Luiz Fernando Bossa

Grupoides, semigrupos inversos e suas C*-álgebras

Florianópolis, SC
2019

Luiz Fernando Bossa

Grupoides, semigrupos inversos e suas C*-álgebras

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade Federal de Santa Catarina, para obtenção de grau de Mestre em Matemática, com área de concentração em Análise.

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

Orientador: Dr. Gilles Golçalves de Castro

Florianópolis, SC
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Bossa, Luiz Fernando
Grupoides, semigrupos inversos e suas C* álgebras / Luiz Fernando Bossa ; orientador, Gilles Gonçalves de Castro, 2019.
94 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada, Florianópolis, 2019.

Inclui referências.

1. Matemática Pura e Aplicada. 2. Grupoides étale. 3. C*-álgebras. 4. Ações de semigrupos inversos. 5. Grupoide de germes. I. de Castro, Gilles Gonçalves. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada. III. Título.

Luiz Fernando Bossa

Grupoides, semigrupos inversos e suas C*-álgebras

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de "Mestre" e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós Graduação em Matemática Pura e Aplicada

Florianópolis, fevereiro de 2019

Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador

Dr. Gilles Golçalves de Castro
Orientador

Prof. Dr. Marcelo Sobottka
Coordenador do Programa Pós-Graduação
em Matemática Pura e Aplicada
Portaria nº 1099/2018/GR - UFSC

Dr. Alexandre Tavares Baraviera
UFRGS
(videoconferência)

Dr. Fernando de Lacerda Mortari
UFSC

Giuliano Boava

Dr. Giuliano Boava
UFSC

Agradecimentos

Agradeço a minha família por todo o suporte e apoio. Se pude chegar tão longe é porque tive o suporte de vocês.

Aos professores, sou grato pelos ensinamentos dentro e fora do ambiente acadêmico. Em especial ao meu orientador Gilles, por todos esses anos de colaboração.

Obrigado à banca pela leitura crítica do material aqui presente.

Aos amigos, por compartilharem alegrias e principalmente por estarem presentes nos momentos em que a vida não é tão doce. Natã e Paula, obrigado por me salvarem tantas vezes durante esse mestrado. Lucas e Cesar, obrigado por todos esse anos de parceria.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Um grupoide é uma generalização de um grupo, no qual a multiplicação não é necessariamente definida para qualquer par de elementos. Como no caso dos grupos, podemos construir uma C*-álgebra a partir de um grupoide. Por razões técnicas, focamos em grupoides *étale*. Uma ação de um semigrupo inverso em um espaço topológico dá origem a um grupoide, chamado de grupoide de germes. Mostramos que esse grupoide possui uma propriedade universal interessante.

Palavras-chave: Grupoides étale. C*-álgebras. Ações de semigrupos inversos. Grupoide de germes.

Abstract

A groupoid is a generalization of a group, where the multiplication is not necessarily defined for all pair of elements. As with groups, we can construct a C*-algebra from a groupoid. Due to technical reasons, we focus on the construction of the full and reduced C*-algebras from a *étale* groupoid. An inverse semigroup acting on a topological space gives rise to a groupoid, named groupoid of germs. We show that this groupoid has an interesting universal property.

Keywords: Étale groupoids. C*-algebras. Inverse semigroups actions. Groupoid of germs.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais, incluindo o 0
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais, excluindo o 0
$\mathbb{1}_A$	Função característica do conjunto A
Id_A	Operador identidade num espaço vetorial A
$\mathrm{supp}(f)$	Suporte da função f, por definição $\overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$
$C(X)$	Conjunto das funções $f : X \to \mathbb{C}$ contínuas
$C_c(X)$	Conjunto das funções contínuas $f : X \to \mathbb{C}$ com suporte compacto
$\mathtt{s}$	Aplicação *source*
$\mathtt{r}$	Aplicação *range*
$\mathcal{G}_x$	$\mathtt{s}^{-1}(x)$
$\mathcal{G}^x$	$\mathtt{r}^{-1}(x)$

Sumário

Introdução

Grupoides são uma generalização de grupos. Num grupoide temos uma multiplicação e uma inversão, porém a multiplicação não está definida para todo par de elementos. Por esse motivo, não temos uma única unidade multiplicativa, mas sim um conjunto de unidades. Assim como em grupos, quando o grupoide é equipado com uma topologia de modo que a multiplicação e a inversão sejam operações contínuas temos um grupoide topológico. Essa teoria é vista no Capítulo 1, que, assim como o Capítulo 3, tem como principal referência o artigo [Sims 2017].

Com essa estrutura, podemos associar uma C*-álgebra a um grupoide. Por questões técnicas, preferimos focar nos chamados grupóides *étale*, pois esses possuem propriedades análogas aos grupos discretos. Construímos a C*-álgebra cheia e a reduzida no Capítulo 3.

Em semigrupos inversos, temos uma operação de multiplicação e uma de involução. Esta última exerce um papel semelhante à inversão. As definições básicas e o maquinário algébrico envolvendo semigrupos inversos usados nesse trabalho são desenvolvidos no Capítulo 2, cujas principais referências são [Paterson 1999] e [Lawson 1998].

Um semigrupo agindo num espaço topológico, dá origem a um grupoide, chamado de grupoide de germes. Assim como em C*-sistemas dinâmicos, definimos a noção de uma representação covariante para esse grupoide de germes. Provamos uma propriedade universal para essas representações covariantes. Por fim mostramos como a álgebra de Cuntz pode ser vista como a C*-

álgebra de um grupoide de germes. Essa parte corresponde ao Capítulo 4, baseado no artigo [Exel 2008].

Para uma boa compreensão do material contido nessa dissertação, espera-se que o leitor tenha conhecimentos básicos da teoria de C*-álgebras.

1 Grupoides

Neste capítulo apresentamos a teoria inicial sobre grupoides, apresentando uma gama de exemplos. Ao atribuirmos uma topologia ao grupoide de maneira que suas operações sejam contínuas, obtemos um grupoide topologico. Focamos principalmente no caso dos chamados grupoides *étale*, que são casos particulares desses grupoides topologicos.

1.1 Definições e exemplos

Começamos definindo nosso principal objeto de estudo desse capítulo.

Definição 1.1.1. Um *grupoide* é um conjunto $\mathcal{G}$ juntamente com um subconjunto $\mathcal{G}^2 \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$, uma multiplicação

$$(g, h) \in \mathcal{G}^2 \mapsto gh \in \mathcal{G}$$

e uma inversão

$$g \in \mathcal{G} \mapsto g^{-1} \in \mathcal{G}$$

que satisfazem as seguintes condições

(1) para qualquer $g \in \mathcal{G}$, $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$;

(2) se $(f, g), (g, h) \in \mathcal{G}^2$ então $(fg, h), (f, gh) \in \mathcal{G}^2$ e $(fg)h = f(gh)$;

(3) para qualquer $f \in \mathcal{G}$ vale que $(f, f^{-1}) \in \mathcal{G}^2$ e se $(f, g) \in \mathcal{G}^2$ então vale que $f^{-1}(fg) = g$ e $(fg)g^{-1} = f$.

A propriedade (2) garante que, quando bem definida, a multiplicação é associativa e a propriedade (3) garante que elementos da forma $g^{-1}g$ ou gg^{-1} podem ser vistos como unidades. Adiante no texto, ao usar essa última propriedade, dizemos que estamos cancelando a unidade.

Definição 1.1.2. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide, defina o *espaço das unidades* como sendo o conjunto

$$\mathcal{G}^0 := \{g^{-1}g \ : g \in \mathcal{G}\}$$

e chame seus elemento de *unidades*.

Note que, como $(g^{-1})^{-1} = g$ para qualquer elemento g de um grupoide, vale a igualdade

$$\mathcal{G}^0 = \{gg^{-1} \ : g \in \mathcal{G}\}.$$

Definição 1.1.3. Defina as funções *range* e *source*, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathtt{r} : \mathcal{G} &\to \mathcal{G}^0 \\ g &\mapsto gg^{-1} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathtt{s} : \mathcal{G} &\to \mathcal{G}^0 \\ g &\mapsto g^{-1}g. \end{aligned}$$

Observação 1.1.4. Note que para qualquer elemento g de um grupoide, $\mathtt{r}(g) = \mathtt{s}(g^{-1})$ e $\mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(g^{-1})$. Sendo $\mathtt{i}$ a função inversão, temos a igualdade $\mathtt{r} = \mathtt{s} \circ \mathtt{i}$ e $\mathtt{s} = \mathtt{r} \circ \mathtt{i}$.

Lema 1.1.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide.*

(1) *Para qualquer $g \in \mathcal{G}$, $(\mathtt{r}(g), g), (g, \mathtt{s}(g)) \in \mathcal{G}^2$ e*

$$\mathtt{r}(g)g = g = g\mathtt{s}(g).$$

(2) *Se $g, h \in \mathcal{G}$, então $(g, h) \in \mathcal{G}^2$ se e só se $\mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(h)$.*

(3) *Se $f, g, h \in \mathcal{G}$ e $(f, g), (fg, h) \in \mathcal{G}^2$ então $(g, h) \in \mathcal{G}^2$. Da mesma forma, se $(f, gh), (g, h) \in \mathcal{G}^2$ então $(f, g) \in \mathcal{G}^2$.*

(4) *Se $g, h \in \mathcal{G}$ e $(g, h) \in \mathcal{G}^2$, então $(h^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{G}^2$ e*

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}.$$

(5) *Se* $g, h \in \mathcal{G}$ *e* $(g, h) \in \mathcal{G}^2$, *então*

$$\mathtt{r}(gh) = \mathtt{r}(g) \quad e \quad \mathtt{s}(gh) = \mathtt{s}(h).$$

(6) *Se* $(g, h), (f, h) \in \mathcal{G}^2$ *e* $gh = fh$ *então* $g = f$. *Da mesma forma, se* $(h, g), (h, f) \in \mathcal{G}^2$ *e* $hg = hf$ *então* $f = g$.

(7) *Se* $g \in \mathcal{G}^0$,

$$g^{-1} = g = \mathtt{r}(g) = \mathtt{s}(g).$$

Demonstração.

(1) Usando a Definição 1.1.1, o item (3) garante que (g^{-1}, g), $(g, g^{-1}) \in \mathcal{G}^2$, então pelo item (2) temos que $(gg^{-1}, g), (g, g^{-1}g) \in \mathcal{G}^2$, isto é, $(\mathtt{r}(g), g), (g, \mathtt{s}(g)) \in \mathcal{G}^2$. Agora, novamente usando a propriedade do item (3), obtemos

$$gg^{-1}g = g$$

que, agrupando de maneira adequada, prova a identidade desejada.

(2) ($\Rightarrow$) Se $(g, h) \in \mathcal{G}^2$, usando a unidade hh^{-1}, temos

$$\mathtt{s}(g) = g^{-1}g = g^{-1}(ghh^{-1}) = (g^{-1}gh)h^{-1} = hh^{-1} = \mathtt{r}(h).$$

($\Leftarrow$) Pelo item (1) provado anteriormente, sabemos que $(g, \mathtt{s}(g))$, $(\mathtt{r}(h), h) \in \mathcal{G}^2$. Se $\mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(h)$, temos então que $(g, \mathtt{r}(h))$, $(\mathtt{r}(h), h) \in \mathcal{G}^2$, de modo que $(g, \mathtt{r}(h)h) = (g, h) \in \mathcal{G}^2$.

(3) Pela definição de grupoide, $(f^{-1}, f) \in \mathcal{G}^2$. Juntando com $(f, g) \in \mathcal{G}^2$, temos que $(f^{-1}, fg) \in \mathcal{G}^2$. Agora juntando essa última pertinência com $(fg, h) \in \mathcal{G}^2$, obtemos $(f^{-1}fg, h) = (g, h) \in \mathcal{G}^2$. O outro caso é análogo.

(4) Pelo item (2) provado anteriormente, $(g, h) \in \mathcal{G}^2$ é equivalente a $\mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(h)$ o que implica pela Observação 1.1.4 que $\mathtt{r}(g^{-1}) = \mathtt{s}(h^{-1})$, ou seja, $(h^{-1}, g^{-1}) \in \mathcal{G}^2$. Além disso, multiplicando gh por h^{-1} e cancelando a unidade, temos $ghh^{-1} = g$.

Multiplicando à direita por g^{-1}, obtemos

$$ghh^{-1}g^{-1} = gg^{-1}. \tag{$*$}$$

Como sabemos que $((gh)^{-1}, gh) \in \mathcal{G}^2$, podemos multiplicar a equação $(*)$ a esquerda por $(gh)^{-1}$ e obtemos

$$(gh)^{-1}ghh^{-1}g^{-1} = (gh)^{-1}gg^{-1}. \tag{$**$}$$

Note então que cancelando a unidade $(gh)^{-1}gh$ do lado esquerdo de $(**)$ obtemos $h^{-1}g^{-1}$, e cancelando a unidade gg^{-1} do lado direito obtemos $(gh)^{-1}$, provando a igualdade desejada.

(5) Usamos a identidade que acabamos de provar em (4) e o cancelamento da unidade para obter

$$\begin{aligned}\mathtt{r}(gh) &= gh(gh)^{-1} = ghh^{-1}g^{-1} = gg^{-1} = \mathtt{r}(g),\\ \mathtt{s}(gh) &= (gh)^{-1}gh = h^{-1}g^{-1}gh = h^{-1}h = \mathtt{s}(h).\end{aligned}$$

(6) Note que, pela propriedade (3) da definição de grupoide, $g = ghh^{-1}$ e $f = fhh^{-1}$. Por hipótese, temos $gh = fh$. Multiplicando essa igualdade à esquerda por h^{-1} obtemos

$$ghh^{-1} = fhh^{-1}.$$

Segue da primeira observação desse parágrafo que $g = f$. Análogo para o caso $hg = hf$.

(7) Se $g \in \mathcal{G}^0$, então $g = h^{-1}h$ para algum $h \in \mathcal{G}$. Assim, pelo item (4) provado anteriormente,

$$g^{-1} = (h^{-1}h)^{-1} = h^{-1}(h^{-1})^{-1} = h^{-1}h = g.$$

Finalmente,

$$\mathtt{s}(g) = \mathtt{s}(h^{-1}h) = \mathtt{s}(h) = h^{-1}h = g$$

e, de modo análogo, $\mathtt{r}(g) = g$, demonstrando a igualdade pretendida. $\square$

Corolário 1.1.6. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide, então*

$$\mathcal{G}^0 = \{g \in \mathcal{G} : (g,g) \in \mathcal{G}^2 \text{ e } g^2 = g\}.$$

Demonstração. ($\subset$) Pelo lema anterior, item (6), se $g \in \mathcal{G}^0$, $g = \mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(g)$. Mas o item (1) desse mesmo lema garante que $g = g\mathtt{s}(g) = gg$.

($\supset$) Se $g^2 = g$, note que o item (1) do lema anterior garante que

$$gg = g = g\mathtt{s}(g),$$

e do item (5) segue a igualdade $g = \mathtt{s}(g) \in \mathcal{G}^0$. □

Esse corolário nos permite dizer que as unidades de um grupoide são seus elementos *idempotentes*.

Definição 1.1.7. Se $x \in \mathcal{G}^0$, definimos os seguintes conjuntos

$$\mathcal{G}_x := \mathtt{s}^{-1}(x), \qquad \mathcal{G}^x := \mathtt{r}^{-1}(x).$$

Além disso, para subconjuntos $U, V \subseteq \mathcal{G}$, definimos UV da maneira esperada: o conjunto de todos os produtos possíveis de um elemento de U com um elemento de V:

$$UV := \{\alpha\beta : \alpha \in U, \beta \in V, \mathtt{s}(\alpha) = \mathtt{r}(\beta)\}.$$

A menos de menção em contrário, quando escrevermos $xy \in UV$, fica subentendido que $x \in U$ e $y \in V$.

Observação 1.1.8. Note que, por causa do Lema 1.1.5(2), dados $U, V \subseteq \mathcal{G}$, o conjunto UV é a imagem direta de $(U \times V) \cap \mathcal{G}^2$ pela operação de multiplicação.

A seguir, vejamos alguns exemplos de grupoides.

Exemplo 1.1.9. *(Grupo).* Todo grupo é um grupoide de maneira trivial. Seja G um grupo, defina $G^2 = G \times G$, com a multiplicação e inversão sendo as operações usuais do grupo. Note que nesse caso o espaço das unidades G^0 consiste apenas do elemento neutro do grupo. $\triangleleft$

Exemplo 1.1.10. *(Relação de equivalência).* Seja X um conjunto não vazio, e $R \subseteq X \times X$ uma relação de equivalência em X. Defina

$$R^2 := \left\{ \big((x,y),(y,z)\big) : (x,y),(y,z) \in R \right\}.$$

Defina o produto e a inversão, respectivamente, como

$$\begin{aligned}(x,y)(y,z) &:= (x,z),\\ (x,y)^{-1} &:= (y,x).\end{aligned}$$

Note que a multiplicação está bem definida pela propriedade transitiva da relação de equivalência, e a inversão está bem definida pois a relação de equivalência é simétrica. Vamos verificar que as condições da Definição 1.1.1 são satisfeitas.

(1) $\big((x,y)^{-1}\big)^{-1} = (y,x)^{-1} = (x,y)$;

(2) Se $\big((x,y),(y,z)\big), \big((y,z),(z,w)\big) \in R^2$ então x,y,z e w estão na mesma classe de equivalência em R e logo

$$\begin{aligned}\big[(x,y)(y,z)\big](z,w) &= (x,z)(z,w) = (x,w),\\ (x,y)\big[(y,z)(z,w)\big] &= (x,y)(y,w) = (x,w).\end{aligned}$$

provando a associatividade;

(3) Note que para qualquer (x,y), podemos multiplicar (x,y) com $(y,x) = (x,y)^{-1}$, e se $((x,y),(y,z)) \in R^2$ então

$$\begin{aligned}(x,y)^{-1}(x,y)(y,z) &= (y,x)(x,y)(y,z) = (y,z),\\ (x,y)(y,z)(y,z)^{-1} &= (x,y)(y,z)(z,y) = (x,y).\end{aligned}$$

Assim obtemos que R é um grupoide.

Ademais, note que

$$\mathtt{r}\big((x,y)\big) = (x,y)(x,y)^{-1} = (x,y)(y,x) = (x,x)$$

e, de maneira similar, $\mathtt{s}\big((x,y)\big) = (y,y)$. Com isso, temos que

$$R^0 = \{(x,x) : x \in X\},$$

conjunto esse conhecido como a diagonal de $X \times X$. ◁

Exemplo 1.1.11. *(Ação de grupo à direita).* Seja G um grupo agindo à direita num conjunto X, isto é, existe uma aplicação

$$\sigma : X \times G \to X$$
$$(x,g) \mapsto xg$$

de modo que para $g \in G$, a função que associa $x \mapsto xg$ é uma bijeção e para qualquer $g,h \in G, x \in X$ vale que $(xg)h = x(gh)$. Dessas relações, sendo e a unidade do grupo, segue que $xe = x$, para qualquer $x \in X$. Considere o conjunto $X \times G$ e defina

$$(X \times G)^2 := \Big\{\big((x,g),(y,h)\big) : xg = y\Big\}.$$

Defina o produto e inversão por

$$(x,g)(xg,h) := (x,gh),$$
$$(x,g)^{-1} := (xg,g^{-1}).$$

Vamos verificar que a definição de grupoide é satisfeita.

