EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM GEOMETRIA

DOUTORADO MTM/UFSC 2023/1

Questão 1. Seja M variedade C^∞ de dimensão m em $\mathbb{R}^n$, $(n > m)$.

(i) Seja $p \in M$. Faça a construção do espaço tangente T_pM e do espaço cotangente (dual do espaço tangente) T_pM^*.

(ii) Faça a construção do fibrado tangente TM e do fibrado cotangente TM^*.

(iii) O que é uma seção do fibrado tangente? E do fibrado cotangente?

Questão 2. Seja M variedade C^∞ de dimensão m. Denote $\Omega^k(M)$ o módulo das $k-$formas diferenciais em M, $k \geq 0$.

(i) Dê a definição da derivada exterior $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ e mostre que

- se $\omega \in \Omega^k(M), \eta \in \Omega^l(M)$ então $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.
- $d(d\omega) = 0$.

(ii) Faça a construção do grupo de cohomologia de de Rham $H^p_{dR}(M)$, $p \geq 0$.

(iii) Calcule $H^0_{dR}(M)$.

Questão 3. Seja D a conexão canônica em $\mathbb{R}^2$ e L o tensor 2-covariante 1-contravariante representado pela aplicação bilinear

$$L : \chi(\mathbb{R}^2) \times \chi(\mathbb{R}^2) \to \chi(\mathbb{R}^2),$$

sobre o espaço dos campos vetoriais $\chi(\mathbb{R}^2)$ em $\mathbb{R}^2$, cuja componentes são dadas por $L^1_{11} = 2x$, $L^2_{12} = xy$ e todas as outras nulas.

a) Verifique que $\nabla := D + L$ é uma conexão;

b) Calcule os coeficiente de Christoffel de ∇;

c) Calcular $\nabla_X Y$ onde $X = x\partial_x$ e $Y = y^2\partial_x - x\partial_y$.

Questão 4. Sejam G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie associada. Considere H um subgrupo (não necessariamente fechado) de G. Definimos

$$Lie(H) := \{u \in TG_{\mathbf{1}_G} | \exists \gamma : \mathbb{R} \to \cancel{G}\, H \text{ de classe } C^1, \gamma(0) = \mathbf{1}_G, \gamma'(0) = u\}$$

a) Prove que $Lie(H)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$;

b) Prove que $Lie(H)$ é uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$;

c) Prove que se H é normal em G, então $Lie(H)$ é um ideal de $\mathfrak{g}$;

d) Reciprocamente, seja $\mathfrak{h}$ uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Prove que existe um subgrupo H de G de modo que $\mathfrak{h} = Lie(H)$.