalidade de a, ilustrada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
(U \otimes (V \otimes A)) \arrow[r, "a_{U,V\otimes A,W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes\rho_V)\otimes id_W"'] & U \otimes ((V \otimes A) \otimes W) \arrow[d, "id_U\otimes(\rho_V\otimes id_W)"] \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U \otimes (V \otimes W),
\end{tikzcd}
\tag{3.66}
$$

$$
\begin{tikzcd}
((U \otimes V) \otimes A) \otimes W \arrow[r, "a_{U\otimes V,A,W}"] \arrow[d, "(\pi_{U,V,}\otimes id_A)\otimes id_W"'] & (U \otimes V) \otimes (A \otimes W) \arrow[d, "\pi_{U,V}\otimes(id_A\otimes id_W)"] \\
((U \otimes_A V) \otimes A) \otimes W \arrow[r, "a_{U\otimes_A V,A,W}"'] & (U \otimes_A V) \otimes (A \otimes W)
\end{tikzcd}
\tag{3.67}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes (A \otimes W) \arrow[r, "a_{U,V,A\otimes W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes id_V)\otimes\lambda_W"'] & U \otimes (V \otimes (A \otimes W)) \arrow[d, "id_U\otimes(id_V\otimes\lambda_W)"] \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U \otimes (V \otimes W).
\end{tikzcd}
\tag{3.68}
$$

Consideremos $f = ((id_V \otimes \lambda_W) \circ a_{V,A,W}) - (\rho_V \otimes id_W)$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
U \otimes ((V \otimes A) \otimes W) \arrow[r, "id_U \otimes f"] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "U \otimes (V \otimes_A W)"] \arrow[d, "\overline{\alpha}_{U,V,W}"'] & U \otimes (V \otimes_A W) \arrow[dl, dashed, "\overline{\beta}_{U,V,W}"] \\
 & (U \otimes_A V) \otimes_A W. &
\end{tikzcd}$$

Segue, por razão análoga às já ditas acima, que existe um único morfismo $\mathcal{C}$, $\overline{\beta}_{U,V,W} : U \otimes (V \otimes_A W) \to U \otimes_A (V \otimes_A W)$ tal que $\overline{\beta} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) = \overline{\alpha}_{U,V,W}$, ou seja,

$$\overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) = \pi_{U \otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W}. \tag{3.69}$$

Considerando o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes A) \otimes (V \otimes_A W) \arrow[dd, "a_{U,A,V \otimes_A W}"'] \arrow[dr, "\rho_U \otimes id_{V \otimes_A W}"] & & \\
 & U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "\pi_{U,V \otimes_A W}"] \arrow[dd, "\overline{\beta}_{U,V,W}"] & U \otimes_A (V \otimes_A W). \arrow[ddl, dashed, "\overline{a}_{U,V,W}"] \\
U \otimes (A \otimes (V \otimes_A W)) \arrow[ur, "id_U \otimes \lambda_{V \otimes_A W}"'] & & \\
 & (U \otimes_A V) \otimes_A W &
\end{tikzcd} \tag{3.70}$$

Mostrando que

$$\overline{\beta} \circ [((id_U \otimes \lambda_{V \otimes_A W} \circ a_{U,A,V \otimes_A W}) - (\rho_U \otimes id_{V \otimes_A W})] = 0 \tag{3.71}$$

segue, por razões análogas às já ditas anteriormente, que existe um único morfismo $\overline{a}_{U,V,W} : U \otimes_A (V \otimes_A W) \to (U \otimes_A V) \otimes_A W$ tal que

$$\overline{a}_{U,V,W} \circ \pi_{U,V \otimes_A W} = \overline{\beta}_{U,V,W}. \tag{3.72}$$

Partimos para verificar (3.71). Temos

$$\begin{aligned}
\overline{\beta}_{U,V,W} \circ (\rho_U \otimes id_{V \otimes_A W}) \circ ((id_U \otimes id_A) \otimes \pi_{V,W}) &= \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (\rho_U \otimes id_{V \otimes_A W}) \circ (id_{U \otimes A} \otimes \pi_{V,W}) \\
&= \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (\rho_U \otimes \pi_{V,W}) \\
&= \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (\rho_U \otimes id_{V \otimes W})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.69)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \circ (\rho_U \otimes (id_V \otimes id_W))\\
&\overset{(3.73)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((\rho_U \otimes id_V) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U\otimes_A V,W} \circ ((\pi_{U,V} \circ (\rho_U \otimes id_V)) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{U\otimes_A V,W} \circ ((\pi_{U,V} \circ (id_U \otimes \lambda_V) \circ a_{U,A,V}) \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U\otimes A,V,W}\\
&= \pi_{U\otimes_A V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ ((id_U \otimes \lambda_V) \otimes id_W) \circ (a_{U,A,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(3.69)}{=} \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \circ ((id_U \otimes \lambda_V) \otimes id_W) \circ (a_{U,A,V} \otimes id_W)\\
&\quad \circ a^{-1}_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(3.74)}{=} \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (id_U \otimes (\lambda_V \otimes id_W)) \circ a_{U,A\otimes V,W} \circ (a_{U,A,V} \otimes id_W)\\
&\quad \circ a^{-1}_{U\otimes A,V,W}\\
&\overset{(2.1)}{=} \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ (id_U \otimes (\lambda_V \otimes id_W)) \circ (id_U \otimes a^{-1}_{A,V,W}) \circ a_{U,A,V\otimes W}\\
&= \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (\pi_{V,W} \circ (\lambda_V \otimes id_W) \circ a^{-1}_{A,V,W})) \circ a_{U,A,V\otimes W}\\
&\overset{(3.33)}{=} \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes (\lambda_{V\otimes_A W} \circ (id_A \otimes \pi_{V,W}))) \circ a_{U,A,V\otimes W}\\
&= \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \lambda_{V\otimes_A W}) \circ (id_U \otimes (id_A \otimes \pi_{V,W})) \circ a_{U,A,V\otimes W}\\
&\overset{(3.75)}{=} \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \lambda_{V\otimes_A W}) \circ a_{U,A,V\otimes_A W} \circ ((id_U \otimes id_A) \otimes \pi_{V,W}),
\end{aligned}
$$

em que (3.73), (3.74) e (3.75) seguem da naturalidade de a, representada, respectivamente, pela comutatividade dos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
((U\otimes A)\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U\otimes A,V,W}"] \arrow[d, "(\rho_U\otimes id_V)\otimes id_W"'] & (U\otimes A)\otimes (V\otimes W) \arrow[d, "\rho_U\otimes(id_V\otimes id_W)"]\\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & U\otimes (V\otimes W),
\end{tikzcd}
\tag{3.73}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(U\otimes (A\otimes V))\otimes W \arrow[r, "a_{U,A\otimes V,W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes\lambda_V)\otimes id_W"'] & U\otimes ((A\otimes V)\otimes W) \arrow[d, "id_U\otimes(\lambda_V\otimes id_W)"]\\
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"'] & (U\otimes_A V)\otimes (A\otimes W)
\end{tikzcd}
\tag{3.74}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}
(U\otimes A)\otimes (V\otimes W) \arrow[r, "a_{U,A,V\otimes W}"] \arrow[d, "(id_U\otimes id_A)\otimes\pi_{V,W}"'] & U\otimes (A\otimes (V\otimes W)) \arrow[d, "id_U\otimes(id_A\otimes\pi_{V,W})"]\\
(U\otimes A)\otimes (V\otimes_A W) \arrow[r, "a_{U,A,V\otimes_A W}"'] & U\otimes (A\otimes (V\otimes_A W)).
\end{tikzcd}
\tag{3.75}
$$