(1) $\big((x,g)^{-1}\big)^{-1} = (xg,g^{-1})^{-1} = (xgg^{-1},(g^{-1})^{-1}) = (x,g)$;

(2) Se $\big((x,g),(xg,h)\big), \big((xg,h),(xgh,f)\big) \in (X \times G)^2$ então

$$\big[(x,g)(xg,h)\big](xgh,f) = (x,gh)(xgh,f) = (x,ghf),$$
$$(x,g)\big[(xg,h)(xgh,f)\big] = (x,g)(xg,hf) = (x,ghf).$$

(3) Note que é sempre possível multiplicar (x,g) por $(x,g)^{-1}$ $= (xg,g^{-1})$. Além disso, se $\big((x,g),(xg,h)\big) \in (X \times G)^2$ então

$$(x,g)^{-1}(x,g)(xg,h) = (xg,g^{-1})(x,g)(xg,h) =$$

$$
\begin{aligned}
&= (xg,e)(xg,h) = (xg,h),\\
(x,g)(xg,h)(xg,h)^{\text{-}1} &= (x,g)(xg,h)(xgh,h^{\text{-}1}) =\\
&= (x,gh)(xgh,h^{\text{-}1}) = (x,g).
\end{aligned}
$$

Concluímos que $X \times G$ é um grupoide. Além disso, vamos calcular os mapas

$$
\begin{aligned}
\mathtt{r}\big((x,g)\big) &= (x,g)(x,g)^{\text{-}1} = (x,g)(xg,g^{\text{-}1}) = (x,e),\\
\mathtt{s}\big((x,g)\big) &= (x,g)^{\text{-}1}(x,g) = (xg,g^{\text{-}1})(x,g) = (xg,e).
\end{aligned}
$$

Note que $(X \times G)^0 = X \times \{e\}$ pode ser identificado como o próprio conjunto X. $\triangleleft$

Exemplo 1.1.12. *(Ação de grupo à esquerda).* De modo análogo ao exemplo anterior, suponha que um grupo G age num conjunto X com uma ação à esquerda

$$
\begin{aligned}
\sigma : G \times X &\to X\\
(x,g) &\mapsto gx.
\end{aligned}
$$

Novamente, $x \mapsto gx$ é uma bijeção para qualquer $g \in G$, e $h(gx) = (hg)x$ para todos $g,h \in G$, $x \in X$. Definimos $\mathcal{G} := G \times X$ e

$$\mathcal{G}^2 := \left\{ \big((g,x),(h,y)\big) : x = hy \right\}.$$

Nesse caso o produto e a inversão são dados por

$$
\begin{aligned}
(g,x)(h,y) &:= (gh,y),\\
(g,x)^{\text{-}1} &:= (g^{\text{-}1},gx).
\end{aligned}
$$

Refazendo as contas do exemplo anterior, temos que $\mathcal{G}$ é de fato um grupoide. Além disso, também vale que $\mathcal{G}^0 = \{e\} \times X$ pode ser identificado com X. Com essa identificação, temos

$$\mathtt{r}\big((g,x)\big) = (g,x)(g,x)^{\text{-}1} = (g,x)(g^{\text{-}1},gx) = (e,gx) \simeq gx,$$

$$\mathtt{s}\big((g,x)\big) = (g,x)^{-1}(g,x) = (g^{-1},gx)(g,x) = (e,x) \simeq x.$$

◁

Exemplo 1.1.13. *(Produto cartesiano).* Sejam $\mathcal{G},\mathcal{H}$ grupoides. Podemos criar um novo grupoide $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$. Defina

$$(\mathcal{G}\times\mathcal{H})^2 := \{\big((g,h),(g',h')\big) : (g,g') \in \mathcal{G}^2, (h,h') \in \mathcal{H}^2\}$$

e a multiplicação e inversão, respectivamente, como

$$(g,h)(g',h') := (gg',hh'),$$
$$(g,h)^{-1} := (g^{-1},h^{-1}).$$

Usando o fato de que as operações são definidas coordenada a coordenada, não é difícil verificar que $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ é um grupoide. Além disso, $(\mathcal{G}\times\mathcal{H})^0 = \mathcal{G}^0\times\mathcal{H}^0$. ◁

Exemplo 1.1.14. *(União disjunta).* Sejam $\mathcal{G}_\lambda, \lambda\in\Lambda$, grupoides. Podemos considerar a sua união disjunta

$$\mathcal{G} := \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}_\lambda,$$

e definir

$$\mathcal{G}^2 := \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{G}_\lambda^2.$$

Note que se $(g,h)\in\mathcal{G}^2$, significa que existe um $\lambda\in\Lambda$ tal que $(g,h)\in\mathcal{G}_\lambda^2$. Assim, o produto gh é definido como sendo o produto oriundo de $\mathcal{G}_\lambda$. Da mesma forma, dado $g\in\mathcal{G}$, seu inverso g^{-1} é o inverso no grupoide $\mathcal{G}_\lambda$ que contém g. É um exercício simples mostrar que, com essas operações, $\mathcal{G}$ se torna um grupoide. ◁

Exemplo 1.1.15. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Defina

$$R(\mathcal{G}) := \left\{\big(\mathtt{r}(g),\mathtt{s}(g)\big) : g\in\mathcal{G}\right\}.$$

Vejamos que $R(\mathcal{G})$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{G}^0$, e como visto no Exemplo 1.1.10, também é um grupoide. O grupoide $R(\mathcal{G})$ é chamado de *relação de equivalência de* $\mathcal{G}$.

Note que pelo Lema 1.1.5(6), para qualquer $g \in \mathcal{G}^0$, $(g, g) = (\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(g)) \in R(\mathcal{G})$, provando que $R(\mathcal{G})$ é reflexiva. Para provar a simetria, sejam $(x, y) \in R(\mathcal{G})$. Então existe um $g \in \mathcal{G}$ tal que $x = \mathtt{r}(g)$, $y = \mathtt{s}(g)$. A Observação 1.1.4 nos diz que $x = \mathtt{s}(g^{-1})$ e $y = \mathtt{r}(g^{-1})$, logo $(y, x) = (\mathtt{r}(g^{-1}), \mathtt{s}(g^{-1})) \in R(\mathcal{G})$. Por fim, para provar a transitividade, suponha que $(x, y), (y, z) \in R(\mathcal{G})$ e que

$$(x, y) = \big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(g)\big), \qquad (y, z) = \big(\mathtt{r}(h), \mathtt{s}(h)\big).$$

Mas isso significa que $\mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(h)$ e logo podemos multiplicar g por h. Usando o Lema 1.1.5(4), obtemos

$$x = \mathtt{r}(g) = \mathtt{r}(gh) \quad \text{e} \quad z = \mathtt{s}(h) = \mathtt{s}(gh),$$

de modo que $(x, z) = \big(\mathtt{r}(gh), \mathtt{s}(gh)\big) \in R(\mathcal{G})$. $\triangleleft$

Exemplo 1.1.16. *(grupoide de Deaconu–Renault).* Sejam X um conjunto, $(G, +)$ um grupo abeliano e $S \subseteq G$ um subsemigrupo que contém o elemento neutro de G, que denotaremos por 0. Suponha que exista uma ação à esquerda de S em X, isto é, existam mapas $x \in X \mapsto u \cdot x \in X$ que satisfazem

$$u \cdot (v \cdot x) = (u + v) \cdot x,$$
$$0 \cdot x = x$$

para todo $x \in X$, $u, v \in S$. Considere o conjunto $\mathcal{G} \subseteq X \times S \times X$ definido por

$$\mathcal{G} := \{(x, u, y) : u \cdot x = y\}.$$

Seja

$$\mathcal{G}^2 := \big\{\big((x, u, y), (y, v, z)\big)\big\} \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}.$$

Vamos definir a multiplicação e inversão, respectivamente como

$$(x, u, y)(y, v, z) := (x, u + v, z),$$
$$(x, u, y)^{-1} := (y, -u, x).$$

Note que a multiplicação está bem definida pois se $x = u \cdot y$ e $y = v \cdot z$, então $x = u \cdot (v \cdot z) = (u + v) \cdot z$. Da mesma forma, a inversão está bem definida pois se $x = u \cdot y$ então $-u \cdot x = -u \cdot (u \cdot y) = (-u + u) \cdot = 0 \cdot y = y$. Além disso,

$$\mathcal{G}^0 = \{(x, 0, x) : x \in X\}$$

e para qualquer $(x, u, y) \in \mathcal{G}$,

$$\mathtt{r}\big((x, u, y)\big) = (x, 0, x),$$
$$\mathtt{s}\big((x, u, y)\big) = (y, 0, y).$$

◁

Definição 1.1.17. Sejam $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ grupoides. Uma função $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um *homomorfismo de grupoide* se para qualquer $(g, h) \in \mathcal{G}^2$, $(\phi(g), \phi(h)) \in \mathcal{H}^2$ e $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$.

Lema 1.1.18. *Se $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ são grupoides e $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ é um homomorfismo de grupoide, então*

(1) $\phi(\mathcal{G}^0) \subseteq \mathcal{H}^0$;
(2) *ϕ comuta com $\mathtt{r}$ e $\mathtt{s}$;*
(3) *ϕ comuta com a inversão.*

Demonstração. (1) Vamos usar o Corolário 1.1.6, que diz que as unidades são os idempotentes. Se $g \in \mathcal{G}^0$, $g = g^2$ e logo

$$\phi(g) = \phi(g^2) = \phi(g)^2,$$

de maneira que $\phi(g) \in \mathcal{H}^0$.

(2) Seja $g \in \mathcal{G}$. Usando a identidade $x = x\mathtt{s}(x)$ para qualquer elemento x de um grupoide, temos

$$\phi(g)\phi(\mathtt{s}(g)) = \phi(g\mathtt{s}(g)) = \phi(g) = \phi(g)\mathtt{s}(\phi(g)),$$

e pelo cancelamento à esquerda, $\phi(\mathtt{s}(g)) = \mathtt{s}(\phi(g))$. Análogo para $\mathtt{r}$.

(3) Veja que

$$\phi(g)\phi(g^{-1}) = \phi(gg^{-1}) = \phi(\mathtt{s}(g)) = \mathtt{s}(\phi(g)) = \phi(g)\phi(g)^{-1},$$

e novamente pelo cancelamento, $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$. □

Exemplo 1.1.19. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide, e considere $R(\mathcal{G})$ do Exemplo 1.1.15. Defina

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{G} &\to R(\mathcal{G}) \\ g &\mapsto \big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(g)\big) \end{aligned}$$

Vejamos que ϕ é um homomorfismo de grupoides.

Se $(g, h) \in \mathcal{G}^2$, então $\mathtt{s}(g) = \mathtt{r}(h)$. Mas isso significa que $\big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(g)\big), \big(\mathtt{r}(h), \mathtt{s}(h)\big) \in R(\mathcal{G})$ podem ser multiplicados, e obtemos

$$\phi(g)\phi(h) = \big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(g)\big)\big(\mathtt{r}(h), \mathtt{s}(h)\big) = \big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(h)\big)$$

Por outro lado, $\phi(gh) = \big(\mathtt{r}(gh), \mathtt{s}(gh)\big) = \big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(h)\big)$, provando que $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$. ◁

Quando o homomorfismo acima é injetor, dizemos que o grupoide $\mathcal{G}$ é *principal*.

Teorema 1.1.20. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide então existem grupos G_λ e relações de equivalência R_λ, $\lambda \in \Lambda$, tais que existe um isomorfismo*

$$\mathcal{G} \cong \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \times R_\lambda$$

Demonstração. Ver [Putnam 2019, Teorema 3.1.11]. □

1.2 Grupoides topológicos

Dada uma topologia qualquer para um grupoide $\mathcal{G}$, quais condições essa topologia deve satisfazer para que tenhamos uma estrutura compatível com suas operações? Esse é o assunto que abordaremos nessa seção.

Definição 1.2.1. Dado um grupoide $\mathcal{G}$ munido de uma topologia, consideramos $\mathcal{G}^2$ com a topologia induzida pela topologia produto em $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Esse grupoide é dito ser um grupoide *topológico* se a inversão e a multiplicação forem contínuas.

Observação 1.2.2. Como consequência da propriedade (1) da definição de grupoide, segue que a inversão é um homeomorfismo.

Exemplo 1.2.3. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide topológico. Claramente o mapa $\Delta : g \in \mathcal{G} \mapsto (g, g) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ é contínuo. É um exercício simples verificar que

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \times \mathtt{i} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} &\to \mathcal{G} \times \mathcal{G} \\ (g, h) &\mapsto (g, h^{-1}) \end{aligned}$$

também é uma aplicação contínua. Note então que, pela propriedade (3) da definição de grupoide, a composição

$$\begin{aligned} (\mathrm{id} \times \mathtt{i}) \circ \Delta : \mathcal{G} &\to \mathcal{G} \times \mathcal{G} \\ g &\mapsto (g, g^{-1}) \end{aligned}$$

tem imagem contida em $\mathcal{G}^2$. Como a topologia em $\mathcal{G}^2$ é a induzida de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$, segue que

$$(\mathrm{id} \times \mathtt{i}) \circ \Delta : \mathcal{G} \to \mathcal{G}^2$$

é uma aplicação contínua. Se chamarmos de $\mathtt{m}$ a multiplicação do grupoide, temos que $\mathtt{m}\circ(\mathrm{id}\times\mathtt{i})\circ\Delta$ é uma aplicação contínua. Além disso, veja que

$$\mathtt{m}\circ(\mathrm{id}\times\mathtt{i})\circ\Delta(g)=\mathtt{m}(g,g^{-1})=gg^{-1}=\mathtt{r}(g)$$

para qualquer $g\in\mathcal{G}$, de modo que provamos a continuidade do mapa *range*. A continuidade do mapa *source* segue de modo análogo, trocando $\mathrm{id}\times\mathtt{i}$ por $\mathtt{i}\times\mathrm{id}:(g,h)\in\mathcal{G}\times\mathcal{G}\mapsto(g^{-1},h)\in\mathcal{G}\times\mathcal{G}$. ◁

Exemplo 1.2.4. Todo grupoide é um grupoide topológico com a topologia discreta. ◁

Exemplo 1.2.5. Se X é um espaço topológico e R é uma relação de equivalência em X, então R é um grupoide topológico com a topologia relativa de $X\times X$. ◁

Exemplo 1.2.6. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide e suponha que é dada uma topologia τ para $\mathcal{G}^0$. Podemos estender essa topologia para uma topologia $\tilde{\tau}$ em todo o grupoide.

Note que o Exemplo 1.1.19 nos dá uma aplicação

$$\phi:\mathcal{G}\to R(\mathcal{G})\subseteq\mathcal{G}^0\times\mathcal{G}^0.$$

Consideramos a topologia induzida em $R(\mathcal{G})$ pela topologia produto de $\mathcal{G}^0\times\mathcal{G}^0$. Dessa maneira podemos definir $\tilde{\tau}$ como sendo a topologia inicial dada pela aplicação ϕ: os abertos em $\tilde{\tau}$ são da forma $\phi^{-1}(U\times V)$ com $U,V\in\tau$. Vejamos que $\mathcal{G}$ com essa topologia $\tilde{\tau}$ é um grupoide topológico.

A inversão é contínua. Seja $g\in\mathcal{G}$ e $A=\phi^{-1}(U\times V)$ um aberto contendo g, com $U,V\in\tau$. Isso significa que $\phi(g)=\big(\mathtt{r}(g),\mathtt{s}(g)\big)\in U\times V$. Note que $B=\phi^{-1}(V\times U)$ é um aberto que contém g^{-1}, uma vez que a Observação 1.1.4 nos diz que

$$\phi(g^{-1}) = \big(\mathtt{r}(g^{-1}), \mathtt{s}(g^{-1})\big) = \big(\mathtt{s}(g), \mathtt{r}(g)\big) \in V \times U.$$

Mais que isso, substituindo g na equação acima por qualquer $h \in B$, temos que $h^{-1} \in A$, provando que a inversão é contínua.

Para a continuidade da multiplicação, considere $g \in \mathcal{G}$ contido no aberto $\phi^{-1}(U \times V)$, com $U, V \in \tau$. Sejam $e, f \in \mathcal{G}$ com $ef = g$. Usando o Lema 1.1.5, sabemos que

$$\mathtt{r}(g) = \mathtt{r}(ef) = \mathtt{r}(e), \qquad \mathtt{s}(g) = \mathtt{s}(ef) = \mathtt{s}(f)$$

e, como $(e, f) \in \mathcal{G}^2$, $\mathtt{s}(e) = \mathtt{r}(f)$. Assim, considere W um aberto de τ contendo $\mathtt{s}(e)$. Veja que

$$\phi(e) = \big(\mathtt{r}(e), \mathtt{s}(e)\big) \in U \times W, \quad \phi(f) = \big(\mathtt{r}(f), \mathtt{s}(f)\big) \in W \times V,$$

de modo que e e f estão contidos nos abertos $\phi^{-1}(U \times W)$ e $\phi^{-1}(W \times V)$, respectivamente. Isso garante que (e, f) está contido no aberto

$$\big(\phi^{-1}(U \times W) \times \phi^{-1}(W \times V)\big) \cap \mathcal{G}^2.$$

Qualquer par de elementos desse aberto, quando multiplicados, resultam em um elemento do aberto $\phi^{-1}(U \times V)$, provando que a multiplicação é contínua. $\triangleleft$

Exemplo 1.2.7. No Exemplo 1.2.6 anterior, vimos que uma topologia τ em $\mathcal{G}^0$ nos permite criar uma topologia $\tilde{\tau}$ em $\mathcal{G}$. Por outro lado, podemos pensar agora na topologia induzida de $\mathcal{G}^0$, já que este é subconjunto de $\mathcal{G}$. Será que essa topologia induzida em $\mathcal{G}^0$ é a mesma topologia τ? Vejamos que sim, caso o grupoide seja principal.

Seja $\mathcal{G}$ um grupoide principal, i.e., o mapa $\phi : \mathcal{G} \to R(\mathcal{G})$ do Exemplo 1.1.19 é injetora. Um aberto A na topologia relativa de $\mathcal{G}^0$ é da forma $A = \phi^{-1}(U \times V) \cap \mathcal{G}^0$, com $U, V \in \tau$. Mas note que, restrito a A, temos

$$\phi|_A : g \in A \mapsto (g, g) \in U \times V.$$

Veja que $\phi(A) = A \times A \subseteq U \times V$, de modo que $A \subseteq U \cap V$. Por outro lado, se $g \in U \cap V$, então $(g, g) \in U \times V$. Como ϕ é injetora, $g = \phi^{-1}(g, g) \in A$. Isso prova que $U \cap V \subseteq A$.

Assim, temos $A = U \cap V \in \tau$, provando que a topologia relativa de $\mathcal{G}^0 \subseteq \mathcal{G}$ coincide com a topologia τ de $\mathcal{G}^0$. $\triangleleft$

Se $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico que é principal, então $\phi : g \in \mathcal{G} \to \big(\mathtt{r}(g), \mathtt{s}(g)\big) \in R(\mathcal{G})$ é uma função contínua. Mas isso significa que a topologia de $\mathcal{G}$ deve ser mais fina do que a topologia induzida pela topologia produto de $\mathcal{G}^0 \times \mathcal{G}^0$. No exemplo a seguir, mostraremos que a topologia de um grupoide principal pode ser estritamente mais fina que a topologia induzida pela topologia no espaço das unidades.

Exemplo 1.2.8. *(Espaço de palavras).* Seja $X = \{0, 1\}$ munido da topologia discreta. Para $n \in \mathbb{N}^*$, defina $X^n := \{0, 1\}^n$ o conjunto das palavras finitas de tamanho n sobre o alfabeto X. Definimos

$$X^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} X^n$$

o conjunto de todas as palavras finitas[1]. Se $x \in X^*$, $|x|$ denota o tamanho da palavra x. Considere

$$X^\infty := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$$

como o conjunto das palavras infinitas, munido da topologia produto.

Dada uma palavra qualquer x (finita ou infinita), usamos x_i para denotar sua i-ésima componente, e $x_{[a,b]}$ denota a palavra

[1] excluindo a palavra vazia

finita $x_a x_{a+1} \ldots x_b$. Quando o intervalo não for fechado, fica claro que estamos excluindo as coordenadas correspondentes. Por abuso de notação, escrevemos $x_{[a,\infty)} = x_a x_{a+1} \ldots$ Dadas duas palavras $u \in X^*$ e $v \in X^* \cup X^\infty$, uv denota a concatenação dessas palavras. Para $u \in X^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$, $u^1 := u$ e $u^n := uu^{n-1}$; por abuso de notação, u^∞ é palavra infinita obtida concatenando u infinitas vezes.

Defina a relação de equivalência R em X^∞ por $(x, y) \in R$ se e só se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq n$, $x_j = y_j$. Isto é, duas palavras infinitas são equivalentes se elas são iguais a partir de uma certa coordenada. Para palavras finitas $v, w \in X^n$, defina

$$Z(v, w) := \big\{ \big(vx, wx\big) : x \in X^\infty \big\} \subseteq R.$$

Note que, para palavras finitas v_1, v_2, w_1, w_2, temos em geral que

$$Z(v_1, w_1) \cap Z(v_2, w_2) = \emptyset,$$

exceto no caso em que existe uma palavra finita u tal que $v_i = v_j u$ e $w_i = w_j u$, com $\{i, j\} = \{1, 2\}$, e nesse caso

$$Z(v_1, w_1) \cap Z(v_2, w_2) = Z(v_i, w_i).$$

Com essas fórmulas para a interseção e usando um resultado conhecido [Dugundji 1966, III, Teorema 3.2], prova-se que os conjuntos $Z(v, w)$ formam uma base para uma topologia.

Afirmamos que R é um grupoide topológico com esta topologia. Claramente a inversão é contínua, pois

$$(Z(v, w))^{-1} = Z(w, v).$$

Para provar que a multiplicação é contínua, suponha que

$$(x, y)(y, z) = (x, z) \in Z(v, w),$$

com o tamanho das palavras v e w sendo n_0. Então $x = vx_{[n_0,\infty)}$

e $z = wz_{[n_0,\infty)}$. Mas se $(x, y) \in R$, então existe um $n_1 \in \mathbb{N}$, que podemos escolher maior que n_0, tal que $x_{[n_1,\infty)} = y_{[n_1,\infty)}$. Da mesma forma, $(y, z) \in R$ implica a existência de um $n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 > n_0$, de modo que $y_{[n_2,\infty)} = z_{[n_2,\infty)}$. Tomando $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, temos que

$$x = vx_{[n_0,n_3)}x_{[n_3,\infty)}$$

$$y = y_{[0,n_0)}y_{[n_0,n_3)}y_{[n_3,\infty)}$$

$$z = wz_{[n_0,n_3)}z_{[n_3,\infty)}$$

Note então que vale $x_{[n_3,\infty)} = y_{[n_3,\infty)} = z_{[n_3,\infty)}$. Chame de $u = x_{[n_0,n_3)} = z_{[n_0,n_3)}$, então temos que

$$(x, y) \in Z(vu, y_{[0,n_3)}), \qquad (y, z) \in Z(y_{[0,n_3)}, wu).$$

Fazendo y variar, temos que a imagem inversa de $Z(v, w)$ pela multiplicação pode ser escrita como

$$\left(\bigcup_{|s|=|v|+|u|}^{u,s\in X^*} Z(vu, s) \times Z(s, wu) \right) \bigcap R^2,$$

que é uma união de abertos básicos de R^2.

Para ver que essa topologia para R é mais fina que a topologia produto de $X^\infty \times X^\infty$, considere a sequência $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ com $\gamma_n = (0^n 10^\infty, 0^\infty)$. Note que na topologia produto, $\gamma_n \to (0^\infty, 0^\infty)$. Entretanto, na topologia de R, as vizinhanças básicas de $(0^\infty, 0^\infty)$ são da forma $Z(0^m, 0^m), m \in \mathbb{N}^*$. E dado qualquer m, $\gamma_{m+1} \notin Z(0^m, 0^m)$, mostrando que $\gamma_n \not\to (0^\infty, 0^\infty)$ em R. ◁

Exemplo 1.2.9. Podemos munir o grupoide de Deaconu-Renault com uma topologia similar àquela do exemplo anterior. Usando a notação do Exemplo 1.1.16, seja X um espaço topológico e considere os abertos básicos

$$Z(U,t,V) := \{(x,t,y) : x \in U, y \in V, x = t \cdot y\}$$

com $U, V \subseteq X$ abertos. Note que $(Z(U,t,V))^{-1} = Z(V,-t,U)$. Além disso, a imagem inversa do aberto $Z(U,v,V)$ pela multiplicação pode ser escrita como

$$\bigcup_{t+u=v}^{t,u\in S} \bigcup_{t\cdot W\subseteq U} Z(U,t,W) \times Z(W,u,V).$$

$\triangleleft$

Lema 1.2.10. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico, então $\mathcal{G}^0$ é fechado em $\mathcal{G}$ se e somente se $\mathcal{G}$ é Hausdorff.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha $\mathcal{G}^0$ fechado. Para provar que $\mathcal{G}$ é Hausdorff, basta provar que o limite de uma net é único. Seja $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma net em $\mathcal{G}$, e suponha que $g_\lambda \to h$ e $g_\lambda \to f$. Por continuidade, $g_\lambda^{-1} g_\lambda \to h^{-1} f$. Mas note que para qualquer λ,

$$g_\lambda^{-1} g_\lambda = \mathtt{s}(g_\lambda) \in \mathcal{G}^0,$$

e como este último é fechado, $h^{-1} f \in \mathcal{G}^0$. Usando agora Lema 1.1.5(6), temos

$$h^{-1} f = \mathtt{r}(h^{-1} f) = h^{-1} f f^{-1} h = h^{-1} h,$$

e o cancelamento garante que $f = h$.

($\Leftarrow$) Suponha $\mathcal{G}$ Hausdorff e seja $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ uma net em $\mathcal{G}^0$ que converge para $g \in \mathcal{G}$. Como $\mathtt{s}$ é contínua, $g_\lambda = \mathtt{s}(g_\lambda) \to \mathtt{s}(g) \in \mathcal{G}^0$. Pela unicidade do limite, $g = \mathtt{s}(g)$, e logo $\mathcal{G}^0$ é fechado. $\square$

Proposição 1.2.11. *Se $\mathcal{G}^0$ é Hausdorff, então $\mathcal{G}^2$ é fechado em $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$.*

Demonstração. Seja $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma net em $\mathcal{G}^2$ que converge para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}$. Note que, por causa da topologia induzida,

$\alpha_\lambda \to \alpha$ e $\beta_\lambda \to \beta$. Por continuidade de $\mathtt{r}$ e $\mathtt{s}$, temos que $\mathtt{s}(\alpha_\lambda) \to \mathtt{s}(\alpha)$ e $\mathtt{r}(\beta_\lambda) \to \mathtt{r}(\beta)$.

Mas note que como $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \in \mathcal{G}^2$, $\mathtt{s}(\alpha_\lambda) = \mathtt{r}(\beta_\lambda)$. Assim, pela unicidade do limite em $\mathcal{G}^0$,

$$\mathtt{s}(\alpha) = \lim_{\lambda\to\infty} \mathtt{s}(\alpha_\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} \mathtt{r}(\beta_\lambda) = \mathtt{r}(\beta)$$

de modo que $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}^2$. □

1.3 Grupoides *étale*

Quando se trabalha com C*-álgebras de grupos e grupoides, precisamos definir uma integração nos mesmos, e isso se faz com a chamada medida de Haar. Passa-se o fato de que quando o grupo é discreto, a medida de Haar é a medida de contagem, o que simplifica em muito nosso trabalho. O análogo de um grupo discreto é um grupoide *étale*.

Observação 1.3.1. Nesse trabalho, diremos que uma função $f : X \to Y$ é um *homeomorfismo local* se cada $x \in X$ possuir uma vizinhança aberta U de modo que $f(U)$ é aberto em Y e a restrição $f|_U : U \to f(U)$ é um homeomorfismo.

Definição 1.3.2. Um grupoide topológico é dito ser *étale* se o mapa $\mathtt{r} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ é um homeomorfismo local.

Note que exigimos que o contradomínio seja $\mathcal{G}$ e não apenas $\mathcal{G}^0$ com a topologia relativa. Esse detalhe é sutil, mas garante o seguinte resultado.

Lema 1.3.3. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide étale, $\mathcal{G}^0$ é aberto em $\mathcal{G}$.*

Demonstração. Para cada $g \in \mathcal{G}$, escolha um aberto U_g contendo g de modo que $\mathtt{r} : U_g \to \mathtt{r}(U_g)$ é um homeomorfismo sobre um aberto. Então $\mathcal{G}^0 = \bigcup_{g\in\mathcal{G}} \mathtt{r}(U_g)$ é aberto. □

Exemplo 1.3.4. Todo grupoide discreto é étale. De fato se $\mathcal{G}$ é um grupoide discreto, todo $g \in \mathcal{G}$ possui uma vizinhança $\{g\}$ de modo que

$$\mathtt{r} : \{g\} \to \{gg^{-1}\}$$

é um homeomorfismo. $\triangleleft$

Exemplo 1.3.5. O grupoide do Exemplo 1.2.8 é étale: $\mathtt{r}$ é um homeomorfismo de $Z(u, v)$ em $Z(u, u)$. Como os abertos $Z(u, v)$ são abertos básicos da topologia, isso garante que $\mathtt{r}$ é um homeomorfismo local. $\triangleleft$

Exemplo 1.3.6. O grupoide de Deaconu-Renault do Exemplo 1.1.16 é étale sempre que a ação de S em X é um homeomorfismo local.

Considere $(x_0, t, y_0) \in \mathcal{G}$, escolha U vizinhança de x_0 e V vizinhança de y_0 de modo que $y \mapsto t \cdot y$ é homeomorfismo de V em $t \cdot V$. Considere $W := U \cap t \cdot V$, que é um aberto não vazio pois $x_0 \in W$. Finalmente, defina seja $V' := V \cap -t \cdot W$ aberto, e note que

$$\mathtt{r} : Z(W, t, V') \to Z(W, 0, W)$$

é um homeomorfismo. $\triangleleft$

A Observação 1.1.4 nos garante que num grupoide *étale* a função $\mathtt{s}$ também é um homeomorfismo local, pois é a composição de $\mathtt{r}$ com o homeomorfismo inversão. Isso nos garante que a seguinte definição faz sentido.

Definição 1.3.7. Um subconjunto B de um grupoide étale é chamado de *bisseção* se existe um aberto U contendo B tal que $\mathtt{r} : U \to \mathtt{r}(U)$ e $\mathtt{s} : U \to \mathtt{s}(U)$ são homeomorfismos.

Os resultados a seguir serão usados no último capítulo desse trabalho.

Lema 1.3.8. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide étale Hausdorff segundo-contável. Então $\mathcal{G}$ possui uma base enumerável de bisseções abertas.*

Demonstração. Seja $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ um subconjunto denso enumerável de $\mathcal{G}$. Para cada g_n, escolha uma base de vizinhanças abertas $\{U_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{V_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de modo que $\mathtt{r} : U_{n,i} \to \mathtt{r}(U_{n,i})$ e $\mathtt{s} : V_{n,i} \to \mathtt{s}(V_{n,i})$ sejam homeomorfismos. Note então que

$$\{U_{n,i} \cap V_{n,i} : n, i \in \mathbb{N}\}$$

é uma base enumerável de bisseções abertas. □

Lema 1.3.9. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide étale Hausdorff e $x \in \mathcal{G}^0$, então os conjuntos $\mathcal{G}_x$ e $\mathcal{G}^x$ são discretos na topologia relativa.*

Demonstração. Para cada $\gamma \in \mathcal{G}^x$, escolha uma bisseção aberta U_γ contendo γ. Claramente temos $\{\gamma\} \subseteq U_\gamma \cap \mathcal{G}^x$. Para provar que $\{\gamma\} \supseteq U_\gamma \cap \mathcal{G}^x$, suponha que exista um $y \neq \gamma$ pertencente a $U_\gamma \cap \mathcal{G}^x$. Como $\mathcal{G}$ é Hausdorff, existiriam abertos $A_\gamma, A_y \subseteq U_\gamma$ separando γ e y. Porém, como $\mathtt{r}$ é um homeomorfismo local em U_γ, teríamos que $\mathtt{r}(A_\gamma)$ e $\mathtt{r}(A_y)$ são abertos disjuntos, o que claramente não ocorre pois $x \in \mathtt{r}(A_\gamma) \cap \mathtt{r}(A_y)$. Segue que

$$\{\gamma\} = U_\gamma \cap \mathcal{G}^x$$

é um aberto em $\mathcal{G}^x$ e logo $\mathcal{G}^x$ é discreto.

O argumento é análogo para $\mathcal{G}_x$ trocando $\mathtt{r}$ por $\mathtt{s}$. □

Proposição 1.3.10. *Se $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico primeiro-contável e $\mathtt{r}$ é uma aplicação aberta, então a multiplicação é uma aplicação aberta. Em particular, se $\mathcal{G}$ é étale, então a multiplicação é aberta.*

Demonstração. Sejam U, V abertos em $\mathcal{G}$ e tome $(\alpha, \beta) \in (U \times V) \cap \mathcal{G}^2$. Fixe uma sequência $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergindo para $\alpha\beta$. Queremos mostrar que a sequência eventualmente pertence a UV.

Seja $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base abertos contendo α, que podemos tomar decrescente e contida em U. Como $\mathtt{r}$ é aberta, cada $\mathtt{r}(U_n)$ é um aberto contendo $\mathtt{r}(\alpha)$. Como $g_i \to \alpha\beta$, então por continuidade, $\mathtt{r}(g_i) \to \mathtt{r}(\alpha\beta) = \mathtt{r}(\alpha)$. Assim para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um i_n tal que $\mathtt{r}(g_i) \in \mathtt{r}(U_n)$ sempre que $i \geq i_n$. Isso nos permite tomar uma subsequência $\{g'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de modo que $\mathtt{r}(g'_n) \in \mathtt{r}(U_n)$.

Usando imagem inversa, temos que existe uma sequência $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $\alpha_n \in U_n$ e $\mathtt{r}(\alpha_n) = \mathtt{r}(g'_n)$. Logo, $\alpha_n \to \alpha$. Segue que $\alpha_n^{-1} g'_n \to \alpha^{-1}\alpha\beta = \beta$. Assim existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n^{-1} g'_n \in V$ para $n \geq N$. Assim,

$$g'_n = \alpha_n(\alpha_n^{-1} g'_n) \in UV$$

sempre que $n \geq N$, o que garante que a sequência original g_n eventualmente está em UV.

No caso $\mathcal{G}$ *étale*, $\mathtt{r}$ é um homeomorfismo local, e logo uma aplicação aberta. $\square$

2 Semigrupos Inversos

Esse capítulo serve como uma breve introdução aos semigrupos inversos e apresenta o maquinário algébrico que usaremos no Capítulo 4.

2.1 Definições e exemplos

Lembramos que um *semigrupo* é um conjunto $\mathcal{S}$ munido de uma operação binária associativa, que será denotada por concatenação. A notação de potência indica concatenações repetidas.

Definição 2.1.1. Um *semigrupo inverso* é um semigrupo $\mathcal{S}$ tal que para cada elemento $s \in \mathcal{S}$ existe um único elemento $s^* \in \mathcal{S}$ tal que

$$ss^*s = s \quad \text{e} \quad s^*ss^* = s^*. \tag{2.1}$$

A função $s \mapsto s^*$ é chamada de *involução*.

Exemplo 2.1.2. Todo grupo é um semigrupo inverso, com involução dava pela inversão. $\triangleleft$

Exemplo 2.1.3. Seja X um conjunto não vazio. Considere $\mathcal{I}(X)$ o conjunto de todas as bijeções parcialmente definidas em X, i.e.,

$$\mathcal{I}(X) := \{f : A \to B : A, B \subseteq X, f \text{ bijetora}\}.$$

Nesse conjunto, consideramos a operação de composição com domínio sendo o maior conjunto possível. Assim, dadas $f, g \in \mathcal{I}(X)$ com $f : A \to B, g : C \to D$, temos

$$gf : f^{-1}(B \cap C) \to g(B \cap C),$$

possivelmente resultando na função vazia. Definimos a involução como $f^* = f^{-1}$. Com essas operações, $\mathcal{I}(X)$ é um semigrupo inverso chamado de *monoide inverso.* ◁

O Teorema de Vagner-Preston, conforme [Paterson 1999, Proposição 2.1.3], garante que todo semigrupo inverso é isomorfo a um subsemigrupo inverso de um monoide inverso.

Definição 2.1.4. Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso. Denotamos o conjunto de seus elementos idempotentes por

$$E(\mathcal{S}) := \{e \in \mathcal{S} : e^2 = e\}.$$

Exemplo 2.1.5. Para qualquer $s \in \mathcal{S}$, temos que ss^* é idempotente, pois

$$(ss^*)^2 = (ss^*s)s^* = ss^*.$$

Analogamente, s^*s é idempotente. ◁

Proposição 2.1.6. *Dado um semigrupo inverso $\mathcal{S}$, vale que:*

(1) *Se $s \in \mathcal{S}$, $\big(s^*\big)^* = s$.*
(2) *Se $e \in E(\mathcal{S})$, $e^* = e$.*
(3) *Se $e, f \in E(\mathcal{S})$, $ef = fe$.*
(4) *$E(\mathcal{S})$ é fechado por concatenação.*
(5) *Para $e \in E(\mathcal{S})$, $s \in \mathcal{S}$, vale que $s^*es \in E(\mathcal{S})$.*
(6) *Se $s, t \in \mathcal{S}$, então $(st)^* = t^*s^*$.*

Demonstração.

(1) Por simplicidade, denote $s^{**} = (s^*)^*$. Então

$$s^*s^{**}s^* = s^* \quad \text{e} \quad s^{**}s^*s^{**} = s^{**},$$

que é a equação (2.1), com s trocado por s^{**}. Por unicidade, $s = s^{**}$.

(2) Como $e \in E(\mathcal{S})$, então $e = ee$, e sendo assim, $e = eee$, e por unicidade, $e = e^*$.

(3) Sejam $e, f \in E(\mathcal{S})$, defina $g = f(ef)^*e$. Assim,

$$g^2 = f(ef)^*ef(ef)^*e = f(ef)^*e = g.$$

Logo, $g \in E(\mathcal{S})$, e mais que isso, usando a idempotência de e e f,

$$g(ef)g = f(ef)^*eeff(ef)^*e = f(ef)^*ef(ef)^*e = g \quad \text{e}$$
$$(ef)g(ef) = eff(ef)^*eef = ef(ef)^*ef = ef.$$

Assim, $(ef)^* = g = g^*$. Aplicando a involução e usando (1), temos $ef = g \in E(\mathcal{S})$. Repetindo o argumento acima trocando e e f de posição, temos que $fe \in E(\mathcal{S})$. Assim, usando a idempotência de e, f, ef e fe, temos

$$ef(fe)ef = efef = ef \quad \text{e} \quad fe(ef)fe = fefe = fe$$

e logo $ef = (fe)^* = fe$, como desejado.

(4) Se $e, f \in E(\mathcal{S})$, por (3) sabemos que $ef = fe$, de modo que

$$(ef)^2 = efef = eeff = ef$$

e segue que $ef \in E(\mathcal{S})$.

(5) Usando que $ss^*, e \in E(\mathcal{S})$ comutam, temos que

$$(s^*es)^2 = s^*ess^*es = s^*e^2ss^*s = s^*es,$$

e segue que $s^*es \in E(\mathcal{S})$.

(6) Note que para $t, s \in \mathcal{S}$ temos que s^*s, tt^* são idempotentes e portanto comutam. Segue que

$$(t^*s^*)st(t^*s^*) = t^*tt^*s^*ss^* = t^*s^*.$$

Uma conta análoga mostra que $st(t^*s^*)st = st$. Por unicidade $t^*s^* = (ts)^*$. □

Lema 2.1.7. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso. Para quaisquer $e \in E(\mathcal{S})$ e $s \in \mathcal{S}$ existem $f, h \in E(\mathcal{S})$ tais que*

$$es = sf$$

$$se = hs$$

Demonstração. Considere $f = s^*es$, que é idempotente pela Proposição 2.1.6. Então, como idempotentes comutam,

$$sf = s(s^*es) = (ss^*)es = e(ss^*)s = es.$$

A outra igualdade é obtida fazendo $h = ses^*$. □

Outras caracterizações de semigrupo inverso podem ser apresentadas. Para isso temos a seguinte definição.