Sendo $(id_U \otimes id_A)\otimes \pi_{V,W}$ um epimorfismo, segue que

$$\overline{\beta}_{U,V,W} \circ (\rho_U \otimes id_{V\otimes_A W}) = \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \lambda_{V\otimes_A W}) \circ a_{U,A,V\otimes_A W}.$$

Finalmente, mostremos que

$$a'_{U,V,W} \circ \overline{a}_{U,V,W} = id_{U \otimes_A (V \otimes_A W)} \quad \text{e} \quad \overline{a}_{U,V,W} \circ a'_{U,V,W} = id_{(U \otimes_A V) \otimes_A W},$$

para quaisquer U, V e W objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$. De fato,

$$\begin{aligned}
a'_{U,V,W} \circ \overline{a}_{U,V,W} \circ \pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) &\overset{(3.72)}{=} a'_{U,V,W} \circ \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \\
&\overset{(3.69)}{=} a'_{U,V,W} \circ \pi_{U \otimes_A V, W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \\
&\overset{(3.53)}{=} \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \\
&\overset{(3.50)}{=} \pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \circ a^{-1}_{U,V,W} \\
&= \pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \\
&= id_{U \otimes_A (V \otimes_A W)} \circ \pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W})
\end{aligned}$$

e por ser $\pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W})$ um epimorfismo, segue que $a'_{U,V,W} \circ \overline{a}_{U,V,W} = id_{U \otimes_A (V \otimes_A W)}$.

Também,

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{U,V,W} \circ a'_{U,V,W} \circ \pi_{U \otimes_A V, W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) &\overset{(3.53)}{=} \overline{a}_{U,V,W} \circ \beta_{U,V,W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \\
&\overset{(3.50)}{=} \overline{a}_{U,V,W} \circ \pi_{U,V \otimes_A W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \\
&\overset{(3.72)}{=} \overline{\beta}_{U,V,W} \circ (id_U \otimes \pi_{V,W}) \circ a_{U,V,W} \\
&\overset{(3.69)}{=} \pi_{U \otimes_A V, W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{U,V,W} \circ a_{U,V,W} \\
&= \pi_{U \otimes_A V, W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W) \\
&= id_{(U \otimes_A V) \otimes_A W} \circ \pi_{U \otimes_A V, W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W)
\end{aligned}$$

e por $\pi_{U \otimes_A V, W} \circ (\pi_{U,V} \otimes id_W)$ ser epimorfismo, segue que $\overline{a}_{U,V,W} \circ a'_{U,V,W} = id_{(U \otimes_A V) \otimes_A W}$. □

Antes de iniciarmos o próxima lema, recordamos, conforme o Exemplo 3.1.10, que a álgebra A possui uma estrutura de A-bimódulo em $\mathcal{C}$ dada por $\lambda_A = \rho_A = m : A \otimes A \to A$, sendo portanto, a unidade $\mathbf{1}_{{}_A\mathcal{C}_A} = A$.

Agora que já determinamos o isomorfismo natural que determina a associatividade da categoria ${}_A\mathcal{C}_A$, iniciemos a construção dos isomorfismos naturais $\{l'_V : A \otimes_A V \to V\}_{V \in {}_A\mathcal{C}_A}$ e $\{r'_U : U \otimes_A A \to U\}_{U \in {}_A\mathcal{C}_A}$.

Seja V um objeto em ${}_A\mathcal{C}_A$. Como V é, particularmente, um A-módulo à esquerda em $\mathcal{C}$, sabemos que $\lambda_V \circ (m \otimes id_V) = \lambda_V \circ (id_A \otimes \lambda_V) \circ a_{A,A,V}$ devido à comutatividade do diagrama (3.3). Assim, como $\pi_{A,V}$ é o coequalizador do par $m \otimes id_V = \rho_A \otimes id_V$ e $(id_A \otimes \lambda_V) \circ a_{A,A,V}$

de morfismos em $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $l'_V : A \otimes_A V \to V$ tal que

$$l'_V \circ \pi_{A,V} = \lambda_V. \tag{3.76}$$

Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes V \arrow[r, shift left, "(id_A \otimes \lambda_V) \circ a_{A,A,V}"] \arrow[r, shift right, "m \otimes id_V"'] & A \otimes V \arrow[r, "\pi_{A,V}"] \arrow[dr, "\lambda_V"'] & A \otimes_A V \arrow[d, dashed, "l'_V"] \\
 & & V.
\end{tikzcd}$$

Lema 3.2.8. *A coleção $l' = \{l'_V : A \otimes_A V \to V\}_{V \in {}_A\mathcal{C}_A}$ é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que dado V em ${}_A\mathcal{C}_A$, l'_V é um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isto, é necessário verificar a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd}
A \otimes (A \otimes_A V) \arrow[r, "id_A \otimes l'_V"] \arrow[d, "\lambda_{A \otimes_A V}"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_V"] \\
A \otimes_A V \arrow[r, "l'_V"'] & V
\end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd}
(A \otimes_A V) \otimes A \arrow[r, "l'_V \otimes id_A"] \arrow[d, "\rho_{A \otimes_A V}"'] & V \otimes A \arrow[d, "\rho_V"] \\
A \otimes_A V \arrow[r, "l'_V"'] & V.
\end{tikzcd}$$

Provemos a comutatividade do primeiro diagrama. Temos que

$$\begin{aligned}
l'_V \circ \lambda_{A \otimes_A V} \circ (id_A \otimes \pi_{A,V}) &\overset{(3.33)}{=} l'_V \circ \pi_{A,V} \circ (\lambda_A \otimes id_V) \circ a^{-1}_{A,A,V} \\
&\overset{(3.76)}{=} \lambda_V \circ (\lambda_A \otimes id_V) \circ a^{-1}_{A,A,V} \\
&= \lambda_V \circ (m \otimes id_V) \circ a^{-1}_{A,A,V} \\
&\overset{(3.3)}{=} \lambda_V \circ (id_A \otimes \lambda_V) \\
&\overset{(3.76)}{=} \lambda_V \circ (id_A \otimes (l'_V \circ \pi_{A,V})) \\
&= \lambda_V \circ (id_A \otimes l'_V) \circ (id_A \otimes \pi_{A,V})
\end{aligned}$$

e como $id_A \otimes \pi_{A,V}$ é epimorfismo, segue que $l'_V \circ \lambda_{A \otimes_A V} = \lambda_V \circ (id_A \otimes l'_V)$, ou seja, comuta o primeiro diagrama.