Definição 2.1.8. Um *semigrupo regular* é um semigrupo $\mathcal{S}$ tal que para todo $s \in \mathcal{S}$ existe um $t \in \mathcal{S}$ tal que

$$sts = s \quad \text{e} \quad tst = t.$$

Nesse caso dizemos que t é um *inverso* de s.

Teorema 2.1.9. *Um semigrupo $\mathcal{S}$ é um semigrupo inverso se e somente se é um semigrupo regular no qual quaisquer dois idempotentes comutam.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Claramente, um semigrupo inverso satisfaz a definição de ser regular. A Proposição 2.1.6(3) garante que os idempotentes comutam.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo regular tal que os idempotentes comutam. Fixe um $s \in \mathcal{S}$ e considere $u, v \in \mathcal{S}$ inversos de s. Vamos mostrar que $u = v$. Note que $(us)^2 = usus = us$ e $(vs)^2 = vsvs = vs$, logo são idempotentes. Analogamente, su e sv também são idempotentes. Usando a comutatividade dos idempotentes, temos

$$u = usu = u(svs)u = (us)(vs)u = (vs)(us)u =$$
$$= (vs)(usu) = vsu = (vsv)su = v(sv)(su) = v(su)(sv) =$$
$$= v(sus)v = vsv = v,$$

como desejado.

Agora, para cada $s \in \mathcal{S}$, seja s^* o único inverso de s. Com essa involução, $\mathcal{S}$ torna-se um semigrupo inverso. $\square$

2.2 Ordem parcial

Definição 2.2.1. Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso. A relação $\leq$ é dada por $s \leq t$ se e somente se existe um idempotente e tal que $s = te$.

Lema 2.2.2. *Seja $\leq$ a relação definida anteriormente. Então são equivalentes*

(1) $s \leq t$.

(2) $s = ft$ *para algum idempotente* f.

(3) $s^* \leq t^*$.

(4) $s = ss^*t$.

(5) $s = ts^*s$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Suponha $s = te$ para e idempotente. Pelo Lema 2.1.7, existe $f \in E(\mathcal{S})$ tal que $te = ft$ e o resultado segue.

(2) $\Rightarrow$ (3). Se $s = ft$ para $f \in E(\mathcal{S})$, a Proposição 2.1.6 mostra que $s^* = (ft)^* = t^*f^* = t^*f$, e por definição, $s^* \leq t^*$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Seja $s^* = t^*e$ para $e \in E(\mathcal{S})$. Tomando involução, temos $s = et$ e por idempotência, $es = e^2t = et = s$. Como idempotentes comutam, $ss^*e = ess^* = ss^*$. Finalmente,

$$s = ss^*s = ss^*et = (ss^*e)t = ss^*t$$

(4) $\Rightarrow$ (5). Se $s = ss^*t$, pelo Lema 2.1.7, existe $e \in E(\mathcal{S})$ tal que $s = te$. Mas nesse caso $se = te^2 = te = s$, e logo

$$s = ss^*s = tes^*s = ts^*se = ts^*s.$$

(5) $\Rightarrow$ (1). Imediato da definição. $\square$

Definição 2.2.3. Seja $(P, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Um *ideal ordenado* de P é um subconjunto $Q \subseteq P$ que satisfaz a condição de que $x \leq y$ com $y \in Q$ implica que $x \in Q$.

Proposição 2.2.4. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso.*

(1) *A relação $\leq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{S}$.*

(2) *Para $e, f \in E(\mathcal{S})$ temos que $e \leq f$ se e somente se $e = ef = fe$.*

(3) *Se $s \leq t$ e $u \leq v$ então $su \leq tv$.*

(4) *Se $s \leq t$ então $s^*s \leq t^*t$ e $ss^* \leq tt^*$.*

(5) *$E(\mathcal{S})$ é um ideal ordenado de $\mathcal{S}$.*

Demonstração.

(1) De $s = s(s^*s)$ temos $s \leq s$ para qualquer $s \in \mathcal{S}$ e temos a reflexividade. Se $s \leq t$ e $t \leq s$, usando o Lema 2.2.2 temos $s = ss^*t$ e $t = tt^*s$. Assim, usando a comutatividade dos idempotentes

$$s = ss^*t = ss^*tt^*s = tt^*ss^*s = tt^*s = t$$

temos a antissimetria. Finalmente se $s \leq t$ e $t \leq u$, temos $s = te$ e $t = uf$ para $e, f \in E(\mathcal{S})$. Obtemos então,

$$s = te = ufe.$$

Como $ef \in E(\mathcal{S})$ pela Proposição 2.1.6(4), $s \leq u$ por definição e provamos a transitividade.

(2) ($\Rightarrow$) Se $e \leq f$ temos que existe $u \in E(\mathcal{S})$ tal que $e = fu$. Como idempotentes comutam, $fe = ffu = fu =$

e e $ef = fe = e$. ($\Leftarrow$) Da igualdade $e = fe$ segue imediatamente que $e \leq f$.

(3) Se $s \leq t$ e $u \leq v$ então existem $e, f \in E(\mathcal{S})$ tais que $s = te$ e $u = vf$. Pelo Lema 2.1.7, existe $i \in E(\mathcal{S})$ tal que $ev = vi$. Assim, temos

$$su = t(ev)f = tvif,$$

ou seja, $su \leq tv$, uma vez que $if \in E(\mathcal{S})$ pois o conjunto dos idempotentes é fechado por concatenação.

(4) Sejam $s, t \in \mathcal{S}$ tais que $s \leq t$. O Lema 2.2.2 garante que $s^* \leq t^*$, e por (3) provada acima, $s^*s \leq t^*t$ e $ss^* \leq tt^*$.

(5) Sejam $s \in \mathcal{S}$ e $e \in E(\mathcal{S})$ tais que $s \leq e$. Então $s = ef$ para algum $f \in E(\mathcal{S})$. Pela Proposição 2.1.6(4), $s \in E(\mathcal{S})$.

$\square$

Definição 2.2.5. Um *semirreticulado com ínfimo* é um conjunto parcialmente ordenado no qual todo par de elementos possui um ínfimo. Se a e b são elementos do semi-reticulado, denotamos seu ínfimo por

$$a \wedge b := \inf\{a, b\}.$$

Proposição 2.2.6. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo, e considere $(E(\mathcal{S}), \leq)$ como um conjunto ordenado. Então $E(\mathcal{S})$ é um semirreticulado com ínfimo dado por*

$$e \wedge f = ef.$$

Demonstração. Note que trivialmente $e(ef) = ef$ e por comutatividade, $f(ef) = eff = ef$; segue que $ef \leq e$ e $ef \leq f$. Suponha que $i \in E(\mathcal{S})$ seja tal que $i \leq e$, $i \leq f$. Então $ei = i$ e

$fi = i$. Logo,

$$(ef)i = e(fi) = ei = i$$

o que prova que $i \leq ef$. Assim, ef satisfaz a condição de ser maior cota inferior. $\square$

3 C*-álgebras de Grupoides

Assim como com grupos, a partir de um grupoide podemos criar duas C*-álgebras, a cheia e a reduzida. Nesse capítulo apresentamos essas construções.

A menos de menção em contrário, nesse capítulo todo grupoide será um grupoide étale localmente compacto Hausdorff segundo-contável.

3.1 Álgebra de convolução

Considere G um grupo e $f, g : G \to \mathbb{C}$. Queremos definir o *produto de convolução* de f e g calculado em um elemento $s \in G$ usando a seguinte fórmula

$$(f * g)(s) = \sum_{r \in G} f(r) g(r^{-1} s). \tag{3.1}$$

Note que essa fórmula faz sentido quando podemos atribuir um valor ao somatório do lado direito. Caso nosso grupo seja finito, isso sempre acontece. Já se o grupo for discreto, podemos exigir que f e g sejam diferentes de zero apenas em um conjunto finito de elementos de G. No caso mais geral, com G um grupo topológico e usando a medida de Haar, o produto faz sentido quando f e g possuem *suporte compacto*.

Enxergando (3.1) sob outra ótica, podemos descrever essa soma como sendo a soma de todos os produtos $f(a)g(b)$ com $a, b \in G$ que satisfaçam $ab = s$. Essa descrição é a usada para definir o produto de convolução em grupoides.

Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide e $f, g \in C_c(\mathcal{G})$. O *produto* *de convolução* de f e g, calculado em $\gamma \in \mathcal{G}$ vale

$$(f * g)(\gamma) = \sum_{\alpha\beta=\gamma}^{(\alpha,\beta)\in\mathcal{G}^2} f(\alpha)g(\beta), \tag{3.2}$$

em que o somatório é definido como sendo zero quando não existirem α e β satisfazendo a condição $\alpha\beta = \gamma$.

Por questões estéticas, colocaremos a condição $(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}^2$ acima do símbolo de somatório.

Proposição 3.1.2. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Se $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ e $\gamma \in \mathcal{G}$, o conjunto*

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathcal{G}^2 : \alpha\beta = \gamma \text{ e } f(\alpha)g(\beta) \neq 0\}$$

é finito. O espaço vetorial complexo $C_c(\mathcal{G})$ é uma $*$-álgebra com multiplicação dada por (3.2) *e involução dada por*

$$f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}.$$

Além disso vale que $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(g)$.

Demonstração. Note que se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{G}$ com $\alpha\beta = \gamma$ então $\mathtt{r}(\gamma) = \mathtt{r}(\alpha)$ e $\mathtt{s}(\gamma) = \mathtt{s}(\beta)$. Logo, $\alpha \in \mathcal{G}^{\mathtt{r}(\gamma)}$ e $\beta \in \mathcal{G}_{\mathtt{s}(\gamma)}$. O Lema 1.3.9 nos garante que estes conjuntos são discretos. Assim, $\mathcal{G}^{\mathtt{r}(\gamma)} \cap \operatorname{supp}(f)$, bem como $\mathcal{G}_{\mathtt{s}(\gamma)} \cap \operatorname{supp}(g)$, é a interseção de um conjunto discreto com um conjunto compacto, sendo portanto finito. Observando que o conjunto do enunciado está contido em

$$\Big(\mathcal{G}^{\mathtt{r}(\gamma)} \cap \operatorname{supp}(f)\Big) \times \Big(\mathcal{G}_{\mathtt{s}(\gamma)} \cap \operatorname{supp}(g)\Big),$$

segue sua finitude. Esse fato garante a boa definição do produto de convolução dado por (3.2).

Se $\gamma \in \operatorname{supp}(f * g)$, então deve existir uma net $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $\gamma_\lambda \to \gamma$ e $(f * g)(\gamma_\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Essa última condição nos permite encontrar nets $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{\beta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tais que

$\alpha_\lambda\beta_\lambda = \gamma_\lambda$ e $f(\alpha_\lambda), g(\beta_\lambda) \neq 0$. Note então que $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \operatorname{supp}(f)$ e $\{\beta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \operatorname{supp}(g)$. Como os suportes de f e g são compactos, passando para uma subnet e renomeando os índices, segue que as nets $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ e $\{\beta_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ convergem, digamos, para α e β. Por definição, temos que $\alpha \in \operatorname{supp}(f)$ e $\beta \in \operatorname{supp}(g)$. Mais ainda, como a multiplicação é contínua,

$$\gamma = \lim \gamma_\lambda = \lim \alpha_\lambda\beta_\lambda = \lim \alpha_\lambda \lim \beta_\lambda = \alpha\beta.$$

Disso segue que $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(g)$.

Relembrando a Observação 1.1.8, temos que $\operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(g)$ é a imagem da operação de multiplicação aplicada no conjunto $(\operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(g)) \cap \mathcal{G}^2$. Como $\mathcal{G}$ é Hausdorff, $\mathcal{G}^0$ também o é; segue da Proposição 1.2.11 que $\mathcal{G}^2$ é fechado. Agora, $(\operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(g)) \cap \mathcal{G}^2$ é a interseção do compacto $\operatorname{supp}(f) \times \operatorname{supp}(g)$ com o fechado $\mathcal{G}^2$, sendo portanto compacto. Segue da continuidade da multiplicação que $\operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(g)$ é compacto. Finalmente $\operatorname{supp}(f * g)$ é um compacto, pois é fechado contido em um compacto.

Daí segue a boa definição do produto de convolução em $C_c(\mathcal{G})$. A involução também está bem definida, uma vez que para $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\operatorname{supp}(f^*) = \mathtt{i}(\operatorname{supp}(f))$ permanece compacto, uma vez que é a imagem de um compacto pela inversão. Verificar que $C_c(\mathcal{G})$ forma uma $*$-álgebra é exercício de rotina. Vejamos, por exemplo, que esse produto é associativo. De fato, dadas $f, g, h \in C_c(\mathcal{G})$, e $\gamma \in \mathcal{G}$, usando a associatividade do produto em $\mathcal{G}$ temos

$$\big((f * g) * h\big)(\gamma) = \sum_{\alpha z = \gamma} (f * g)(\alpha)h(z) =$$

$$= \sum_{\alpha z = \gamma}\left(\sum_{xy = \alpha} f(x)g(y)\right)h(z) = \sum_{\alpha z = \gamma}\sum_{xy = \alpha} f(x)g(y)h(z) =$$

$$= \sum_{xyz=\gamma} f(x)g(y)h(z) = \sum_{x\beta=\gamma} f(x) \left(\sum_{yz=\beta} g(y)h(z) \right) =$$
$$= \sum_{x\beta=\gamma} f(x)(g*h)(\beta) = \big(f*(g*h)\big)(\gamma).$$

□

Lema 3.1.3. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então*

$$C_c(\mathcal{G}) = \operatorname{span}\{f \in C_c(\mathcal{G}) : \operatorname{supp}(f) \text{ é uma bisseção}\}.$$

Demonstração. Seja $f \in C_c(\mathcal{G})$. Sabemos que $\mathcal{G}$ possui uma base de bisseções abertas, pelo Lema 1.3.8. Como em particular essa base de abertos cobre o compacto $\operatorname{supp}(f)$, podemos extrair uma subcobertura finita do mesmo, digamos $\{U_i\}$, $i = 1, \ldots, n$. Como $\operatorname{supp}(f)$ é compacto e Hausdorff, também é paracompacto. Por [Dugundji 1966, VIII, Teorema 4.2], existe uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i=1}^n$, isto é, um conjunto de funções contínuas $h_i : \mathcal{G} \to [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$ tais que

$$\sum_{i=1}^n h_i = 1$$

no suporte de f e $\operatorname{supp}(h_i) \subseteq U_i$. Considerando o produto pontual $f_i = f \cdot h_i$, $i = 1, \ldots, n$, temos que

$$f = \sum_{i=1}^n f_i$$

e $\operatorname{supp}(f_i) \subseteq U_i$ é uma bisseção, como desejado. □

Lema 3.1.4. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Se $U, V \subseteq \mathcal{G}$ são bisseções abertas e $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ satisfazem $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ e $\operatorname{supp}(g) \subseteq V$ então $\operatorname{supp}(f*g) \subseteq UV$ e para $\gamma = \alpha\beta \in UV$, temos*

$$(f*g)(\gamma) = f(\alpha)g(\beta).$$

Além disso, vale que $C_c(\mathcal{G}^0)$ é uma $*$-subálgebra de $C_c(\mathcal{G})$.

Demonstração. Como $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ e $\operatorname{supp}(g) \subseteq V$, a Proposição 3.1.2 nos garante que $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(g) \subseteq UV$. Também, a demonstração dessa mesma proposição nos diz que o conjunto

$$A = \{(\mu, \nu) \in \mathcal{G}^2 : \mu\nu = \gamma \text{ e } f(\mu)g(\nu) \neq 0\}$$

é finito e está contido em

$$\left(\mathcal{G}^{\mathtt{r}(\gamma)} \cap U\right) \times \left(\mathcal{G}_{\mathtt{s}(\gamma)} \cap V\right).$$

Como U é bisseção, $\mathtt{r}$ restrita a um subconjunto de U é bijetora, assim $\mathcal{G}^{\mathtt{r}(\gamma)} \cap U = \mathtt{r}^{-1}(\mathtt{r}(\gamma)) \cap U$ é um conjunto unitário. Da mesma forma, $\mathtt{s}$ restrito a um subconjunto de V é bijetora e $\mathcal{G}_{\mathtt{s}(\gamma)} \cap V = \mathtt{s}^{-1}(\mathtt{s}(\gamma)) \cap V$ é unitário.

Como $\gamma = \alpha\beta \in UV$, temos que $A \subseteq \{(\alpha, \beta)\}$. Na fórmula da convolução (3.2), a soma do lado direito não é nula exatamente quando $A = \{(\alpha, \beta)\}$, logo temos

$$(f * g)(\gamma) = f(\alpha)g(\beta).$$

Os Lemas 1.3.3 e 1.2.10 garantem que $\mathcal{G}^0$ é aberto e fechado em $\mathcal{G}$. Assim, dada $f \in C_c(\mathcal{G}^0)$, podemos estendê-la de maneira contínua para $f \in C_c(\mathcal{G})$, bastando defini-la como sendo zero fora de $\mathcal{G}^0$. Logo, segue que $C_c(\mathcal{G}^0)$ é uma $*$-subálgebra de $C_c(\mathcal{G})$. □

Corolário 3.1.5. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Sejam $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ e $h \in C_c(\mathcal{G}^0)$ tais que o suporte de f é uma bisseção. Então valem as seguintes afirmações:*

(1) *$f^* * f \in C_c(\mathcal{G}^0)$ possui suporte contido em $\mathtt{s}(\operatorname{supp}(f))$ e para todo $\gamma \in \operatorname{supp}(f)$,*

$$(f^* * f)(\mathtt{s}(\gamma)) = |f(\gamma)|^2.$$

(2) *$f * f^* \in C_c(\mathcal{G}^0)$ possui suporte contido em $\mathtt{r}(\mathrm{supp}(f))$ e para todo $\gamma \in \mathrm{supp}(f)$,*

$$(f * f^*)(\mathtt{r}(\gamma)) = |f(\gamma)|^2.$$

(3) *para todo $\gamma \in \mathcal{G}$,*

$$(h * g)(\gamma) = h(\mathtt{r}(\gamma))g(\gamma), \qquad (g * h)(\gamma) = g(\gamma)h(\mathtt{s}(\gamma)).$$

(4) *se $\mathcal{G}^0$ é compacto, então $\mathbb{1}_{\mathcal{G}^0}$ é a unidade de $C_c(\mathcal{G})$.*

Demonstração. (1) Note que pela Proposição 3.1.2,

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}(f^* * f) \subseteq \mathrm{supp}(f^*)\,\mathrm{supp}(f) = \\ = (\mathrm{supp}(f))^{-1}\,\mathrm{supp}(f) = \mathtt{s}(\mathrm{supp}(f)).\end{aligned}$$

Como $\mathtt{s}(\mathrm{supp}(f))$ é subconjunto de $\mathcal{G}^0$, $f^* * f \in C_c(\mathcal{G}^0)$. Mais que isso, se $\gamma \in \mathrm{supp}(f)$ então

$$\mathtt{s}(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma \in \mathrm{supp}(f^*)\,\mathrm{supp}(f).$$

Aplicando o Lema 3.1.4, temos que

$$(f^* * f)(\mathtt{s}(\gamma)) = f^*(\gamma^{-1})f(\gamma) = \overline{f\left((\gamma^{-1})^{-1}\right)}f(\gamma) = |f(\gamma)|^2,$$

como desejado.

(2) Análogo a (1).

(3) Para $\gamma \in \mathcal{G}$, $(h * g)(\gamma) = \sum_{\alpha\beta=\gamma} h(\alpha)g(\beta)$. Como o suporte de h está em $\mathcal{G}^0$, podemos assumir que $\alpha \in \mathcal{G}^0$. Mas isso nos garante que $\alpha^2 = \alpha$, de modo que

$$\gamma = \alpha\beta = \alpha\alpha\beta = \alpha\gamma,$$

e multiplicando por inversos, $\alpha = \gamma\gamma^{-1} = \mathtt{r}(\gamma)$. Daí, cancelando a unidade, obtemos $\gamma = \gamma\gamma^{-1}\beta = \beta$. Logo, o somatório se resume à única parcela

$$(h * g)(\gamma) = h(\mathtt{r}(\gamma))g(\gamma).$$

O caso $g * h$ é análogo.

(4) Pelos Lemas 1.3.3 e 1.2.10, $\mathcal{G}^0$ é aberto e fechado em $\mathcal{G}$. Logo $\mathbb{1}_{\mathcal{G}^0}$ é contínua e pertence a $C_c(\mathcal{G}^0)$. Considere $l \in C_c(\mathcal{G})$ e $\gamma \in \mathcal{G}$. Pelo item (3),

$$(\mathbb{1}_{\mathcal{G}^0} * l)(\gamma) = \mathbb{1}_{\mathcal{G}^0}(\mathtt{r}(\gamma))l(\gamma) = 1 \cdot l(\gamma) = l(\gamma) \quad \text{e}$$
$$(l * \mathbb{1}_{\mathcal{G}^0})(\gamma) = l(\gamma)\mathbb{1}_{\mathcal{G}^0}(\mathtt{s}(\gamma)) = l(\gamma) \cdot 1 = l(\gamma),$$

provando o enunciado. □

Observação 3.1.6. Note que, nas condições e notação do corolário anterior, mostramos que $f^* * f$ tem suporte em $\mathcal{G}^0$. Assim se $\alpha \in \mathcal{G}^0$, temos que $\alpha = \mathtt{s}(\alpha)$ e logo

$$(f^* * f)(\alpha) = (f^* * f)(\mathtt{s}(\alpha)) = |f(\alpha)|^2.$$

Tomando o supremo sobre todos os $\alpha \in \mathcal{G}^0$, obtemos a igualdade

$$\|f^* * f\|_\infty = \|f\|_\infty^2.$$

Corolário 3.1.7. *O produto de convolução em $C_c(\mathcal{G}^0)$ reduz-se ao produto pontual, de modo que $C_c(\mathcal{G}^0)$ é uma $*$-subálgebra comutativa de $C_c(\mathcal{G})$.*

Demonstração. Dadas $g, h \in C_c(\mathcal{G}^0)$, o Lema 3.1.4 permite enxergar $g \in C_c(\mathcal{G})$, de modo que o Corolário 3.1.5(3) se aplica. Para $\gamma \in \mathcal{G}$, temos que

$$(h * g)(\gamma) = h(\mathtt{r}(\gamma))g(\gamma).$$

Se $\gamma \notin \mathcal{G}^0$, $g(\gamma) = 0$ implica $(h * g)(\gamma) = 0$. Se $\gamma \in \mathcal{G}^0$, então $\gamma = \mathtt{r}(\gamma)$ e logo $(h * g)(\gamma) = h(\gamma)g(\gamma)$. O mesmo vale para $g * h$. □

3.2 A C*-álgebra cheia

Proposição 3.2.1. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Para cada $f \in C_c(\mathcal{G})$, existe uma constante $K_f \geq 0$ tal que*

$$\|\pi(f)\| \leq K_f$$

para qualquer representação $\pi : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de $C_c(\mathcal{G})$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se o suporte de f é uma bisseção, podemos tomar $K_f = \|f\|_\infty$.

Demonstração. Seja $f \in C_c(\mathcal{G})$. Usando o Lema 3.1.3, podemos escrever

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i, \tag{3.3}$$

para algum $n \in \mathbb{N}^*$, com $\operatorname{supp}(f_i)$ uma bisseção para todo $i = 1, \ldots, n$. Como $\operatorname{supp}(f_i)$ é um subconjunto fechado do compacto $\operatorname{supp}(f)$, ele próprio é compacto, de modo que $\|f_i\|_\infty$ é finito para cada i. Defina $K_f = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty$.

Considere $\pi : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ uma representação arbitrária. Como visto em [Murphy 1990, Teorema 2.1.7], para $h \in C_c(\mathcal{G}^0)$ vale que o espectro de $\pi(h)$ está contido no espectro de h, de modo que

$$\|\pi(h)\| \leq \|h\|_\infty, \; \forall\, h \in C_c(\mathcal{G}^0).$$

Agora, pelo Corolário 3.1.5, $f_i^* * f_i$ tem suporte em $\mathcal{G}^0$ e pela Observação 3.1.6, $\|f_i^* * f_i\|_\infty = \|f_i\|_\infty^2$, para qualquer $i = 1, \ldots, n$. Assim, pela identidade da C*-norma, temos

$$\|\pi(f_i)\|^2 = \|\pi(f_i)^*\pi(f_i)\| = \|\pi(f_i^* * f_i)\| \leq \|f_i^* * f_i\|_\infty = \|f_i\|_\infty^2.$$

Segue disso $\|\pi(f_i)\| \leq \|f_i\|_\infty$ para cada i. Finalmente, aplicando a desigualdade triangular,

$$\|\pi(f)\| = \left\|\pi\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} f_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} \pi(f_i)\right\| \leq$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \|\pi(f_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty = K_f.$$

Se f tem suporte numa bisseção, só existe um termo na soma (3.3), e $K_f = \|f\|_\infty$. $\square$

Teorema 3.2.2. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Então existe uma C^*-álgebra $C^*(\mathcal{G})$ e um $*$-homomorfismo $\iota : C_c(\mathcal{G}) \to C^*(\mathcal{G})$, cuja imagem é densa em $C^*(\mathcal{G})$, tal que, para qualquer representação $\pi : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, existe uma representação $\psi : C^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisfaz $\psi \circ \iota = \pi$. A C^*-norma $|||\cdot|||$ de $C^*(\mathcal{G})$ satisfaz*

$$\|\pi(f)\| \leq |||\iota(f)|||$$

para toda $f \in C_c(\mathcal{G})$, e toda π representação de $C_c(\mathcal{G})$.

Demonstração. A proposição anterior mostra que, para cada $f \in C_c(\mathcal{G})$,

$$\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ é uma representação de } C_c(\mathcal{G})\}$$

é um conjunto limitado superiormente por K_f. Também é não vazio por causa da representação nula, então podemos tomar o supremo sobre esse conjunto. Defina $\rho : C_c(\mathcal{G}) \to [0, \infty)$ por

$$\rho(f) = \sup\{\|\pi(f)\| : \pi \text{ é uma representação de } C_c(\mathcal{G})\}.$$

Note que para qualquer $f \in C_c(\mathcal{G})$ e qualquer representação $\pi : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, temos que a função $f \to \|\pi(f)\|$ é uma $*$-seminorma. Como o supremo se comporta bem com desigualdades e produtos, segue que ρ também é uma $*$-seminorma.

Disso segue uma construção padrão em C*-álgebras: consideramos o ideal fechado autoadjunto

$$N := \{f \in C_c(\mathcal{G}) : \rho(f) = 0\},$$

e definimos $C^*(\mathcal{G})$ como sendo o completamento do quociente $C_c(\mathcal{G})/N$ com relação à norma induzida por ρ, que será denotada por $|||\cdot|||$. Além disso, definimos o $*$-homomorfismo

$$\begin{aligned} \iota : C_c(\mathcal{G}) &\to C^*(\mathcal{G}) \\ f &\mapsto [f] \end{aligned}$$

como sendo a inclusão canônica de $C_c(\mathcal{G})$ em $C^*(\mathcal{G})$. Agora, se $\pi : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma representação e $f \in C_c(\mathcal{G})$ é arbitrária, como ρ é o supremo sobre as normas de todas as representaçãosentações,

$$\|\pi(f)\| \leq \rho(f) = |||[f]||| = |||\iota(f)|||.$$

Em particular, se $|||[f]||| = 0$, então $\|\pi(f)\| = 0$ garante que $\pi(f) = 0$ de modo que N é mapeado no subespaço nulo de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Segue dai que podemos passar π para o quociente $C_c(\mathcal{G})/N$. Denote por

$$\begin{aligned} \psi : C^*(\mathcal{G}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ [f] &\mapsto \pi(f) \end{aligned}$$

essa extensão para o quociente. Pelo parágrafo anterior,

$$\|\psi([f])\| \leq |||[f]|||.$$

Logo ψ é uma função linear limitada que satisfaz $\psi \circ \iota = \pi$. Mais que isso, como π é uma representação, vale que

$$\psi([f][g]) = \psi([fg]) = \pi(fg) = \pi(f)\pi(g) = \psi([f])\psi([g])$$

bem como $\psi([f^*]) = \psi([f])^*$. Assim, ψ é de fato uma representação. $\square$

Note que em nenhum momento garantimos que ι é injetora. Apesar disso, iremos considerar $C_c(\mathcal{G})$ estando contido dentro de $C^*(\mathcal{G})$ da mesma forma.

Exemplo 3.2.3. *(Ação de grupo).* Sejam X um espaço compacto Hausdorff e G um grupo discreto agindo em X, e considere o grupoide $\mathcal{G} = G \times X$ como no Exemplo 1.1.12. Denote por e a unidade do grupo e dado $g \in G$, seja $X_g := \{g\} \times X$. Como X é compacto, temos a igualdade $C(X) = C_c(X) = C_b(X) = C_0(X)$.

Note que as funções

$$U_g := \mathbb{1}_{X_g}, \quad g \in G$$

são elementos de $C_c(\mathcal{G})$. Lembrando que $\mathcal{G}^0 = X_e \simeq X$, temos uma inclusão $\pi : C(\mathcal{G}^0) \simeq C(X) \to C_c(\mathcal{G})$ dada por

$$\pi(f)(g,x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } g = e \\ 0, & \text{se } g \neq e \end{cases}$$

que consiste em estender f como sendo zero fora de $\mathcal{G}^0$.

Para $f \in C(X)$ e $g \in G$, vale que

$$\left(U_g * \pi(f) * U_g^*\right)(h,x) = \sum_{\alpha\beta\gamma=(h,x)} \mathbb{1}_{X_g}(\alpha)\pi(f)(\beta)\mathbb{1}_{X_g}^*(\gamma) \qquad (3.4)$$

para (h,x) em $\mathcal{G}$. Note que $\pi(f)(\beta)$ é nãonulo somente se $\beta = (e,y)$ para algum $y \in X$. Para que $\mathbb{1}_{X_g}(\alpha)$ seja não nulo, temos que $\alpha = (g,w)$ para algum $w \in X$. Por fim, para que $\mathbb{1}_{X_g}^*(\gamma)$ seja não-nulo, devemos ter $\gamma = (g^{-1}, z)$ para algum $z \in X$. Dessa forma, calculando o produto

$$\alpha\beta\gamma = (g,w)(e,y)(g^{-1},z) = (e,z).$$

Além disso, para que possamos calcular esse produto devemos ter $y = g^{-1}z$. Igualando esse produto a (h,x), temos que $z = x$ e $h = e$. Logo, o produto $U_g * \pi(f) * U_g^*$ só é não nulo quando

$h = e$ e nesse caso

$$\left(U_g * \pi(f) * U_g^*\right)(e,x) = \pi(f)(e,y) = f(y) = f(g^{-1}x). \quad (3.5)$$

Além disso, veja que para $(h,x) \in \mathcal{G}$, temos

$$\left(U_g * U_g^*\right)(h,x) = \sum_{\alpha\beta=(h,x)} \mathbb{1}_{X_g}(\alpha)\mathbb{1}_{X_g}^*(\beta).$$

Novamente, os termos não-nulos no lado direito da equação acima só ocorrem se $\alpha = (g,y)$ e $\beta = (g^{-1},z)$ para $y,z \in X$ com $y = g^{-1}z$. Nesse caso, $\alpha\beta = (e,z) = (h,x)$. Assim, $U_g * U_g^*$ vale 1 em qualquer elemento da forma (e,x), o que nos permite escrever

$$U_g * U_g^* = \mathbb{1}_{X_e}, \quad (3.6)$$

que é a identidade em $C_c(\mathcal{G})$. De modo análogo, mostra-se que $U_g^* * U_g = \mathbb{1}_{X_e}$. Logo, para qualquer $g \in \mathcal{G}$, $U_g \in C_c(\mathcal{G})$ é unitário e temos que

$$\begin{aligned} U : G &\to C_c(\mathcal{G}) \\ g &\mapsto U_g \end{aligned}$$

é uma representação unitária.

Vamos usar essas equações para provar que $C^*(\mathcal{G})$ é isomorfo a um produto cruzado.

Um C*-sistema dinâmico é uma tripla (A,G,α) com A uma C*-álgebra, G um grupo localmente compacto e $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(A)$ um homomorfismo. Uma representação covariante desse C*-sistema dinâmico é um par (π,U) com π uma representação de A em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e $g \mapsto U_g$ é uma representação unitária do grupo G no mesmo espaço $\mathcal{H}$ tal que

$$U_g\pi(a)U_g^* = \pi(\alpha_g(a))$$

para quaisquer $g \in G$, $a \in A$.

Definindo

$$\alpha : G \to \operatorname{Aut}\big(C(X)\big)$$

como $\alpha_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$, $(C(X), G, \alpha)$ forma um C*-sistema dinâmico.

Como $C_c(\mathcal{G})$ é denso em $C^*(\mathcal{G})$, podemos estender π e U por continuidade para representações $\pi : C(X) \to C^*(\mathcal{G})$ e $U : G \to C^*(\mathcal{G})$. As equações (3.5) e (3.6) nos dizem que

$$\pi(\alpha_g(f)) = U_g * \pi(f) * U_g^*,$$

de modo que (π, U) é uma representação covariante de $(C(X)$, G, $\alpha)$ em $C^*(\mathcal{G})$.

Como visto em [Davidson 1996, Capítulo VIII], temos que essa representação covariante (π, U) dá origem a uma $*$-representação $\pi \rtimes U : C(X) \rtimes_\alpha G \to C^*(\mathcal{G})$ que satisfaz

$$\pi \rtimes U \left(\sum_{g \in \mathcal{G}}^{\text{finita}} f_g \, g \right) = \sum_{g \in \mathcal{G}}^{\text{finita}} \pi(f_g) U_g,$$

com $C(X) \rtimes_\alpha G$ sendo o produto cruzado. O subconjunto $C_c(G$, $C(X))$, que é denso no produto cruzado, pode ser pensado exatamente como o conjunto das somas finitas $\sum_{g \in \mathcal{G}}^{\text{finita}} f_g \, g$, em que $f_g \in C(X)$ para cada g.

Além disso, estamos no caso em que $C(X)$ é unital e G é discreto. Assim, existem inclusões canônicas

$$\begin{aligned} i : G &\to C_c(G, C(X)) & \qquad j : C(X) &\to C_c(G, C(X)) \\ g &\mapsto \mathbb{1}_X \, g & f &\mapsto f \, e. \end{aligned}$$

Por continuidade, essas inclusões podem ser estendidas para o produto cruzado $C(X) \rtimes_\alpha G$.

Para $f \in C_c(\mathcal{G})$ e $g \in G$, defina a função $f_g \in C(X)$ por $f_g(x) = f(g, x)$. Assim, usando as inclusões canônicas, podemos definir o $*$-homomorfismo

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} : C_c(\mathcal{G}) &\to C(X) \rtimes_\alpha G\\ f &\mapsto \sum_{g\in G} j(f_g)i(g).\end{aligned}$$

Pela propriedade universal da C*-álgebra cheia, existe um $*$-homomorfismo $\psi : C^*(\mathcal{G}) \to C(X) \rtimes_\alpha G$ tal que $\psi \circ \iota = \tilde{\psi}$.

Vamos mostrar que ψ é a inversa de $\pi \rtimes U$. Para isso, basta mostrar em subconjuntos densos de $C^*(\mathcal{G})$ e de $C(X) \rtimes_\alpha G$.

Para $f \in C(X)$ e $g \in G$, podemos considerar $f\,g \in C_c(G, C(X))$ e temos

$$\psi \circ (\pi \rtimes U)\,(f\,g) = \psi\,(\pi(f)U_g) = \sum_{h\in G} j(\pi(f)_h)j((U_g)_h)i(h).$$

Como o termo $(U_g)_h$ só é diferente de zero quando $g = h$ e nesse caso $(U_g)_g = 1$, então o somatório se reduz a

$$\psi \circ (\pi \rtimes U)\,(f\,g) = j(\pi(f)_g)i(g) = f\,g.$$

Por outro lado, para $h \in C_c(\mathcal{G})$, temos que

$$(\pi \rtimes U) \circ \psi(h) = (\pi \rtimes U)\left(\sum_{g\in G} j(h_g)i(g)\right) = \sum_{g\in G} \pi(h_g)U_g.$$

Note então que $\operatorname{supp}(h_g) \subseteq X_g$, de modo que $\pi(h_g)U_g = \pi(h_g)$. Como $h = \sum_{g\in G} \pi(h_g)$, a equação acima nos diz que $(\pi \rtimes U) \circ \psi(h) = h$. Com isso provamos que ψ e $\pi \rtimes U$ são inversas uma da outra e obtemos $C^*(\mathcal{G}) \cong C(X) \rtimes_\alpha G$. $\triangleleft$

Exemplo 3.2.4. *(Matrizes).* Considere o grupoide R do Exemplo 1.2.8. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ e cada par $u, v \in X^n$, defina

$$\theta_n(u, v) := \mathbb{1}_{Z(u,v)} \in C_c(R).$$

Note que para $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in X^n$ e $(x, y) \in R$, temos

$$\theta_n(u, v)^*(x, y) = \overline{\theta_n(u, v)(y, x)} = \overline{\mathbb{1}_{Z(u,v)}(y, x)} = \mathbb{1}_{Z(u,v)}(y, x)$$

pois temos uma função a valores reais. O valor dessa função está condicionado a (y,x) pertencer ou não a $Z(u,v)$. Mas $(y,x) \in Z(u,v)$ é equivalente a dizer que $(x,y) \in Z(v,u)$. Sendo assim,

$$\mathbb{1}_{Z(u,v)}(y,x) = \mathbb{1}_{Z(v,u)}(x,y),$$

o que nos dá a igualdade $\theta_n(u,v)^* = \theta_n(v,u)$.

Além disso, se $n \in \mathbb{N}^*$, $u,v,w,z \in X^n$ e $(x,y) \in R$ sabemos que

$$\big(\theta_n(u,v) * \theta_n(w,z)\big)(x,y) = \sum_{\alpha\beta=(x,y)} \mathbb{1}_{Z(u,v)}(\alpha)\mathbb{1}_{Z(w,z)}(\beta).$$

Para que $\alpha\beta = (x,y)$ deve existir um $r \in X^\infty$ tal que $\alpha = (x,r)$, $\beta = (r,y)$. Note que o lado direito da equação acima só é diferente de zero quando $\mathbb{1}_{Z(u,v)}(x,r) = 1$ e $\mathbb{1}_{Z(w,z)}(r,y) = 1$, o que nos diz que $v = r_{[0,n)} = w$ e além disso, $(x,y) \in Z(u,z)$. Usando a notação $\delta_{v,w}$ para representar o delta de Kronecker, podemos então escrever

$$\theta_n(u,v) * \theta_n(w,z) = \delta_{v,w}\theta_n(u,z). \tag{3.7}$$

Note que, como as palavras $u,v \in X^n$ são sequências de zeros e uns, podemos pensá-los como representação em base binária de números naturais. Sendo assim, o conjunto das funções $\{\theta_n(u,v) : u,v \in X^n\}$ se comporta exatamente como a base canônica das matrizes de dimensão 2^n. De fato, seja $\{E_{i,j}\}_{i,j=1}^{2^n}$ a base canônica de $M_{2^n}(\mathbb{C})$. Sabemos que para $i,j,k,\ell \in \{1,\ldots,2^n\}$ vale a igualdade

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell},$$

que é análoga à equação (3.7).