Provemos a comutatividade do segundo diagrama. Temos que

$$\begin{aligned}
l'_V \circ \rho_{A \otimes_A V} \circ (\pi_{A,V} \otimes id_A) &\overset{(3.22)}{=} l'_V \circ \pi_{A,V} \circ (id_A \otimes \rho_V) \circ a_{A,V,A} \\
&\overset{(3.76)}{=} \lambda_V \circ (id_A \otimes \rho_V) \circ a_{A,V,A} \\
&\overset{(3.11)}{=} \rho_V \circ (\lambda_V \otimes id_A) \\
&\overset{(3.76)}{=} \rho_V \circ ((l'_V \circ \pi_{A,V}) \otimes id_A)
\end{aligned}$$

$$= \rho_V \circ (l'_V \otimes id_A) \circ (\pi_{A,V} \otimes id_A)$$

e como $\pi_{A,V} \otimes id_A$ é epimorfismo, segue que $l'_V \circ \rho_{A \otimes_A V} = \rho_V \circ (l'_V \otimes id_A)$, ou seja, comuta o segunda diagrama.

Seja $f : V \to W$ um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$. Precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_A V \arrow[r, "l'_V"] \arrow[d, "id_A \otimes_A f"'] & V \arrow[d, "f"] \\
A \otimes_A W \arrow[r, "l'_W"'] & W
\end{tikzcd}$$

comuta. Como

$$\begin{aligned}
f \circ l'_V \circ \pi_{A,V} &\overset{(3.76)}{=} f \circ \lambda_V \\
&\overset{(3.7)}{=} \lambda_W \circ (id_A \otimes f) \\
&\overset{(3.76)}{=} l'_W \circ \pi_{A,W} \circ (id_A \otimes f) \\
&\overset{(3.15)}{=} l'_W \circ (id_A \otimes_A f) \circ \pi_{A,V}
\end{aligned}$$

e $\pi_{A,V}$ é um epimorfismo, segue que $f \circ l'_V = l_W \circ (id_A \otimes_A f)$, ou seja, o diagrama em questão é comutativo. Portanto, l' é uma transformação natural.

Definimos $j_V : V \to A \otimes_A V$ como sendo a composição

$$j_V : V \xrightarrow{l_V^{-1}} \mathbf{1} \otimes V \xrightarrow{u \otimes id_V} A \otimes V \xrightarrow{\pi_{A,V}} A \otimes_A V,$$

isto é,

$$j_V = \pi_{A,V} \circ (u \otimes id_V) \circ l_V^{-1}. \tag{3.77}$$

Por um lado, temos que

$$l'_V \circ j_V \overset{(3.77)}{=} l'_V \circ \pi_{A,V} \circ (u \otimes id_V) \circ l_V^{-1} \overset{(3.76)}{=} \lambda_V \circ (u \otimes id_V) \circ l_V^{-1} \overset{(3.4)}{=} l_V \circ l_V^{-1} = id_V$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
j_V \circ l'_V \circ \pi_{A,V} &\overset{(3.77)}{=} \pi_{A,V} \circ (u \otimes id_V) \circ l_V^{-1} \circ l'_V \circ \pi_{A,V} \\
&\overset{(3.76)}{=} \pi_{A,V} \circ (u \otimes id_V) \circ l_V^{-1} \circ \lambda_V \\
&\overset{(3.78)}{=} \pi_{A,V} \circ (u \otimes id_V) \circ (id_{\mathbf{1}} \otimes \lambda_V) \circ l_{A \otimes V}^{-1} \\
&= \pi_{A,V} \circ (u \otimes \lambda_V) \circ l_{A \otimes V}^{-1} \\
&= \pi_{A,V} \circ (id_A \otimes \lambda_V) \circ (u \otimes id_{A \otimes V}) \circ l_{A \otimes V}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi_{A,V} \circ (id_A \otimes \lambda_V) \circ a_{A,A,V} \circ a^{-1}_{A,A,V} \circ (u \otimes (id_A \otimes id_V)) \circ l^{-1}_{A\otimes V}\\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{A,V} \circ (m \otimes id_V) \circ a^{-1}_{A,A,V} \circ (u \otimes (id_A \otimes id_V)) \circ l^{-1}_{A\otimes V}\\
&\overset{(3.79)}{=} \pi_{A,V} \circ (m \otimes id_V) \circ ((u \otimes id_A) \otimes id_V) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},A,V} \circ l^{-1}_{A\otimes V}\\
&= \pi_{A,V} \circ ((m \circ (u \otimes id_A)) \otimes id_V) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},A,V} \circ l^{-1}_{A\otimes V}\\
&\overset{(3.2)}{=} \pi_{A,V} \circ (l_A \otimes id_V) \circ a^{-1}_{\mathbf{1},A,V} \circ l^{-1}_{A\otimes V}\\
&\overset{2.1.5}{=} \pi_{A,V} \circ id_{A\otimes V}\\
&= \pi_{A,V}\\
&= id_{A\otimes_A V} \circ \pi_{A,V},
\end{aligned}
$$

cujas igualdades (3.78) e (3.79) ocorrem devido à naturalidade de l e a, respectivamente, representadas pelos digramas

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \otimes (A \otimes V) \arrow[r, "l_{A\otimes V}"] \arrow[d, "id_{\mathbf{1}}\otimes\lambda_V"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_V"] \\
\mathbf{1} \otimes V \arrow[r, "l_V"'] & V
\end{tikzcd}
\tag{3.78}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{1} \otimes A) \otimes V \arrow[r, "a_{\mathbf{1},A,V}"] \arrow[d, "(u\otimes id_A)\otimes id_V"'] & \mathbf{1} \otimes (A \otimes V) \arrow[d, "u\otimes(id_A\otimes id_V)"] \\
(A \otimes A) \otimes V \arrow[r, "a_{A,A,V}"'] & A \otimes (A \otimes V).
\end{tikzcd}
\tag{3.79}
$$

Daí, como $\pi_{A,V}$ é epimorfismo, segue que $j_V \circ l'_V = id_{A\otimes_A V}$. Portanto, l' é um isomorfismo natural. □

Seja V um objeto em ${}_A\mathcal{C}_A$. Como V é, particularmente, um A-módulo à direita em $\mathcal{C}$, sabemos que $\rho_V \circ (\rho_V \otimes id_A) = \rho_V \circ (id_V \otimes m) \circ a_{V,A,A}$ devido à comutatividade do diagrama (3.5). Assim, como $\pi_{V,A}$ é o coequalizador do par $\rho_V \otimes id_A$ e $(id_V \otimes m) \circ a_{V,A,A} = (id_V \otimes \lambda_A) \circ a_{V,A,A}$, existe um único morfismo $r'_V : V \otimes_A A \to V$ tal que

$$
r'_V \circ \pi_{V,A} = \rho_V \tag{3.80}
$$

Veja o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes (A \otimes A) \arrow[r, shift left, "\rho_V\otimes id_A"] \arrow[r, shift right, "(id_V\otimes m)\circ a_{V,A,A}"'] & V \otimes A \arrow[r, "\pi_{V,A}"] \arrow[dr, "\rho_V"'] & V \otimes_A A \arrow[d, dashed, "r'_V"] \\
& & V.
\end{tikzcd}
$$