Definindo

$$A_n := \operatorname{span}\{\theta_n(u,v) : u,v \in X^n\}$$

temos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : A_n &\to M_{2^n}(\mathbb{C}) \\ \sum_{u,v} a_{u,v}\theta_n(u,v) &\mapsto [a_{u,v}]. \end{aligned}$$

Note que por definição

$$Z(u,v) = Z(u0,v0) \cup Z(u0,v1) \cup Z(u1,v0) \cup Z(u1,v1).$$

Porém $Z(u,v) \cap Z(ui,vj) = \emptyset$ sempre que $i,j \in \{0,1\}$ com $i \neq j$. Então concluímos que

$$Z(u,v) = Z(u0,v0) \sqcup Z(u1,v1)$$

pois os conjuntos do lado direito da igualdade são disjuntos, e logo vale

$$\theta_n(u,v) = \theta_{n+1}(u0,v0) + \theta_{n+1}(u1,v1). \tag{3.8}$$

Com isso obtemos que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Podemos fazer identificação $M_{2^{n+1}}(\mathbb{C}) \cong M_2(M_{2^n}(\mathbb{C}))$ da seguinte maneira

$$\left[a_{\tilde{u},\tilde{v}}\right]_{\tilde{u},\tilde{v}\in X^{n+1}} \mapsto \begin{bmatrix} \left[a_{u0,v0}\right]_{u,v\in X^n} & \left[a_{u0,v1}\right]_{u,v\in X^n} \\ \left[a_{u1,v0}\right]_{u,v\in X^n} & \left[a_{u1,v1}\right]_{u,v\in X^n} \end{bmatrix},$$

em que $u = \tilde{u}_{[0,n)}$ e $v = \tilde{v}_{[0,n)}$. Por causa de (3.8), a inclusão $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ é compatível com a inclusão bloco-diagonal

$$\begin{aligned} M_{2^n}(\mathbb{C}) &\hookrightarrow M_{2^{n+1}}(\mathbb{C}) \\ A &\mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A álgebra M_{2^∞}, que é o limite indutivo de $\{M_{2^n}(\mathbb{C})\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, é uma álgebra *uniformemente hiperfinita* [Davidson 1996, Exemplo II.5.1]. O Teorema III.5.2 desta última referência garante que essa classe de álgebras é unicamente determinada pelo seu número *supernatural* associado. Assim, temos que existe o isomorfismo

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n} \cong M_{2^\infty}$$

entre o limite indutivo e a C*-álgebra.

Além disso, se $|w| = |z|$, dada $f \in C(Z(w,z))$, o Teorema de Stone-Weierstrass garante que f está no fecho da $*$-álgebra gerada pelas funções $\theta_n(u,v)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $u, v \in X^n$. Desse modo

$$C(Z(u,v)) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n}.$$

Finalmente, dada $f \in C_c(R)$, f pode ser decomposta como soma de funções que pertencem a $C(Z(u,v))$ para u, v adequados, uma vez que os conjuntos $Z(u,v)$ formam uma base para a topologia de R. Logo $C_c(R) \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n}$.

Como as funções $\theta_n(u,v)$ pertencem a $C_c(R)$, temos $A_n \subseteq C_c(R)$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Isso garante que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n \subseteq C_c(R)$ e logo vale o isomorfismo

$$C^*(R) \cong \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n} \cong M_{2^n}.$$

◁

3.3 A C*-álgebra reduzida

Nessa seção, usamos a notação $\delta_\gamma := \mathbb{1}_{\{\gamma\}}$ para todo $\gamma \in \mathcal{G}$.

Teorema 3.3.1. *Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. Para cada $x \in \mathcal{G}^0$ existe uma representação $\pi_x : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{G}_x))$ tal que*

$$\pi_x(f)\delta_\gamma = \sum_{\alpha\in\mathcal{G}_{\mathrm{r}(\gamma)}} f(\alpha)\delta_{\alpha\gamma}.$$

Essa representação é chamada de representação regular *de* $C_c(\mathcal{G})$ *associada a* x*.*

Para cada $\eta \in \mathcal{G}$*, a transformação* $U_\eta : \ell^2(\mathcal{G}_{\mathtt{s}(\eta)}) \to \ell^2(\mathcal{G}_{\mathtt{r}(\eta)})$ *dada por*

$$U_\eta \delta_\gamma = \delta_{\gamma\eta^{-1}}$$

é um operador unitário e temos $\pi_{\mathtt{r}(\eta)} = U_\eta \pi_{\mathtt{s}(\eta)} U_\eta^*$*.*

Demonstração. Note que, estendendo a fórmula de convolução para o caso de funções não necessariamente contínuas, temos que para $f \in \ell^2(\mathcal{G}_x)$, $\gamma, \zeta \in \mathcal{G}_x$ vale

$$(f * \delta_\gamma)(\zeta) = \sum_{\alpha\beta=\zeta} f(\alpha)\delta_\gamma(\beta). \tag{3.9}$$

Porém note que o termo $\delta_\gamma(\beta)$ só é diferente de zero quando $\beta = \gamma$, caso em que vale 1. Daí temos que $\alpha\gamma = \zeta$, o que só é possível se $\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma)}$. Ocultando a dependência de ζ na fórmula (3.9), obtemos

$$(f * \delta_\gamma) = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma)}} f(\alpha)\delta_{\alpha\gamma}. \tag{3.10}$$

Definindo

$$\pi_x : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{G}_x))$$
$$f \mapsto \pi_x(f)$$

por $\pi_x(f)\delta_\gamma = f * \delta_\gamma$, segue das propriedades do produto de convolução que π_x é linear. Também é limitada, pois

$$\|\pi_x(f)\delta_\gamma\|_2 = \|f * \delta_\gamma\|_2 \leq \|f\|_\infty \|\delta_\gamma\|_2.$$

Para mostrar que de fato é uma representação, sejam $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\gamma, \zeta \in \mathcal{G}_x$. Por um lado

$$\langle \pi_x(f^*)\delta_\gamma, \delta_\zeta \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma)}} \langle f^*(\alpha)\delta_{\alpha\gamma}, \delta_\zeta \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma)}} \left\langle \overline{f(\alpha^{-1})}\delta_{\alpha\gamma}, \delta_\zeta \right\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma)}} \overline{f(\alpha^{-1})} \langle \delta_{\alpha\gamma}, \delta_\zeta \rangle . \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\langle \delta_\gamma, \pi_x(f)\delta_\zeta \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\zeta)}} \langle \delta_\gamma, f(\alpha)\delta_{\alpha\zeta} \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\zeta)}} \overline{f(\alpha)} \langle \delta_\gamma, \delta_{\alpha\zeta} \rangle . \quad (3.12)$$

Note que (3.11) é sempre zero exceto quando $\alpha\gamma = \zeta$; uma conta rápida mostra que nesse caso o valor da expressão é $\overline{f(\gamma\zeta^{-1})}$. Já para (3.12), seu valor só não é zero quando $\gamma = \alpha\zeta$, caso em que também obtemos $\overline{f(\gamma\zeta^{-1})}$. Portanto, obtemos a igualdade

$$\langle \pi_x(f^*)\delta_\gamma, \delta_\zeta \rangle = \langle \delta_\gamma, \pi_x(f)\delta_\zeta \rangle$$

e como γ, ζ são genéricos, obtemos a igualdade $\pi_x(f^*) = \pi_x(f)^*$, como desejado.

Para $\eta \in \mathcal{G}$, o operador U_η do enunciado é claramente unitário, com $U_\eta^* = U_{\eta^{-1}}$, pois para $\gamma \in \mathcal{G}_{\mathtt{s}(\eta)}$ qualquer

$$U_\eta^* U_\eta \delta_\gamma = U_{\eta^{-1}} \delta_{\gamma\eta^{-1}} = \delta_{\gamma\eta^{-1}\eta} = \delta_\gamma. \quad (3.13)$$

De modo análogo, $U_\eta U_\eta^* = \mathrm{Id}_{\ell^2(\mathcal{G}_{\mathtt{r}(\eta)})}$. Agora, se $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\eta \in \mathcal{G}$ e $\gamma \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\eta)}$ temos

$$U_\eta \pi_{\mathtt{s}(\eta)}(f) U_\eta^* \delta_\gamma = U_\eta \pi_{\mathtt{s}(\eta)}(f)\delta_{\gamma\eta} = U_\eta \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma\eta)}} f(\alpha)\delta_{\alpha\gamma\eta} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma\eta)}} f(\alpha) U_\eta \delta_{\alpha\gamma\eta} = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma\eta)}} f(\alpha)\delta_{\alpha\gamma\eta\eta^{-1}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{G}_{\mathtt{r}(\gamma\eta)}} f(\alpha)\delta_{\alpha\gamma} =$$

$$= \pi_{\mathtt{r}(\eta)}(f)\delta_\gamma.$$

Removendo a dependência em δ_γ, obtemos a igualdade do enunciado. □

Definição 3.3.2. Seja $\mathcal{G}$ um grupoide. A *C^*-álgebra reduzida* *de* $\mathcal{G}$, denotada por $C_r^*(\mathcal{G})$, é o completamento de

$$\left(\bigoplus_{x\in\mathcal{G}^0}\pi_x\right)(C_c(\mathcal{G})) \text{ em } \bigoplus_{x\in\mathcal{G}^0}\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{G}_x)). \tag{3.14}$$

A C*-norma de $C_r^*(\mathcal{G})$ é denotada por $\|\cdot\|_r$.

A propriedade universal de $C^*(\mathcal{G})$ nos dá um homomorfismo $\pi_r : C^*(\mathcal{G}) \to C_r^*(\mathcal{G})$ tal que $\pi_r \circ \iota = \bigoplus_{x\in\mathcal{G}^0}\pi_x$. Em particular, $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|$.

4 Ações de Semigrupos Inversos

Nesse capítulo, apresentamos uma construção algébrica que une grupoides e semigrupos inversos. Mostramos que a C*-álgebra gerada por essa construção possui uma propriedade universal interessante. Por fim, damos um exemplo de uma C*-álgebra clássica que pode ser obtida por essa construção.

4.1 Ação de semigrupo

Definição 4.1.1. Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso e X um espaço topológico localmente compacto Haurdorff. Uma *ação* de $\mathcal{S}$ em X é um homomorfismo de semigrupos $\theta : \mathcal{S} \to \mathcal{I}(X)$ tal que

(1) para cada $s \in \mathcal{S}$, θ_s é contínua e $\mathrm{Dom}(\theta_s)$ é aberto em X;

(2) $\displaystyle\bigcup_{s\in\mathcal{S}} \mathrm{Dom}(\theta_s) = X$.

Quando isso acontece, dizemos que a tripla $(\theta, \mathcal{S}, X)$ forma um *sistema*.

Até o fim desse capítulo, fixamos um sistema $(\theta, \mathcal{S}, X)$.

Segue da Equação (2.1) que

$$\theta_s\theta_{s^*}\theta_s = \theta_s \qquad \theta_{s^*}\theta_s\theta_{s^*} = \theta_{s^*}, \tag{4.1}$$

de modo que $\theta_{s^*} = \theta_s^{-1}$. Em particular se e é um idempotente, $e = e^*$ nos diz que que θ_e é a identidade em seu domínio. Mais que isso, (4.1) garante que $\mathrm{Dom}(\theta_s^{-1}) = \mathrm{Im}(\theta_s)$. Logo, por temos que θ_s^{-1} é contínua, garantindo que

$$\theta_s : \mathrm{Dom}(\theta_s) \to \mathrm{Im}(\theta_s) \tag{4.2}$$

é um homeomorfismo.

Se $e \in E(\mathcal{S})$, denotamos por

$$D_e := \mathrm{Dom}(\theta_e).$$

Note que de $\theta_{s^*s} = \theta_{s^*}\theta_s$, temos que o domínio de θ_s é igual a D_{s^*s}. Também, como $\mathrm{Im}(\theta_s) = \mathrm{Dom}(\theta_{s^*})$, temos que a imagem de θ_s é D_{ss^*}. Isso permite reescrever (4.2) como $\theta_s : D_{s^*s} \to D_{ss^*}$.

Observação 4.1.2. Da igualdade $\theta_e\theta_f = \theta_{ef}$ segue que $D_e \cap D_f = D_{ef}$ para quaisquer $e, f \in E(\mathcal{S})$.

Proposição 4.1.3. *Para $s \in \mathcal{S}$ e $e \in E(\mathcal{S})$, vale que*

$$\theta_s(D_e \cap D_{s^*s}) = D_{ses^*}.$$

Demonstração. Pela observação anterior, $D_e \cap D_{s^*s} = D_{es^*s}$, que é o domínio de θ_{es^*s}. Aplicando θ_s nesse conjunto, obtemos a imagem de $\theta_s\theta_{es^*s} = \theta_{ses^*s}$. Denote $f = ses^*s$ e note que a comutatividade dos idempotentes nos dá

$$f = ses^*s = ss^*se = se.$$

Usando a Proposição 2.1.6(6) vem

$$ff^* = sees^* = ses^*.$$

A imagem de θ_f é exatamente $D_{ff^*} = D_{ses^*}$ pela equação acima, provando o enunciado. ☐

Vale notar que, no teorema acima, $ses^* \in E(\mathcal{S})$ pela Proposição 2.1.6(5).

Usando o resultado acima, vamos iniciar a construção de um grupoide que sera nosso objeto de estudo até o final desse trabalho.

Definição 4.1.4. Denote por Ω o subconjunto de $\mathcal{S} \times X$ dado por

$$\Omega := \{(s, x) \in \mathcal{S} \times X : x \in D_{s^*s}\}. \tag{4.3}$$

Definimos a seguinte relação de equivalência em Ω: se (s, x), $(t, y) \in \Omega$ dizemos que $(s, x) \sim (t, y)$ se $x = y$ e existe um idempotente $e \in E(\mathcal{S})$ tal que $x \in D_e$ e $se = te$. A classe de equivalência de (s, x) será chamada de *germe de s em x* e será denotada por $[s, x]$.

Observação 4.1.5. Sejam $(s, x), (t, y) \in \Omega$ elementos equivalentes e e o idempotente dado pela definição. Considere $e_0 = es^*st^*t$. Como $se = te$ temos $se_0 = te_0$. Além disso, como x pertence a D_e, D_{s^*s} e D_{t^*t}, temos

$$x \in D_e \cap D_{s^*s} \cap D_{t^*t} = D_{es^*st^*t} = D_{e_0}.$$

Logo, e_0 satisfaz a condição da definição, com a vantagem de que $e_0 \leq s^*s$ e $e_0 \leq t^*t$.

Verifiquemos que de fato temos uma relação de equivalência em Ω.

Proposição 4.1.6. *A relação $\sim$ da Definição 4.1.4 é uma relação de equivalência.*

Demonstração. A reflexividade é imediata: se $(s, x) \in \Omega$, então fazendo $e = s^*s$ na definição da relação temos $(s, x) \sim (s, x)$.

A simetria também é direta: $(s, x) \sim (t, y)$ significa $x = y$ e $se = te$ para um idempotente e tal que $x \in D_e$. Basta inverter as igualdades e temos $y = x$ bem como $te = se$ com e idempotente tal que $y \in D_e$, de modo que $(t, y) \sim (s, x)$.

Para verificar a transitividade, suponha $(s, x) \sim (t, y)$ e $(t, y) \sim (u, z)$. Da primeira equivalência temos $x = y$ e $se = te$ sendo e

idempotente tal que $x, y \in D_e$. Da segunda equivalência temos $y = z$, $tf = uf$ e $y, z \in D_f$, para algum f idempotente.

Note que ef é um idempotente e que, comutando os idempotentes,

$$sef = tef = tfe = ufe = uef. \tag{4.4}$$

Além disso, $x = y = z$ e $x, y, z \in D_e \cap D_f = D_{ef}$, donde segue que $(s, x) \sim (u, z)$. $\square$

Proposição 4.1.7. *Dados $(s, x), (t, y) \in \Omega$ tais que $x = \theta_t(y)$, vale que*

(1) $(st, y) \in \Omega$,

(2) *o germe $[st, y]$ depende apenas dos germes $[s, x]$ e $[t, y]$.*

Demonstração. (1) Note de que o enunciado garante que $x \in \mathrm{Im}(\theta_t) = D_{tt^*}$, enquanto a definição $(s, x) \in \Omega$ nos dá $x \in D_{s^*s}$. Como θ_t é um homeomorfismo, $y = \theta_{t^*}(x)$. Usando a Proposição 4.1.3, temos

$$y \in \theta_{t^*}(D_{s^*s} \cap D_{tt^*}) = D_{t^*s^*st} = D_{(st)^*st}.$$

De fato, $(st, y) \in \Omega$.

(2) Para mostrar que $[st, y]$ não depende dos representantes, sejam $(s_1, x), (t_1, y)$ tais que $(s_1, x) \sim (s, x)$ e $(t_1, y) \sim (t, y)$. Então existem $e, f \in E(\mathcal{S})$ tais que $se = s_1e$, $tf = t_1f$, com $x \in D_e$, $y \in D_f$. Lembrando que θ_f é a identidade em D_f, temos

$$\theta_{t_1}(y) = \theta_{t_1}(\theta_f(y)) = \theta_{t_1f}(y) = \theta_{tf}(y) = \theta_t(\theta_f(y)) = \theta_t(y) = x.$$

Logo, $(s_1t_1, y) \in \Omega$. Agora, precisamos provar que $(s_1t_1, y) \sim (st, y)$. Note que $x \in D_e \cap D_{tt^*}$, logo

$$y \in \theta_{t^*}(D_e \cap D_{tt^*}) = D_{t^*et}.$$

Como $y \in D_f$ por hipótese, obtemos que

$$y \in D_f \cap D_{t^*et} = D_{ft^*et}.$$

Considere o idempotente $d = ft^*et$. Usando a comutatividade dos idempotentes,

$$\begin{aligned} s_1t_1d &= s_1t_1ft^*et = s_1tft^*et && (t_1f = tf) \\ &= s_1(tft^*)et = s_1e(tft^*)t && \text{(comut.)} \\ &= se(tft^*)t = s(tft^*)et && (s_1e = se) \\ &= std. \end{aligned}$$

Finalmente, $y \in D_d$, e $s_1st_1d = std$ garantem que $(s_1t_1, y) \sim (st, y)$. $\square$

4.2 Grupoide dos germes

Continuamos considerando Ω como na Definição 4.1.4. Seja

$$\mathcal{G} := \Omega / \sim \tag{4.5}$$

o conjunto de todos os germes e defina

$$\mathcal{G}^2 := \left\{ \big([s,x],[t,y]\big) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} : x = \theta_t(y) \right\}.$$

Definimos a multiplicação e inversão em $\mathcal{G}$ respectivamente como

$$[s,x] \cdot [t,y] := [st,y],$$
$$[s,x]^{-1} := [s^*, \theta_s(x)].$$

A Proposição 4.1.7 garante que o produto está bem definido. A inversão está bem definida pois

$$\theta_s(x) \in \operatorname{Im}(\theta_s) = D_{ss^*} = D_{(s^*)^*s^*}.$$

Proposição 4.2.1. *Com as operações definidas acima, $\mathcal{G}$ é um grupoide. O espaço das unidades $\mathcal{G}^0$ pode ser identificado com*

X através da correspondência

$$[e, x] \in \mathcal{G}^0 \mapsto x \in X$$

com e qualquer idempotente tal que $x \in D_e$.

Demonstração. Verifiquemos as condições da Definição 1.1.1.

(1)

$$([s, x]^{-1})^{-1} = [s^*, \theta_s(x)]^{-1} = [(s^*)^*, \theta_{s^*}(\theta_s(x))] =$$
$$= [s, \theta_{s^*s}(x)] = [s, x]$$

pois θ_{s^*s} é a identidade em D_{s^*s}.

(2) Suponha que $([s, x], [t, y]), ([t, y], [u, z]) \in \mathcal{G}^2$. Então temos que $x = \theta_t(y)$ e $y = \theta_u(z)$. Logo, $x = \theta_{tu}(z)$, o que mostra que $([s, x], [tu, z]) \in \mathcal{G}^2$. Além disso, pela Proposição 4.1.7, $[st, y] \in \mathcal{G}$, e de $y = \theta_u(z)$, temos que $([st, y], [u, z]) \in \mathcal{G}^2$. Finalmente,

$$[s, x] \cdot [tu, z] = [s(tu), z] = [(st)u, z] = [st, y] \cdot [u, z].$$

(3) Se $[s, x] \in \mathcal{G}$, note que $x \in D_{s^*s}$. Como θ_{s^*s} é a identidade em D_{s^*s}, temos $x = \theta_{s^*s}(x) = \theta_{s^*}(\theta_s(x))$. Assim,

$$([s, x], [s^*, \theta_s(x)]) \in \mathcal{G}^2.$$

Se $[t, y] \in \mathcal{G}$ é tal que $([s, x], [t, y]) \in \mathcal{G}^2$, temos

$$[s, x]^{-1}[s, x][t, y] = [s^*, \theta_s(x)][st, y] = [s^*st, y] = [t, y].$$

Do mesmo modo, se $[t, y] \in \mathcal{G}$ é tal que $([t, y], [s, x]) \in \mathcal{G}^2$, vale $y = \theta_s(x)$ e temos

$$[t, y][s, x]^{-1}[s, x] = [ts, x][s^*, \theta_s(x)] = [tss^*, \theta_s(x)] = [t, y],$$

como desejado.