Lema 3.2.9. *A coleção* $r' = \{r_V : V \otimes_A A \to V\}_{V \in {}_A\mathcal{C}_A}$ *é um isomorfismo natural.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que dado V em ${}_A\mathcal{C}_A$, r'_V é um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$. Para isto, é necessário verificar a comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} A \otimes (V \otimes_A A) \arrow[r, "id_A \otimes r'_V"] \arrow[d, "\lambda_{V \otimes_A A}"'] & A \otimes V \arrow[d, "\lambda_V"] \\ V \otimes_A A \arrow[r, "r'_V"'] & V \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} (V \otimes_A A) \otimes A \arrow[r, "r'_V \otimes id_A"] \arrow[d, "\rho_{V \otimes_A A}"'] & V \otimes A \arrow[d, "\rho_V"] \\ V \otimes_A A \arrow[r, "r'_V"'] & V. \end{tikzcd}$$

Provemos a comutatividade do primeiro diagrama. Temos que

$$\begin{aligned} r'_V \circ \lambda_{V \otimes_A A} \circ (id_A \otimes \pi_{V,A}) &\overset{(3.33)}{=} r'_V \circ \pi_{V,A} \circ (\lambda_V \otimes id_A) \circ a^{-1}_{A,V,A} \\ &\overset{(3.80)}{=} \rho_V \circ (\lambda_V \otimes id_A) \circ a^{-1}_{A,V,A} \\ &\overset{(3.11)}{=} \lambda_V \circ (id_A \otimes \rho_V) \\ &\overset{(3.80)}{=} \lambda_V \circ (id_A \otimes (r'_V \circ \pi_{V,A})) \\ &= \lambda_V \circ (id_A \otimes r'_V) \circ (id_A \otimes \pi_{V,A}) \end{aligned}$$

e como $id_A \otimes \pi_{V,A}$ é epimorfismo, segue que $r'_V \circ \lambda_{V \otimes_A A} = \lambda_V \circ (id_A \otimes r'_V)$, ou seja, comuta o primeiro diagrama.

Provemos a comutatividade do segundo diagrama. Temos que

$$\begin{aligned} r'_V \circ \rho_{V \otimes_A A} \circ (\pi_{V,A} \otimes id_A) &\overset{(3.22)}{=} r'_V \circ \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes \rho_A) \circ a_{V,A,A} \\ &\overset{(3.80)}{=} \rho_V \circ (id_V \otimes \rho_A) \circ a_{V,A,A} \\ &= \rho_V \circ (id_V \otimes m) \circ a_{V,A,A} \\ &\overset{(3.5)}{=} \rho_V \circ (\rho_V \otimes id_A) \\ &\overset{(3.80)}{=} \rho_V \circ ((r'_V \circ \pi_{V,A}) \otimes id_A) \\ &= \rho_V \circ (r'_V \otimes id_A) \circ (\pi_{V,A} \otimes id_A) \end{aligned}$$

e como $\pi_{V,A} \otimes id_A$ é epimorfismo, segue que $r'_V \circ \rho_{V \otimes_A A} = \rho_V \circ (r'_V \otimes id_A)$, ou seja, comuta o segunda diagrama.

Seja $f : V \to W$ um morfismo em ${}_A\mathcal{C}_A$. Precisamos mostrar que o diagrama

$$\begin{tikzcd} V \otimes_A A \arrow[r, "r'_V"] \arrow[d, "f \otimes_A id_A"'] & V \arrow[d, "f"] \\ W \otimes_A A \arrow[r, "r'_W"'] & W \end{tikzcd}$$

comuta. Como

$$\begin{aligned} f \circ r'_V \circ \pi_{V,A} &\overset{(3.80)}{=} f \circ \rho_V \\ &\overset{(3.8)}{=} \rho_W \circ (f \otimes id_A) \\ &\overset{(3.80)}{=} r'_W \circ \pi_{W,A} \circ (f \otimes id_A) \\ &\overset{(3.15)}{=} r'_W \circ (f \otimes_A id_A) \circ \pi_{V,A} \end{aligned}$$

e $\pi_{V,A}$ é epimorfismo, segue que $f \circ r'_V = r'_W \circ (f \otimes_A id_A)$, ou seja, o diagrama em questão é comutativo. Portanto, r' é uma transformação natural.

Definimos $s_V : V \to V \otimes_A A$ como sendo a composição

$$s_V : V \xrightarrow{r_V^{-1}} V \otimes \mathbf{1} \xrightarrow{id_V \otimes u} V \otimes A \xrightarrow{\pi_{V,A}} V \otimes_A A,$$

isto é,

$$s_V = \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes u) \circ r_V^{-1}. \tag{3.81}$$

Por um lado, temos que

$$r'_V \circ s_V \overset{(3.81)}{=} r'_V \circ \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes u) \circ r_V^{-1} \overset{(3.80)}{=} \rho_V \circ (id_V \otimes u) \circ r_V^{-1} \overset{(3.6)}{=} r_V \circ r_V^{-1} = id_V,$$

e, por outro,

$$\begin{aligned} s_V \circ r'_V \circ \pi_{V,A} &\overset{(3.81)}{=} \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes u) \circ r_V^{-1} \circ r'_V \circ \pi_{V,A} \\ &\overset{(3.80)}{=} \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes u) \circ r_V^{-1} \circ \rho_V \\ &\overset{(3.82)}{=} \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes u) \circ (\rho_V \otimes id_{\mathbf{1}}) \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &= \pi_{V,A} \circ (\rho_V \otimes u) \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &= \pi_{V,A} \circ (\rho_V \otimes id_A) \circ (id_{V\otimes A} \otimes u) \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &\overset{(3.14)}{=} \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes m) \circ a_{V,A,A} \circ ((id_V \otimes id_A) \otimes u) \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &\overset{(3.83)}{=} \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes m) \circ (id_V \otimes (id_A \otimes u)) \circ a_{V,A,1} \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &= \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes (m \circ (id_A \otimes u))) \circ a_{V,A,1} \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &\overset{(3.2)}{=} \pi_{V,A} \circ (id_V \otimes r_A) \circ a_{V,A,1} \circ r_{V\otimes A}^{-1} \\ &\overset{2.1.5}{=} \pi_{V,A} \circ id_{V\otimes A} \\ &= \pi_{V,A} \\ &= id_{V\otimes_A A} \circ \pi_{V,A}, \end{aligned}$$

em que (3.82) e (3.83) ocorrem devido à naturalidade de r e a, representadas pelos diagramas

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes A) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_{V\otimes A}"] \arrow[d, "\rho_V \otimes id_{\mathbf{1}}"'] & V \otimes A \arrow[d, "\rho_V"] \\
V \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "r_V"'] & V
\end{tikzcd} \tag{3.82}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes A) \otimes \mathbf{1} \arrow[r, "a_{V,A,\mathbf{1}}"] \arrow[d, "(id_V \otimes id_A)\otimes u"'] & V \otimes (A \otimes \mathbf{1}) \arrow[d, "id_V \otimes (id_A \otimes u)"] \\
(V \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{V,A,A}"'] & V \otimes (A \otimes A).
\end{tikzcd} \tag{3.83}$$

Daí, como $\pi_{V,A}$ é epimorfismo, segue que $s_V \circ r'_V = id_{V \otimes_A A}$. Portanto, r' é um isomorfismo natural. □

Finalmente, estamos em condições de enunciar e provar o resultado desejado.