Finalmente, por definição, $\mathcal{G}^0$ é o conjunto de todos os elementos da forma $[s, x]^{-1}[s, x] = [s^*, \theta_s(x)][s, x] = [s^*s, x]$ para algum $[s,x] \in \mathcal{G}$. Note então que s^*s é um idempotente de $\mathcal{S}$. Logo vale que

$$\mathcal{G}^0 \subseteq \{[e,x] : e \in E(\mathcal{S}), x \in X\}.$$

Por outro lado, se $[e,x]$ pertence ao conjunto do lado direito da igualdade acima, vale que

$$[e,x]^{-1}[e,x] = [e^*, \theta_e(x)][e,x] = [e^*e, x] = [e,x],$$

e assim $[e,x] \in \mathcal{G}^0$, mostrando a igualdade entre os conjuntos.

Pela definição da relação de equivalência, associação

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^0 &\to X \\ [e,x] &\mapsto x \end{aligned} \tag{4.6}$$

está bem definida e é injetora. Pela condição (2) da Definição 4.1.1, sempre é possível encontrar um s tal que $x \in D_{s^*s}$, logo a associação acima é sobrejetora. □

Os mapas *range* e *source* valem

$$\begin{aligned} \mathtt{r}\big([s,x]\big) &= [s,x][s,x]^{-1} = [s,x][s^*,\theta_s(x)] = [ss^*,\theta_s(x)] = \theta_s(x) \\ \mathtt{s}\big([s,x]\big) &= [s,x]^{-1}[s,x] = [s^*,\theta_s(x)][s,x] = [s^*s,x] = x \end{aligned}$$

onde usamos a associação (4.6).

Agora iremos definir uma topologia para $\mathcal{G}$. Para $s \in \mathcal{S}$ e $U \subseteq D_{s^*s}$ aberto, defina

$$\Theta(s,U) := \{[s,x] \in \mathcal{G} : x \in U\}. \tag{4.7}$$

Note que, para cada $[s,x] \in \mathcal{G}$, $[s,x] \in \Theta(s, D_{s^*s})$. Logo $\mathcal{G} \subseteq \cup_{s\in\mathcal{S}}\Theta(s, D_{s^*s})$. A próxima proposição garante que os conjuntos da forma $\Theta(s,U)$ constituem uma base para uma topologia.

Proposição 4.2.2. *Sejam $s,t \in \mathcal{S}$ e U,V abertos tais que $U \subseteq D_{s^*s}, V \subseteq D_{t^*t}$. Se $[u,z] \in \Theta(s,U) \cap \Theta(t,V)$ então existe um* *idempotente e e um aberto $W \subseteq D_{(ue)^*ue}$ tais que*

$$[u, z] \in \Theta(ue, W) \subseteq \Theta(s, U) \cap \Theta(t, V).$$

Demonstração. Por hipótese, $[u, z] = [s, x] = [t, y]$ para algum $x \in U$, $y \in V$. Mas da definição da relação de equivalência temos

$$z = x = y \tag{4.8}$$

e existem idempotentes f, g tais que

$$z \in D_f, \text{ com } uf = sf, \text{ e} \tag{4.9}$$

$$z \in D_g, \text{ com } ug = tg. \tag{4.10}$$

Defina $e := fg$. A equação (4.9) implica $ue = se$, e (4.10) nos dá $ue = te$ pois também vale a igualdade $e = gf$. Da Observação 4.1.2 temos que $D_e = D_f \cap D_g$. Logo $z \in D_e$ com

$$ue = te = se. \tag{4.11}$$

Além disso, como $z \in D_{u^*u}$, temos $z \in D_{u^*u} \cap D_e = D_{u^*ue}$. Como e é idempotente, $u^*ue = u^*uee = eu^*ue = (ue)^*ue$, e logo $z \in D_{(ue)^*ue}$. Defina $W := U \cap V \cap D_{(ue)^*ue}$. De (4.8), temos que $z \in U \cap V$, logo $z \in W$ e

$$[u, z] = [ue, z] \in \Theta(ue, W).$$

Para provar a inclusão $\Theta(ue, W) \subseteq \Theta(s, U) \cap \Theta(t, V)$, seja $[ue, w]$ um elemento qualquer de $\Theta(ue, W)$, de modo que $w \in W$. Assim, $w \in U$ e $w \in D_{(ue)^*ue}$, logo de (4.11) temos

$$[ue, w] = [se, w] = [s, w],$$

o que garante que $[ue, w] \in \Theta(s, U)$. Como também vale $w \in V$, da mesma equação obtemos $[ue, w] = [te, w] = [t, w]$ e temos $[ue, w] \in \Theta(t, V)$ como desejado. □

A partir de agora consideramos que a topologia em $\mathcal{G}$ é dada pela base de abertos $\Theta(s, U)$.

Proposição 4.2.3. *Com a topologia definida acima, $\mathcal{G}$ é um grupoide topológico.*

Demonstração. Precisamos provar que a multiplicação e a inversão são funções contínuas. Para $s \in \mathcal{S}$ e $U \subseteq D_{s^*s}$ aberto, segue direto da definição da inversão que

$$\Theta(s, U)^{-1} = \Theta(s^*, \theta_s(U)), \tag{4.12}$$

o que torna claro que a inversão é contínua, uma vez $\theta_s(U)$ é a imagem homeomorfa de U por θ_s.

Já para a multiplicação, fixe $\big([s, x], [t, y]\big) \in \mathcal{G}^2$. Sem perda de generalidade, suponha que o produto $[s, x][t, y] = [st, y] \in \Theta(r, V)$ para algum $r \in \mathcal{S}$ e $V \subseteq D_{r^*r}$ aberto. Mas daí temos $y \in V$, sendo que $[st, y] = [r, y]$ garante a existência de um idempotente e tal que $y \in D_e$ e $ste = re$.

Defina $U := V \cap D_e \cap D_{t^*t}$. Vamos mostrar que a imagem inversa de $\Theta(r, V)$ pela multiplicação contém o conjunto

$$W := \big(\Theta(s, D_{s^*s}) \times \Theta(t, U)\big) \cap \mathcal{G}^2.$$

Primeiro veja que $x \in D_{s^*s}$ e y pertence simultaneamente a V, D_e e D_{t^*t}, de forma que $y \in U$. Isso garante que W é uma vizinhança de $\big([s, x], [t, y]\big)$. Agora sejam $([s, x'], [t, y']) \in W$. Note que o produto $[s, x'][t, y'] = [st, y'] = [r, y']$, pois $ste = re$ e $y' \in U \subseteq D_e$. Agora, pela inclusão $y' \in U \subseteq V$, temos que $[r, y'] \in \Theta(r, V)$, concluindo a continuidade da multiplicação. $\square$

Proposição 4.2.4. *Sejam $s \in \mathcal{S}$, $U \subseteq D_{s^*s}$ aberto. A aplicação*

$$\begin{aligned} \phi : U &\to \Theta(s, U) \\ x &\mapsto [s, x] \end{aligned} \tag{4.13}$$

é um homeomorfismo, com $\Theta(s, U)$ tendo a topologia induzida.

Demonstração. Note que ϕ é sobrejetora, uma vez que dado $[s, x] \in \Theta(s, U)$, por definição $x \in U$ e logo $[s, x] = \phi(x)$. Se $x, y \in U$ com $x \neq y$, então $\phi(x) = [s, x] \neq [s, y] = \phi(y)$, provando a injetividade.

É trivial notar que, dado $V \subseteq U$ aberto, $\phi(V) = \Theta(s, V)$ que é aberto em $\Theta(s, U)$. Logo ϕ é uma aplicação aberta.

Para mostrar a continuidade, seja $x \in U$ arbitrário. Considere uma vizinhança de $\phi(x)$, que sem perda de generalidade, podemos supor ser um aberto básico $\Theta(t, V)$ com $V \subseteq D_{t^*t}$, de modo que

$$\phi(x) = [s, x] \in \Theta(t, V) \subseteq \Theta(s, U)$$

Isso significa que $x \in V$. Mais que isso, $[s, x] = [t, x]$ implica a existência de um idempotente e tal que $x \in D_e$ e $se = te$. Considere o aberto $D_e \cap V$, que é uma vizinhança de x. Se $y \in D_e \cap V$, temos

$$\phi(y) = [s, y] = [t, y] \in \Theta(t, V).$$

Logo, $\phi(D_e \cap V) \subseteq \Theta(t, V)$, mostrando que ϕ é contínua. $\square$

Corolário 4.2.5. *A identificação de $\mathcal{G}^0$ com X dada por* (4.6) *é um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $[e, x] \in \mathcal{G}^0$. Por definição, x pertence a D_e, que é um aberto. Logo, $[e, x]$ pertence ao aberto $\Theta(e, D_e)$. A proposição anterior garante então que

$$\begin{aligned} \phi : D_e &\to \Theta(e, D_e) \\ x &\mapsto [e, x] \end{aligned}$$

é um homeomorfismo local. Como também é bijetora, segue que é um homeomorfismo. □

Proposição 4.2.6. *O grupoide topológico $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\theta, \mathcal{S}, X)$ definido anteriormente é um grupoide* étale.

Demonstração. Seja $[s, x] \in \mathcal{G}$ qualquer. Note que restringindo a aplicação *source* para

$$\begin{aligned} \mathtt{s} : \Theta(s, D_{s^*s}) &\to D_{s^*s} \\ [s, y] &\mapsto y \end{aligned}$$

temos um homeomorfismo local, pois temos a inversa da aplicação (4.13). Agora, restringindo *range*, temos

$$\begin{aligned} \mathtt{r} : \Theta(s, D_{s^*s}) &\to D_{s^*s} \\ [s, y] &\mapsto \theta_s(y) \end{aligned}$$

e vale a igualdade $\mathtt{r} = \theta_s \circ \mathtt{s}$. Como θ_s é um homeomorfismo quando restrito a D_{s^*s}, o mesmo vale para $\mathtt{r}$, demonstrando a proposição. □

O grupoide definido nessa seção é chamado de *grupoide de germes* do sistema $(\theta, \mathcal{S}, X)$. O espaço das unidades $\mathcal{G}^0$ é localmente compacto Hausdorff, pois é homeomorfo a X.

Note que a demonstração anterior garante ainda o seguinte corolário.

Corolário 4.2.7. *Para qualquer $s \in \mathcal{S}$ e $U \subseteq D_{s^*s}$ aberto, $\Theta(s, U)$ é uma bisseção.*

Demonstração. A demonstração anterior mostrou que $\Theta(s, D_{s^*s})$ é uma bisseção para qualquer $s \in \mathcal{S}$. Como $\Theta(s, U)$ do enunciado é um subconjunto aberto de $\Theta(s, D_{s^*s})$, restringir *range* e *source* para esse aberto mantém a propriedade de ser um homeomorfismo local. □

Em particular, para $s \in \mathcal{S}$, usaremos o símbolo

$$\Theta_s := \Theta(s, D_{s^*s}) \tag{4.14}$$

para denotar essas bisseções abertas. Além disso,

$$\mathtt{s}_s := \mathtt{s}|_{\Theta_s} \quad \text{e} \quad \mathtt{r}_s := \mathtt{r}|_{\Theta_s},$$

denotam, respectivamente, as restrições de *source* e *range* à bisseção Θ_s. Para quaisquer funções $f : D_{s^*s} \to \mathbb{C}$, $g : D_{ss^*} \to \mathbb{C}$, definimos as composições

$$\delta_s f := f \circ \mathtt{s}_s \quad \text{e} \quad g\delta_s := g \circ \mathtt{r}_s,$$

e em ambos os casos podemos considerá-las como funções definidas em todo o grupoide $\mathcal{G}$, estendendo-as como zero fora de Θ_s.

4.3 Propriedade universal do grupoide de germes

Para $s \in \mathcal{S}$, definimos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \alpha_s : C_c(D_{s^*s}) &\to C_c(D_{ss^*}) \\ f &\mapsto f \circ \theta_{s^*}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Lema 4.3.1. *Dada $f \in C_c(D_{s^*s})$, vale que*

$$\delta_s f = \alpha_s(f)\delta_s.$$

Demonstração. Seja $[s, x] \in \Theta_s$ arbitrário. De um lado, temos

$$\delta_s f([s, x]) = f(\mathtt{s}_s([s, x])) = f(x),$$

e por outro lado temos

$$\alpha_s(f)\delta_s([s,x]) = \alpha_s(f)(\mathtt{r}_s([s,x])) = \alpha_s(f)(\theta_s(x)) = \\ = f(\theta_{s^*}(\theta_s(x))) = f(\theta_{s^*s}(x)) = f(x).$$

Como o domínio de ambas as funções é Θ_s, temos a igualdade entre elas. □

Lema 4.3.2. *Sejam $s,t \in \mathcal{S}$, $f \in C_c(D_{s^*s})$ e $g \in C_c(D_{t^*t})$. Então vale*

(1) $\Theta_s\Theta_t = \Theta_{st}$;

(2) $\Theta_s^{-1} = \Theta_{s^*}$;

(3) $(\delta_s f) * (\delta_t g) = \delta_{st}\alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))$;

(4) $(\delta_s f)^* = \delta_{s^*}\alpha_s(\bar{f})$.

Por outro lado se $f \in C_c(D_{ss^*})$ e $g \in C_c(D_{tt^*})$, então

(5) $(f\delta_s) * (g\delta_t) = \alpha_s(\alpha_{s^*}(f)g)\delta_{st}$;

(6) $(f\delta_s)^* = \alpha_{s^*}(\bar{f})\delta_{s^*}$.

Demonstração. (1) ($\supset$) Se $[st,y] \in \Theta_{st}$ então $y \in D_{(st)^*st}$. Pela Proposição 4.1.3, temos que

$$D_{(st)^*st} = D_{t^*s^*st} = \theta_{t^*}(D_{s^*s} \cap D_{tt^*}).$$

Assim existe $x \in D_{s^*s} \cap D_{tt^*}$ tal que $y = \theta_{t^*}(x)$, ou equivalentemente, $x = \theta_t(y)$. Mas para que isso aconteça, y tem que pertencer ao domínio de θ_t, a saber, D_{t^*t}. Segue que $[s,x] \in \Theta_s$, $[t,y] \in \Theta_t$ e a igualdade $x = \theta_t(y)$ diz que ambos podem ser multiplicados. Logo

$$[st,y] = [s,x][t,y] \in \Theta_s\Theta_t.$$

($\subset$) Trivial, pois se $[s,x] \in \Theta_s$, $[t,y] \in \Theta_t$ podem ser multiplicados, então

$$[s,x][t,y] = [st,y] \in \Theta_{st}.$$

(2) ($\subset$) Dado $[s,x] \in \Theta_s$, temos que $[s,x]^{-1} = [s^*, \theta_s(x)] \in \Theta_{s^*}$. ($\supset$) Se $[s^*, y] \in \Theta_{s^*}$, então $y \in D_{ss^*}$, que é a imagem de θ_s. Assim existe um $x \in D_{s^*s}$ tal que $y = \theta_s(x)$, de modo que $[s,x] \in \Theta_s$ e $[s,x]^{-1} = [s^*, y]$.

(3) Como $(\delta_s f) \in C_c(\Theta_s)$ e $(\delta_t g) \in C_c(\Theta_t)$, a Proposição 3.1.2 garante que o suporte de $(\delta_s f) * (\delta_t g)$ está contido em $\Theta_s\Theta_t$, que pelo item (1) é igual a Θ_{st}. Dado $[st, y] \in \Theta_{st}$, a demonstração de (1) garante que existem $[s,x] \in \Theta_s$, $[t,y] \in \Theta_t$ tais que $x = \theta_t(y)$. Segue do Lema 3.1.4 que

$$(\delta_s f) * (\delta_t g)([st,y]) = (\delta_s f)([s,x])(\delta_t g)([t,y]) = \\ = f(\mathtt{s}_s([s,x]))g(\mathtt{s}_t([t,y])) = f(x)g(y).$$

Por outro lado, temos que

$$\delta_{st}\alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))([st,y]) = \alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))(\mathtt{s}_{st}([st,y])) = \\ = \alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))(y) = f\alpha_t(g)(\theta_{t^*}(y)) = f\alpha_t(g)(x) = \\ = f(x)g(\theta_t(x)) = f(x)g(y).$$

Como o domínio de ambas as funções é Θ_{st}, temos a igualdade desejada.

(4) Como o suporte de $\delta_s f$ está contido em Θ_s, o suporte de $(\delta_s f)^*$ está contido em Θ_s^{-1}, que é igual a Θ_{s^*} pelo item (2). Assim, dado $[s^*, x] \in \Theta_{s^*}$, note que $x = \mathtt{s}_{s^*}([s^*, x])$, e temos

$$(\delta_s f)^*([s^*,x]) = \overline{(\delta_s f)\left([s^*,x]^{-1}\right)} = \overline{(\delta_s f)\left([s,\theta_{s^*}(x)]\right)} = \\ = \overline{f(\mathtt{s}_s([s,\theta_{s^*}(x)]))} = \overline{f(\theta_{s^*}(x))} = \alpha_s(\bar{f})(x) = \\ = \alpha_s(\bar{f})(\mathtt{s}_{s^*}([s^*,x])) = \delta_{s^*}\alpha_s(\bar{f})([s^*,x]).$$

(5) Note que o Lema 4.3.1 permite estabelecer a igualdade

$$h\delta_u = \delta_u\alpha_{u^*}(h)$$

para quaisquer $u \in \mathcal{S}$ e $h \in C_c(D_{uu^*})$. Assim, usando (3),

$$(f\delta_s) * (g\delta_t) = (\delta_s \alpha_{s^*}(f)) * (\delta_t \alpha_{t^*}(g)) =$$
$$= \delta_{st}\alpha_{t^*}(\alpha_{s^*}(f)\alpha_t(\alpha_{t^*}(g))) = \delta_{st}\alpha_{t^*}(\alpha_{s^*}(f)g).$$

Aplicando novamente o Lema 4.3.1,

$$(f\delta_s) * (g\delta_t) = \delta_{st}\alpha_{t^*}(\alpha_{s^*}(f)g) = \alpha_{st}(\alpha_{t^*}(\alpha_{s^*}(f)g))\delta_{st}.$$

Observe também que $s \in \mathcal{S} \mapsto \alpha_s$ é um homomorfismo e vale $\alpha_{t^*} = \alpha_t^{-1}$ para qualquer $t \in \mathcal{S}$. Dessa forma, vale que $\alpha_{st}\alpha_{t^*} = \alpha_s\alpha_t\alpha_{t^*} = \alpha_s$, e temos

$$(f\delta_s) * (g\delta_t) = \alpha_s(\alpha_{s^*}(f)g)\delta_{st}, \tag{4.16}$$

como desejado.

(6) Usando a mesma argumentação do item anterior e aproveitando a fórmula do item (4) obtemos

$$(f\delta_s)^* = (\delta_s\alpha_{s^*}(f))^* = \delta_{s^*}\alpha_s(\overline{\alpha_{s^*}(f)}) = \delta_{s^*}\alpha_s(\alpha_{s^*}(\bar{f})) =$$
$$= \alpha_{s^*}(\alpha_s(\alpha_{s^*}(\bar{f})))\delta_{s^*} = \alpha_{s^*}(\bar{f})\delta_{s^*}$$

completando a demonstração. □

Definição 4.3.3. Uma *representação covariante* do sistema $(\theta, \mathcal{S}, X)$ num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um par (π, σ) com π uma representação não degenerada de $C_0(X)$ em $\mathcal{H}$, e $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ satisfazendo

(1) $\sigma_{st} = \sigma_s\sigma_t$,
(2) $\sigma_{s^*} = \sigma_s^*$,
(3) $\pi(\alpha_s(f)) = \sigma_s\pi(f)\sigma_{s^*}$,
(4) $\overline{\pi(C_0(D_e))\mathcal{H}} = \sigma_e(\mathcal{H})$

para quaisquer $s, t \in \mathcal{S}$, $f \in C_0(D_{s^*s})$ e $e \in E(\mathcal{S})$.