Teorema 3.2.10. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal abeliana tal que o produto tensorial $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é exato à direita em cada variável. Se A é uma álgebra em $\mathcal{C}$, então $({}_A\mathcal{C}_A, \otimes_A, A, a', l', r')$ é uma categoria monoidal.*

Demonstração. Com base no que foi desenvolvido até o momento, para provar este resultado basta verificar o axioma da pentágono e o axioma do triângulo, ou seja, mostrar que os diagramas

$$\begin{tikzcd}
 & ((X \otimes_A Y) \otimes_A Z) \otimes_A W \arrow[dl, "a'_{X,Y,Z} \otimes_A id_W"'] \arrow[dr, "a'_{X \otimes_A Y, Z, W}"] & \\
(X \otimes_A (Y \otimes_A Z)) \otimes_A W \arrow[d, "a'_{X, Y \otimes_A Z, W}"'] & & (X \otimes_A Y) \otimes_A (Z \otimes_A W) \arrow[d, "a'_{X,Y,Z \otimes_A W}"'] \\
X \otimes_A ((Y \otimes_A Z) \otimes_A W) \arrow[rr, "id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}"'] & & X \otimes_A (Y \otimes_A (Z \otimes_A W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes_A A) \otimes_A V \arrow[rr, "a'_{U,A,V}"] \arrow[dr, "r'_U \otimes_A id_V"'] & & U \otimes_A (A \otimes_A V) \arrow[dl, "id_U \otimes_A l'_V"] \\
 & U \otimes_A V &
\end{tikzcd}$$

são comutativos.

Consideremos a composição

$$(X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \xrightarrow{\pi_{X,Y} \otimes id_{Z \otimes W}} (X \otimes_A Y) \otimes (Z \otimes W) \xrightarrow{a^{-1}_{X \otimes_A Y, Z, W}} ((X \otimes_A Y) \otimes Z) \otimes W$$

$$\xrightarrow{\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes id_W} ((X\otimes_A Y)\otimes_A Z)\otimes W \xrightarrow{\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W}} ((X\otimes_A Y)\otimes_A Z)\otimes_A W.$$

Sejam X, Y, Z e W objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Então

$$\begin{aligned}
&a'_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ a'_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W}\circ(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W}) = \\
&\overset{(3.53)}{=} a'_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ\beta_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&\overset{(3.50)}{=} a'_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ\pi_{X\otimes_A Y,Z\otimes_A W}\circ(id_{X\otimes_A Y}\otimes\pi_{Z,W})\circ a_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\\
&\quad\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&\overset{(3.53)}{=} \beta_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ(id_{X\otimes_A Y}\otimes\pi_{Z,W})\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&= \beta_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes\pi_{Z,W})\\
&= \beta_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes_A W})\circ(id_{X\otimes Y}\otimes\pi_{Z,W})\\
&\overset{(3.50)}{=} \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)}\circ(id_X\otimes\pi_{Y,Z\otimes_A W})\circ a_{X,Y,Z\otimes_A W}\circ((id_X\otimes id_Y)\otimes\pi_{Z,W})\\
&\overset{(3.84)}{=} \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)}\circ(id_X\otimes\pi_{Y,Z\otimes_A W})\circ(id_X\otimes(id_Y\otimes\pi_{Z,W}))\circ a_{X,Y,Z\otimes W},
\end{aligned}$$

em que (3.84) ocorre devido à naturalidade de a, ilustrada pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W) \arrow[r, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] \arrow[d, "(id_X\otimes id_Y)\circ\pi_{Z,W}"'] & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W)) \arrow[d, "id_X\otimes(id_Y\otimes\pi_{Z,W})"] \\
(X\otimes Y)\otimes(Z\otimes_A W) \arrow[r, "a_{X,Y,Z\otimes_A W}"'] & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes_A W)).
\end{tikzcd} \tag{3.84}$$

Por outro lado, temos também que

$$\begin{aligned}
&(id_X\otimes_A a'_{Y,Z,W})\circ a'_{X,Y\otimes_A Z,W}\circ(a'_{X,Y,Z}\otimes_A id_W)\circ\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W}\circ(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes id_W)\\
&\quad\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&\overset{(3.15)}{=} (id_X\otimes_A a'_{Y,Z,W})\circ a'_{X,Y\otimes_A Z,W}\circ\pi_{X\otimes_A(Y\otimes_A Z),W}\circ(a'_{X,Y,Z}\otimes id_W)\\
&\quad\circ(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&\overset{(3.53)}{=} (id_X\otimes_A a'_{Y,Z,W})\circ\beta_{X,Y\otimes_A Z,W}\circ(a'_{X,Y,Z}\otimes id_W)\circ(\pi_{X\otimes_A Y,Z}\otimes id_W)\\
&\quad\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&= (id_X\otimes_A a'_{Y,Z,W})\circ\beta_{X,Y\otimes_A Z,W}\circ((a'_{X,Y,Z}\circ\pi_{X\otimes_A Y,Z})\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\\
&\quad\circ(\pi_{X,Y}\otimes id_{Z\otimes W})\\
&\overset{(3.53)}{=} (id_X\otimes_A a'_{Y,Z,W})\circ\beta_{X,Y\otimes_A Z,W}\circ(\beta_{X,Y,Z}\otimes id_W)\circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W}\\
&\quad\circ(\pi_{X,Y}\otimes(id_Z\otimes id_W))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(3.85)}{=} (id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}) \circ \beta_{X,Y\otimes_A Z,W} \circ (\beta_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ ((\pi_{X,Y} \otimes id_Z) \otimes id_W) \\
&\quad \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&= (id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}) \circ \beta_{X,Y\otimes_A Z,W} \circ ((\beta_{X,Y,Z} \circ (\pi_{X,Y} \otimes id_Z)) \otimes id_W) \\
&\quad \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(3.50)}{=} (id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}) \circ \beta_{X,Y\otimes_A Z,W} \circ ((\pi_{X,Y\otimes_A Z} \circ (id_X \otimes \pi_{Y,Z}) \circ a_{X,Y,Z}) \otimes id_W) \\
&\quad \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&= (id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}) \circ \beta_{X,Y\otimes_A Z,W} \circ (\pi_{X,Y\otimes_A Z} \otimes id_W) \circ ((id_X \otimes \pi_{Y,Z}) \otimes id_W) \\
&\quad \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(3.50)}{=} (id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}) \circ \pi_{X,(Y\otimes_A Z)\otimes_A W} \circ (id_X \otimes \pi_{Y\otimes_A Z,W}) \circ a_{X,Y\otimes_A Z,W} \\
&\quad \circ ((id_X \otimes \pi_{Y,Z}) \otimes id_W) \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(3.86)}{=} (id_X \otimes_A a'_{Y,Z,W}) \circ \pi_{X,(Y\otimes_A Z)\otimes_A W} \circ (id_X \otimes \pi_{Y\otimes_A Z,W}) \circ (id_X \otimes (\pi_{Y,Z} \otimes id_W)) \\
&\quad \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(3.15)}{=} \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)} \circ (id_X \otimes a'_{Y,Z,W}) \circ (id_X \otimes \pi_{Y\otimes_A Z,W}) \circ (id_X \otimes (\pi_{Y,Z} \otimes id_W)) \\
&\quad \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&= \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)} \circ (id_X \otimes (a'_{Y,Z,W} \circ \pi_{Y\otimes_A Z,W} \circ (\pi_{Y,Z} \otimes id_W))) \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \\
&\quad \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(3.53)}{=} \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)} \circ (id_X \otimes (\beta_{Y,Z,W} \circ (\pi_{Y,Z} \otimes id_W))) \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \\
&\quad \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(3.50)}{=} \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)} \circ (id_X \otimes (\pi_{Y,Z\otimes_A W} \circ (id_Y \otimes \pi_{Z,W}) \circ a_{Y,Z,W})) \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \\
&\quad \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&= \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)} \circ (id_X \otimes \pi_{Y,Z\otimes_A W}) \circ (id_X \otimes (id_Y \otimes \pi_{Z,W})) \circ (id_X \otimes a_{Y,Z,W}) \\
&\quad \circ a_{X,Y\otimes Z,W} \circ (a_{X,Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes Y,Z,W} \\
&\overset{(2.1)}{=} \pi_{X,Y\otimes_A(Z\otimes_A W)} \circ (id_X \otimes \pi_{Y,Z\otimes_A W}) \circ (id_X \otimes (id_Y \otimes \pi_{Z,W})) \circ a_{X,Y,Z\otimes W},
\end{aligned}
$$

em que (3.85) e (3.86) ocorrem devido à naturalidade a, representadas pelos diagramas

$$
\begin{tikzcd}
((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[d, "(\pi_{X,Y}\otimes id_Z)\otimes id_Z"'] & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \arrow[d, "\pi_{X,Y}\otimes(id_Z\otimes id_W)"] \\
((X \otimes_A Y) \otimes Z) \otimes W \arrow[r, "a_{X\otimes_Y,Z,W}"'] & (X \otimes_A Y) \otimes (Z \otimes W)
\end{tikzcd}
\tag{3.85}
$$

e

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W \arrow[r, "a_{X,Y\otimes Z,W}"] \arrow[d, "(id_X \otimes \pi_{Y,Z}) \otimes id_W"'] & X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) \arrow[d, "id_X \otimes (\pi_{Y,Z} \otimes id_W)"] \\
(X \otimes (Y \otimes_A Z)) \otimes W \arrow[r, "a_{X,Y\otimes_A Z,W}"'] & X \otimes ((Y \otimes_A Z) \otimes W).
\end{tikzcd} \tag{3.86}$$

Como $\pi_{(X\otimes_A Y)\otimes_A Z,W} \circ (\pi_{X\otimes_A Y,Z} \otimes id_W) \circ a^{-1}_{X\otimes_A Y,Z,W} \circ (\pi_{X,Y} \otimes id_{Z\otimes W})$ é um epimorfismo, segue o axioma do pentágono em ${}_A\mathcal{C}_A$.

Sejam U e B objetos em ${}_A\mathcal{C}_A$. Verifiquemos o axioma do triângulo. Temos

$$\begin{aligned}
(id_U \otimes_A l'_V) \circ a'_{U,A,V} \circ \pi_{U\otimes_A A,V} \circ (\pi_{U,A} \otimes id_V) &\overset{(3.53)}{=} (id_U \otimes_A l'_V) \circ \beta_{U,A,V} \circ (\pi_{U,A} \otimes id_V) \\
&\overset{(3.53)}{=} (id_U \otimes_A l'_V) \circ \pi_{U,A\otimes_A V} \circ (id_U \otimes \pi_{A,V}) \circ a_{U,A,V} \\
&\overset{(3.15)}{=} \pi_{U,V} \circ (id_U \otimes l'_V) \circ (id_U \otimes \pi_{A,V}) \circ a_{U,A,V} \\
&= \pi_{U,V} \circ (id_U \otimes (l'_V \circ \pi_{A,V})) \circ a_{U,A,V} \\
&\overset{(3.76)}{=} \pi_{U,V} \circ (id_U \otimes \lambda_V) \circ a_{U,A,V} \\
&\overset{(3.14)}{=} \pi_{U,V} \circ (\rho_U \otimes id_V) \\
&\overset{(3.80)}{=} \pi_{U,V} \circ ((r'_U \circ \pi_{U,A}) \otimes id_V) \\
&= \pi_{U,V} \circ (r'_U \otimes id_V) \circ (\pi_{U,A} \otimes id_V) \\
&\overset{(3.15)}{=} (r'_U \otimes_A id_V) \circ \pi_{U\otimes_A A,V} \circ (\pi_{U,A} \otimes id_V)
\end{aligned}$$

e como $\pi_{U\otimes_A A,V} \circ (\pi_{U,A} \otimes id_V)$ é epimorfismo, segue que

$$(id_U \otimes_A l'_V) \circ a'_{U,A,V} = r'_V \otimes id_V.$$

$\square$

Apêndice

Para a construção deste apêndice utilizamos [3].

A.1 Álgebras e Coálgebras

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Por mais que a definição de álgebra na categoria $Vect_{\mathbb{K}}$ seja a mesma que é fornecida no início do Capítulo 3, a enunciamos novamente e definimos as coálgebra em $Vect_{\mathbb{K}}$.

Definição A.1.1. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma $\mathbb{K}$-álgebra é uma tripla (A, m, u) em que A é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $m : A \otimes A \to A$ e $u : \mathbb{K} \to A$ são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$, tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd} \tag{A.1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \otimes A \arrow[r, "u \otimes id_A"] \arrow[dr, "\alpha"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "id_A \otimes u"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd} \tag{A.2}$$

comutam.

Tendo em vista a correspondência existentes entre as definições de álgebra com e sem diagramas, vamos escrever $m(a \otimes a') = aa'$, para quaisquer $a, a' \in A$. Desta forma, a comutatividade do primeiro diagrama nos diz que

$$(m \circ (id_A \otimes m))(a \otimes b \otimes c) = a(bc) = (ab)c = (m \circ (m \otimes id_A))(a \otimes b \otimes c).$$

A comutatividade do segundo e do terceiro diagrama nos dizem, respectivamente, que

$$a = id_A(a) = (m \circ (u \otimes id_A) \circ \alpha^{-1})(a) = m(u(1_{\mathbb{K}}) \otimes a) = u(1_{\mathbb{K}})a$$

e

$$a = id_A(a) = (m \circ (id_A \otimes u) \circ (\alpha')^{-1})(a) = m(a \otimes u(1_{\mathbb{K}})) = au(1_{\mathbb{K}}).$$

Logo, $u(1_{\mathbb{K}})a = a = au(1_{\mathbb{K}})$ e portanto, $u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A$.

O leitor pode questionar-se sobre a ausência dos morfismos responsáveis pela associatividade da categoria monoidal $Vect_{\mathbb{K}}$ na definição acima. Estas associatividades podem ser omitidas pelo fato de $Vect_{\mathbb{K}}$ ser uma categoria *estrita*, ou seja, uma categoria monoidal em que, para quaisquer objetos X, Y e Z, vale que $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$ e $\mathbf{1} \otimes X = X = X \otimes \mathbf{1}$. Neste caso, o morfismo $a_{X,Y,Z}$ é a identidade e r_X e l_Y são os isomorfismos canônicos.

No Exemplo 3.1.14, optamos por manter os morfismos $a_{H,H,V\otimes W}$, $l_{V\otimes W}$ e $r_{V\otimes W}$ para que o exemplo seja compatível com a definição mais geral de A-módulos em uma categoria monoidal qualquer, dada no início da Capítulo 3.

Definição A.1.2. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma coálgebra é uma tripla (C, Δ, ε) em que C é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ são morfismos de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, $\otimes = \otimes_{\mathbb{K}}$, tais que os diagramas*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "id_C \otimes \Delta"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\Delta \otimes id_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{A.3}$$

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[rr, "\varepsilon \otimes id_C"] & & \mathbb{K} \otimes C \arrow[dl, "\beta"] \\ & C \arrow[ul, "\Delta"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[rr, "id_C \otimes \varepsilon"] & & C \otimes \mathbb{K} \arrow[dl, "\beta'"] \\ & C \arrow[ul, "\Delta"] & \end{tikzcd} \tag{A.4}$$

comutam.

A.2 Notação de Sweedler

Dado $c \in C$, podemos observar que

$$((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) = \overbrace{(id_C \otimes \Delta)}^{\mathbb{K}-\text{linear}} \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \otimes c_i' \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} (id_C \otimes \Delta)(c_i \otimes c_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \Delta(c_i') \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} d_{ij} \otimes d_{ij}' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_i \otimes (d_{ij} \otimes d_{ij}')
\end{aligned}
$$

e portanto, a presença de apenas dois $\Delta' s$ no cálculo provocou a existência de somatório duplo. O problema da alta quantidade de índices surge ao fazermos sucessivos cálculos com o Δ que ocorre na prática e será vista aqui. Para sanar esse problema de termos uma notação "carregada" e "ilegível" é utilizada uma notação muito útil e conhecida como a *notação de Sweedler*, pode ser encontada mais detalhadamente em [3].

Definimos recorrentemente a sequência de funções $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ como

$$\Delta_1 = \Delta : C \to C \otimes C \quad \text{e} \quad \Delta_n : C \to \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{(n+1\text{vezes})}.$$

Para $n \geq 1$, a forma recursiva é definida por

$$\Delta_n = (\Delta \otimes id^{n-1}) \circ \Delta_{n-1} \quad \text{em que} \quad id^{n-1} = \underbrace{id_C \otimes \cdots \otimes id_C}_{n-1\text{vezes}}.$$

Em particular $\Delta_2 = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$, em que $\Delta_2 : C \to C \otimes C \otimes C$.

Conforme mostra a proposição seguinte, a qual enunciaremos sem provar, a fórmula recursiva dada acima pode ser desenvolvida de várias formas.

Proposição A.2.1. ([3], Proposition 1.1.7) *Seja (C, Δ, ε) uma coálgebra. Então, para todo $n \geq 2$ e todo $p \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, vale a igualdade*

$$\Delta_n = (id^p \otimes \Delta \otimes id^{n-1-p}) \circ \Delta_{n-1}.$$

Notemos que no caso $n = 2$, $(id_C \otimes \Delta) \circ \Delta = \Delta_2 = (\Delta \otimes id_C) \circ \Delta$ e isso é exatamente a comutatividade do diagrama (A.3).

Seja $c \in C$, denotamos

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

Em alguns casos, além de suprimir os índices, é também omitido o símbolo de somatório, ficando $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$. Entretanto, neste trabalho, manteremos o símbolo de somatório.

No caso qualquer em que $n \geq 1$, escrevemos

$$\Delta_n(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes \cdots \otimes c_{n+1}.$$

Tendo mente o discutido acima, como

$$\begin{aligned}
((id_C \otimes \Delta) \circ \Delta)(c) &= (id_C \otimes \Delta)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) \\
&= \sum c_1 \otimes \Delta(c_2) \\
&= \sum c_1 \otimes \left(\sum c_{2_1} \otimes c_{2_2}\right) \\
&= \sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((\Delta \otimes id_C) \circ \Delta)(c) &= (\Delta \otimes id_C)\left(\sum c_1 \otimes c_2\right) \\
&= \sum \Delta(c_1) \otimes c_2 \\
&= \sum \left(\sum c_{1_1} \otimes c_{1_2}\right) \otimes c_2 \\
&= \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2,
\end{aligned}$$

segue da comutatividade do diagrama (A.3) que

$$\sum c_1 \otimes c_{2_1} \otimes c_{2_2} = \sum c_{1_1} \otimes c_{1_2} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3. \tag{A.5}$$

Notemos também que pela comutatividade do primeiro diagrama apresentado em (A.4), temos que $(id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \beta^{-1}$. Compondo β à esquerda, obtemos

$$\beta \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \beta \circ \beta^{-1} = id_C.$$

Assim, para todo $c \in C$, temos

$$\begin{aligned}
c = id_C(c) &= (\beta \circ (id_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta)(c) \\
&= (\beta \circ (id_C \otimes \varepsilon))(\sum c_1 \otimes c_2) \\
&= \beta(\sum c_1 \otimes \varepsilon(c_2)) \\
&= \sum \beta(c_1 \otimes \varepsilon(c_2)) \\
&= \sum c_1 \varepsilon(c_2).
\end{aligned}$$

Logo, $c = \sum \varepsilon(c_2) c_1$. Comutando o segundo diagrama em (A.4), temos analogamente que $c = \sum \varepsilon(c_1)c_2$. A propriedade que

$$\sum \varepsilon(c_2)c_1 = c = \sum \varepsilon(c_1)c_2 \tag{A.6}$$

chama-se *propriedade da counidade.*

Agora fornecemos as definições de morfismos de álgebras e de coálgebras. Apenas por curiosidade, com as definições de morfismos de álgebras e coálgebras estabelecidos, conseguimos definir as categorias $Alg_{\mathbb{K}}$, cujos objetos são $\mathbb{K}$-álgebras e os morfismos são morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras, e $Cog_{\mathbb{K}}$, cujos objetos são as $\mathbb{K}$-coálgebras e os morfismos são morfismos de $\mathbb{K}$-coálgebras.

Definição A.2.2. *Sejam (A, m_A, u_A) e (B, m_B, u_B) duas $\mathbb{K}$-álgebras. Um morfismo $f : A \to B$ de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, diz-se um morfismo de $\mathbb{K}$-álgebras se os diagramas abaixo comutam*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f\otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \mathbb{K}. \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

As comutatividades acima nos dizem que, para $a, a' \in A$,

$$\begin{aligned} (f \circ m_A)(a \otimes a') &= f(m_A(a \otimes a')) \\ &= f(aa') \\ &= f(a)f(a') \\ &= m_B(f(a) \otimes f(a')) \\ &= (m_B \circ (f \otimes f))(a \otimes a') \end{aligned}$$

e $f(u_A(1_{\mathbb{K}})) = f(1_A) = 1_B = u_B(1_{\mathbb{K}})$.

Definição A.2.3. *Sejam $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ e $(D, \Delta_C, \varepsilon_C)$ duas $\mathbb{K}$-coálgebras. Um morfismo $f : C \to D$ de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais diz-se um morfismo de $\mathbb{K}$-coálgebras se os diagramas comutam*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & \mathbb{K}. & \end{tikzcd}$$

As comutatividades acima nos dizem que, para todo $c \in C$,

$$\sum f(c)_1 \otimes f(c)_2 = \Delta_D(f(c))$$

$$
\begin{aligned}
&= (f \otimes f)(\Delta_C(c)) \\
&= (f \otimes f)(\textstyle\sum c_1 \otimes c_2) \\
&= \textstyle\sum f(c_1) \otimes f(c_2)
\end{aligned}
$$

e $\varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c)$.

A.3 Biálgebras

Definição A.3.1. *Um $\mathbb{K}$-espaço vetorial H que possua uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra (H, m, u) e uma estrutura de $\mathbb{K}$-coálgebra (H, Δ, ε) tais que Δ e ε são morfismos de álgebras é dito uma $\mathbb{K}$-biálgebra.*

Antes da observação que vem a seguir, chamamos atenção para o morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais $T : B \otimes A \to A \otimes B$ é tal que $T(b \otimes a) = a \otimes b$ para todo $a \in A$ e $b \in B$. Este morfismo, o chamado *twist*, além de figurar na observação à seguir também está presente no Exemplo 3.1.14.

Observação A.3.2. Na definição acima, Δ e ε são morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras se, e somente se, m e u são morfismos de $\mathbb{K}$-coálgebras.

De fato, os quatro diagramas oriundos do fato de Δ e ε serem morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras são

$$
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dd, "m_H"'] & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "id_H\otimes T\otimes id_H"'] \arrow[dd, bend left=60, "m_{H\otimes H}"] \\
(1) & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "m_H\otimes m_H"'] \\
H \arrow[r, "\Delta"'] & H \otimes H,
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \\
(2) & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[u, "u\otimes u"'] \\
\mathbb{K} \arrow[uu, "u"] \arrow[r, "id_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K}, \arrow[u, "\psi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "m_H"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\phi=m_{\mathbb{K}}"] \\
H \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}
$$

e

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "u"'] & (4) & \mathbb{K} \\
& \mathbb{K}. \arrow[ur, "id_{\mathbb{K}}=u_{\mathbb{K}}"'] &
\end{tikzcd}
$$

No diagrama (1) apresentado, o morfismo $T : B \otimes A \to A \otimes B$ é o *twist*, mas agora para $A = B = H$. Veja a composição abaixo

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "id_A \otimes T \otimes id_B"] \arrow[rr, bend left, "m_{A\otimes B}"] & A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[r, "m_A \otimes m_B"] & A \otimes B.
\end{tikzcd}$$

Os quatro diagramas acima que nos dão que Δ e ε são morfismos de álgebras são os mesmos para que m e u sejam morfismos de coálgebras e reciprocamente. De fato, os diagramas

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[dd, bend right=60, "\Delta_{H\otimes H}"'] & H \arrow[dd, "\Delta"] \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[d, "id_H \otimes T \otimes id_H"] \arrow[r, phantom, "(5)"] & {} \\
H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[r, "m_H \otimes m_H"'] & H \otimes H,
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & H \arrow[dd, "\varepsilon"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[d, "\phi"'] \arrow[r, phantom, "(6)"] & {} \\
\mathbb{K} \arrow[r, "id_{\mathbb{K}}"'] & \mathbb{K},
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\psi = \Delta_{\mathbb{K}}"'] \arrow[dr, phantom, "(7)"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\
\mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "u \otimes u"'] & H \otimes H
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{K}} = \varepsilon_{\mathbb{K}}"'] & (8) & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\
& \mathbb{K}, &
\end{tikzcd}$$

em que T é o morfismo *twist*, também considerando $A = B = H$, são obtidos diretamente dos quatro anteriors e vice-versa: (1) $\Leftrightarrow$ (5), (2) $\Leftrightarrow$ (7), (3) $\Leftrightarrow$ (6) e (4) $\Leftrightarrow$ (8).

Observação A.3.3. Uma consequência importante que segue do fato de Δ e ε serem morfismos de $\mathbb{K}$-álgebras é que, dados $x, y \in H$, temos

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = (\sum x_1 \otimes x_2)(\sum y_1 \otimes y_2) = \sum\sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2$$

e

$$\Delta(xy) = \sum (xy)_1 \otimes (xy)_2,$$

ou seja

$$\sum\sum x_1 y_1 \otimes x_2 y_2 = \sum (xy)_1 \otimes (xy)_2. \tag{A.7}$$

Além disso, $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, $\varepsilon(xy) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$ e $\varepsilon(1_H) = 1_{\mathbb{K}}$.

Referências Bibliográficas

[1] AWODEY, S. **Category Theory**. Oxford. 2006.

[2] BORCEUX, F. **Handbook of Categorical Algebra:Basic Category Theory**. Cambridge University Press. 1994.

[3] DĂSCĂLESCU, S. et al. **Hopf Algebras: An Introduction**. Marcel Dekker. 2001.

[4] EILENBERG, S. MACLANE, S. **General Theory of Natural Equivalences**. American Mathematical Society. 1945.

[5] ETINGOF, P. et al. **Tensor Categories**. American Mathematical Society. 2015.

[6] ETINGOF, P. et al.**Introduction to Representation Theory**. American Mathematical Society. 2010.

[7] GRAY, J. W. **Formal Category Theory**. Springer-Verlag. 1974.

[8] HUNGERFORD, T. W. **Algebra**. Springer-Verlag. 2000.

[9] KOWALSKI, P. **Homological Algebra**. Notas de aula. 2015. Disponível em: <http://www.math.uni.wroc.pl/~pkowa/mojeprace/alghomobilgi.pdf>. Acesso em 06 de agosto de 2021.

[10] MAC LANE, S. **Categories for the Working Mathematician**. Springer. 1997.

[11] MAC LANE, S. **Natural associativity and commutativity**. Rice Univ. Studies.1963.

[12] MOMBELLI, J. M. **Una Introdución a las categorías tensoriales y sus representaciones**. Notas de aula. Disponível em: <http://www.famaf.unc.edu.ar/~mombelli/categorias-tensoriales3.pdf>. Acesso em 2 de maio de 2021.

[13] OSTRIK, V. **Module categories, Weak Hopf Algebras and Modular invariants**. Transform. Groups. 2003.

[14] PINTER, S. **Sobre equivariantização de categorias módulo e seus objetos simples**. Tese (Doutorado). UFSC. 2017.

[15] PUHL, E. R. **A adjunção (L_Y, F_Y): um exemplo não trivial**. Dissertação (Mestrado). UFSC. 2019.

[16] SCHAUENBURG, P. **The monoidal center construction and bimodules**. J. Pure Appl, 2001. Disponível em: <https://core.ac.uk/download/pdf/82431435.pdf>. Acesso em 04 de julho de 2021.