Denotaremos por $\tilde{\pi}$ a extensão de π para a álgebra $\mathscr{B}(X)$ das funções Borel mensuráveis limitadas em X. Sabemos que para cada aberto $U \subseteq X$, a imagem da função $\tilde{\pi}(\mathbb{1}_U)$ é igual a $\overline{\pi\left(C_0(U)\right)\mathcal{H}}$. Assim, a propriedade (4) da Definição 4.3.3 pode ser escrita como

$$\sigma_e = \tilde{\pi}(\mathbb{1}_{D_e}). \tag{4.17}$$

Em particular, vale que

$$\sigma_e \pi(f) = \pi(f)\sigma_e \tag{4.18}$$

para qualquer $f \in C_0(X)$.

A partir de agora consideramos uma representação covariante (π, σ) de $(\theta, \mathcal{S}, X)$ em $\mathcal{H}$.

Lema 4.3.4. *Sejam $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso contável, $J \subseteq \mathcal{S}$ finito e $f_s \in C_c(D_{s^*s})$ para cada $s \in J$. Suponha que*

$$\sum_{s \in J} \delta_s f_s \equiv 0 \text{ em } C_c(\mathcal{G}).$$

Então

$$\sum_{s \in J} \sigma_s \pi(f_s) \equiv 0 \text{ em } \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Demonstração. Fixe $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Para cada $s \in \mathcal{S}$, seja μ_s a medida de Borel finita definida em Θ_s dada por

$$\mu_s(A) := \left\langle \sigma_s \tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A)}\right)\xi, \eta \right\rangle \tag{4.19}$$

para cada $A \subseteq \Theta_s$ Borel mensurável.

Como $\mathtt{s}$ é um homeomorfismo de Θ_s em D_{s^*s}, $\mathtt{s}(A)$ é um subconjunto mensurável[1] de D_{s^*s} e logo de X. Assim, $\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A)} \in \mathscr{B}(X)$, de modo que $\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A)}\right)$ está bem definido.

A σ-aditividade de μ_s é herdada da σ-aditividade de $\tilde{\pi}$.

[1] σ-álgebra de Borel

Se $B \subseteq D_{s^*s}$ é mensurável, seja $A := \mathtt{s}_s^{-1}(B)$, de modo que A é um mensurável de Θ_s e $B = \mathtt{s}(A)$. Note que

$$\delta_s \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_B \circ \mathtt{s}_s = \mathbb{1}_A. \tag{4.20}$$

Então

$$\int_{\Theta_s} \delta_s \mathbb{1}_B \, d\mu_s = \int_{\Theta_s} \mathbb{1}_A \, d\mu_s = \mu_s(A) =$$
$$= \left\langle \sigma_s \tilde{\pi} \left(\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A)} \right) \xi, \eta \right\rangle = \left\langle \sigma_s \tilde{\pi} \left(\mathbb{1}_B \right) \xi, \eta \right\rangle.$$

Como toda função mensurável é limite de funções simples, usando a σ-aditividade da integral obtemos que

$$\int_{\Theta_s} \delta_s f \, d\mu_s = \left\langle \sigma_s \tilde{\pi} \left(f \right) \xi, \eta \right\rangle. \tag{4.21}$$

Afirmação 1. Para $s, t \in \mathcal{S}$, se $A \subseteq \Theta_s \cap \Theta_t$, vale que

$$\mu_s(A) = \mu_t(A).$$

Prova. Defina $B := \mathtt{s}(A) = \mathtt{s}_s(A) = \mathtt{s}_t(A)$, que é um subconjunto Borel mensurável de $D_{s^*s} \cap D_{t^*t}$ e

$$A = \{[s, x] : x \in B\} = \{[t, x] : x \in B\}.$$

Além disso, se $x \in B$, temos que $[s, x] = [t, x]$, o que nos diz que existe um idempotente e tal que $se = te$ e $x \in D_e$. Assim

$$B \subseteq \bigcup_{se=te}^{e \in E(\mathcal{S})} D_e. \tag{4.22}$$

Como $\mathcal{S}$ é contável, temos que $E(\mathcal{S})$ também o é, e podemos escrever $E(\mathcal{S}) = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Assim, podemos reescrever a expressão (4.22) como

$$B \subseteq \bigcup_{se_n = te_n}^{n \in \mathbb{N}} D_{e_n}.$$

Defina $\tilde{B}_n := B \cap D_{e_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Repetindo um argumento clássico de teoria da medida, faça $B_0 := \tilde{B}_0$, $B_{n+1} = \tilde{B}_{n+1} \setminus \left(\cup_{i=0}^{n} \tilde{B}_i\right)$ para $n \geq 0$. Dessa maneira obtemos que B é a união disjunta $\sqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ e que $B_n \subseteq \tilde{B}_n \subseteq D_{e_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Disso segue que A é a união disjunta dos conjuntos

$$A_n = \mathtt{s}_s^{-1}(B_n) = \mathtt{s}_t^{-1}(B_n).$$

Agora, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\sigma_s\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A_n)}\right) &= \sigma_s\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{B_n}\right) = \sigma_s\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{D_{e_n}}\mathbb{1}_{B_n}\right) = \\ &= \sigma_s\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{D_{e_n}}\right)\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{B_n}\right) = \sigma_s\sigma_{e_n}\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{B_n}\right) = \sigma_{se_n}\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{B_n}\right),\end{aligned}$$

em que usamos a igualdade (4.17) na penúltima passagem. Observe que o mesmo argumento é válido se substituirmos s por t. Da igualdade $se_n = te_n$ segue que

$$\sigma_s\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A_n)}\right) = \sigma_t\tilde{\pi}\left(\mathbb{1}_{\mathtt{s}(A_n)}\right)$$

e portanto, $\mu_s(A_n) = \mu_t(A_n)$. Sendo assim, a σ-aditividade garante que

$$\begin{aligned}\mu_s(A) = \mu_s\left(\sqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_s(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_t(A_n) = \\ = \mu_t\left(\sqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu_t(A),\end{aligned}$$

concluindo nossa afirmação. ■

Finalmente, seja J como no enunciado, e $M = \bigcup_{s\in J} \Theta_s$, que é mensurável pois é união finita de mensuráveis.

Afirmação 2. Existe uma medida μ em M que concorda com cada μ_s para todo $s \in J$.

Prova. Observe que M é a união dos Θ_s, cada um com sua medida μ_s. Se essa união não for disjunta, a demonstração da Afirmação 1 garante que podemos particionar as interseções $\Theta_s \cap \Theta_t$, $s, t \in J$, como união enumerável disjunta de conjuntos mensuráveis. Além disso, usando μ_s ou μ_t como medida em qualquer subconjunto dessa união, obtemos o mesmo resultado. Como temos apenas finitas interseções entre os conjuntos Θ_s que compõe M, podemos particionar M como uma união disjunta enumerável

$$M = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} M_n,$$

sendo que cada M_n possui uma medida $\mu_n = \mu_s|_{M_n}$, em que $M_n \subseteq \Theta_s$.

Defina a medida μ da seguinte maneira: para cada $A \subseteq M$,

$$\mu(A) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(M_n).$$

Note que, por definição, μ concorda com cada μ_s dentro de Θ_s, para $s \in J$. ■

Disto segue que

$$\left\langle \sum_{s\in J} \sigma_s \pi\left(f_s\right)\xi, \eta \right\rangle = \sum_{s\in J} \int_{\Theta_s} \delta_s f d\mu_s = \sum_{s\in J} \int_M \delta_s f d\mu =$$
$$= \int_M \sum_{s\in J} \delta_s f d\mu = \int_M 0 \, d\mu = 0.$$

Como ξ, η foram arbitrários, segue que $\sum_{s\in J} \sigma_s \pi\left(f_s\right) \equiv 0$. □

Vamos então ao teorema principal desse capítulo.

Teorema 4.3.5. *Seja $\mathcal{S}$ um semigrupo inverso contável, θ uma ação de $\mathcal{S}$ no espaço localmente compacto Hausdorff X, e $\mathcal{G}$ o grupoide de germes do sistema $(\theta, \mathcal{S}, X)$. Dada qualquer representação covariante (σ, π) de $(\theta, \mathcal{S}, X)$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, existe uma única representação*

$$\sigma{\times}\pi : C^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

tal que, para quaisquer $s \in \mathcal{S}$, $f \in C_c(D_{s^*s})$ *e* $g \in C_c(D_{ss^*})$ *vale*

$$(\sigma\times\pi)\big(\iota(\delta_s f)\big) = \sigma_s \pi(f)$$
$$(\sigma\times\pi)\big(\iota(g\delta_s)\big) = \pi(g)\sigma_s$$

em que $\iota : C_c(\mathcal{G}) \to C^*(\mathcal{G})$ *é a inclusão canônica.*

Demonstração. Seja $f \in C_c(\mathcal{G})$. Pelo Lema 3.1.3, f pode ser escrita como combinação linear de funções cujo suporte é uma bisseção compacta. Pelo Corolário 4.2.7, podemos decompor cada uma dessas funções em uma combinação de funções cujo suporte está contido nos conjuntos da forma Θ_s. Sendo assim, existe um $n \in \mathbb{N}^*$, $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}$ e $\tilde{f}_i \in C_c(\Theta_s)$, $i = 1, \dots, n$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i.$$

Usando os homeomorfismos locais $\mathtt{s}_{s_i}$, podemos ainda transformar essas funções $\tilde{f}_i$ em funções $f_i \in C_c(D_{s^*s})$, fazendo $f_i = \tilde{f}_i \circ \mathtt{s}_{s_i}^{-1}$, $i = 1, \dots, n$. Dessa maneira, escrevemos

$$f = \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i} f_i.$$

Para f descrita dessa forma, defina

$$(\sigma\tilde{\times}\pi)(f) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{s_i}\pi(f_i). \tag{4.23}$$

Note que a boa definição de $\sigma\tilde{\times}\pi$ segue do Lema anterior, pois se pudéssemos escrever

$$f = \sum_{i=1}^{n} \delta_{s_i} f_i = \sum_{i=1}^{m} \delta_{t_i} g_i,$$

poderíamos juntar os somatórios e, a menos de renomeação de variáveis, teríamos um conjunto J finito de índices tais que

$\sum_{i\in J}\delta_{h_i}h_i = 0$. Daí o Lema 4.3.4 garantiria que a imagem desse somatório por $\sigma\tilde{\times}\pi$ seria zero. Segue da boa definição que $\sigma\tilde{\times}\pi$ é linear.

Para mostrar que $\sigma\tilde{\times}\pi$ separa o produto, podemos usar linearidade para provar apenas para o seguinte caso: para quaisquer $f \in C_c(D_{s^*s})$, $g \in C_c(D_{t^*t})$ vale que

$$(\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f * \delta_t g) = (\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f)(\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_t g).$$

Usando o Lema 4.3.2(3), temos $\delta_s f * \delta_t g = \delta_{st}\alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))$. Assim

$$\begin{aligned}(\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f * \delta_t g) = (\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_{st}\alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))) =& \\ = \sigma_{st}\pi(\alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))).& \quad (4.24)\end{aligned}$$

Do item (3) da Definição 4.3.3,

$$\begin{aligned}\pi(\alpha_{t^*}(f\alpha_t(g))) = \sigma_{t^*}\pi(f\alpha_t(g))\sigma_t = \sigma_{t^*}\pi(f)\pi(\alpha_t(g))\sigma_t =& \\ = \sigma_{t^*}\pi(f)\sigma_t\pi(g)\sigma_{t^*}\sigma_t.& \quad (4.25)\end{aligned}$$

Substituindo (4.25) em (4.24), usando o item (1) da definição de covariância juntamente com (4.18), temos

$$\begin{aligned}(\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f * \delta_t g) &= \sigma_{st}\sigma_{t^*}\pi(f)\sigma_t\pi(g)\sigma_{t^*}\sigma_t = \\ &= \sigma_s\sigma_{tt^*}\pi(f)\sigma_t\pi(g)\sigma_{t^*t} = \sigma_s\pi(f)\sigma_{tt^*}\sigma_t\sigma_{t^*t}\pi(g) = \\ &= \sigma_s\pi(f)\sigma_{tt^*tt^*t}\pi(g) = \sigma_s\pi(f)\sigma_t\pi(g) = \\ &= (\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f)(\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_t g).\end{aligned}$$

Resta agora provar que
trep se comporta bem com relação a involução. Novamente, por linearidade, basta provar que para qualquer $f \in C_c(D_{s^*s})$ vale que

$$(\sigma\tilde{\times}\pi)((\delta_s f)^*) = ((\sigma\tilde{\times}\pi)((\delta_s f))^*.$$

Usando o Lema 4.3.2(4), temos

$$\begin{aligned}(\sigma\tilde{\times}\pi)((\delta_s f)^*) &= (\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_{s^*}\alpha_s(\bar{f})) = \sigma_{s^*}\pi(\alpha_s(\bar{f})) = \\ &= \sigma_{s^*}\sigma_s\pi(\bar{f})\sigma_{s^*} = \sigma_{s^*s}\pi(f)^*\sigma_{s^*} = \pi(f)^*\sigma_{s^*s}\sigma_{s^*} = \\ &= \pi(f)^*\sigma_{s^*} = (\sigma_s\pi(f))^* = ((\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f))^*.\end{aligned}$$

Note então que, de fato, $\sigma\tilde{\times}\pi : C_c(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é uma representação. Segue do Teorema 3.2.2 que

$$\|(\sigma\tilde{\times}\pi)(f)\| \leq \|\|f\|\|$$

para qualquer $f \in C_c(\mathcal{G})$, e existe uma representação

$$\sigma\times\pi : C^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

tal que

$$\sigma\times\pi \circ \iota = \sigma\tilde{\times}\pi.$$

Disso segue a primeira igualdade

$$(\sigma\times\pi)\big(\iota(\delta_s f)\big) = (\sigma\tilde{\times}\pi)(\delta_s f) = \sigma_s\pi(f).$$

Para demonstrar a segunda igualdade, seja $s \in \mathcal{S}$ e $g \in C_c(D_{ss^*})$. Seja $f = \alpha_{s^*}(g)$, de modo que $f \in C_c(D_{s^*s})$ e $g = \alpha_s(f)$. Assim, usando o Lema 4.3.1,

$$g\delta_s = \alpha_s(f)\delta_s = \delta_s f.$$

Usando novamente a covariância e (4.18), obtemos

$$\begin{aligned}(\sigma\times\pi)(\iota(g\delta_s)) &= (\sigma\times\pi)(\iota(\delta_s f)) = \sigma_s\pi(f) = \\ &= \sigma_s\sigma_{s^*}\sigma_s\pi(f) = \sigma_s\pi(f)\sigma_{s^*}\sigma_s = \pi(\alpha_s(f))\sigma_s = \pi(g)\sigma_s,\end{aligned}$$

como desejado. □

Como qualquer C*-álgebra pode ser fielmente representada em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algum $\mathcal{H}$ adequado, sem perda de generalidade, podemos substituir $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ por uma C*-álgebra qualquer na Definição 4.3.3 e no Teorema 4.3.5.

4.4 Álgebra de Cuntz revisitada

Considere $d \in \mathbb{N}^*$ e seja $\Sigma = \{1, \ldots, d\}$ um conjunto que chamaremos de alfabeto, e Σ^* o conjunto de todas as palavras finitas sobre esse alfabeto, incluindo a palavra vazia ε. Dadas palavras $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, a concatenação delas é denotada por $\alpha\beta$; com respeito à palavra vazia vale $\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha$. Munimos Σ da topologia discreta.

Considere $X = \Sigma^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as palavras infinitas sobre o nosso alfabeto, munido da topologia produto. O Teorema de Tychonoff garante que X é compacto com a topologia produto.

Semigrupo

Agora vamos montar um semigrupo inverso. Seja

$$\mathcal{S} = (\Sigma^* \times \Sigma^*) \sqcup \{0\},$$

com 0 um elemento que não está em Σ^*. A multiplicação em $\mathcal{S}$ é definida da seguinte maneira: para qualquer $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$,

$$(\alpha, \beta) \cdot 0 = 0 \cdot (\alpha, \beta) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ademais, se $(\gamma, \delta) \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$,

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = \begin{cases} (\alpha, \delta\beta') & \text{se } \beta = \gamma\beta' \\ (\alpha\gamma', \delta) & \text{se } \gamma = \beta\gamma' \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.26}$$

A involução em $\mathcal{S}$ é dada por

$$(\alpha, \beta)^* = (\beta, \alpha), \qquad 0^* = 0.$$

Note que, de fato, para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}$, a involução $(\alpha, \beta)^*$ satisfaz

$$(\alpha, \beta)(\alpha, \beta)^*(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)(\beta, \alpha)(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta)(\beta, \beta) = (\alpha, \beta), \text{ e}$$

$$(\alpha,\beta)^*(\alpha,\beta)(\alpha,\beta)^* = (\beta,\alpha)(\alpha,\beta)(\beta,\alpha) = (\beta,\alpha)(\alpha,\alpha) = \\ = (\beta,\alpha) = (\alpha,\beta)^*.$$

Isso torna $\mathcal{S}$ um semigrupo regular, conforme a Definição 2.1.8. Ademais, os idempotentes de $\mathcal{S}$ são

$$E(\mathcal{S}) = \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in \Sigma^*\} \sqcup \{0\}.$$

Afirmação 1. Os idempotentes de $\mathcal{S}$ comutam.

Prova. Claramente 0 comuta com qualquer outro elemento de $E(\mathcal{S})$. Sejam $(\alpha,\alpha),(\beta,\beta) \in E(\mathcal{S}) \setminus \{0\}$. Se $(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) = 0$, então $(\beta,\beta)(\alpha,\alpha) = 0$. Caso contrário temos dois casos a analisar.

(1) Se $\alpha = \beta\alpha'$, então por um lado

$$(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) = (\alpha,\beta\alpha') = (\alpha,\alpha)$$

e por outro lado

$$(\beta,\beta)(\alpha,\alpha) = (\beta\alpha',\alpha) = (\alpha,\alpha).$$

(2) Se $\beta = \alpha\beta'$, então por um lado

$$(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) = (\alpha\beta',\beta) = (\beta,\beta)$$

e por outro lado

$$(\beta,\beta)(\alpha,\alpha) = (\beta,\alpha\beta') = (\beta,\beta).$$

Em todos os casos temos a comutatividade. ∎

Sendo assim, o Teorema 2.1.9 garante que $\mathcal{S}$ é um semigrupo inverso.

Topologia

Para $\alpha \in \Sigma^*$, defina em X o cilindro

$$Z(\alpha) = \{\alpha x : x \in X\}.$$

Note que para $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ vale que

$$Z(\alpha) \cap Z(\beta) = \begin{cases} Z(\beta) & \text{se } \beta = \alpha x \\ Z(\alpha) & \text{se } \alpha = \beta y \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.27}$$

Como $X = \cup_{i \in \Sigma} Z(i)$, temos que os conjuntos $Z(\alpha)$ formam uma base para uma topologia em X.

Ação

Para cada $(\alpha, \alpha) \in E(\mathcal{S})$, defina

$$D_{(\alpha,\alpha)} = Z(\alpha)$$

e $D_0 = \emptyset$.

Para $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}$ defina

$$\begin{aligned} \theta_{(\alpha,\beta)} : D_{(\beta,\beta)} &\to D_{(\alpha,\alpha)} \\ \beta x &\mapsto \alpha x \end{aligned} \tag{4.28}$$

e θ_0 sendo a função vazia. Segue da definição que $\theta^{-1}_{(\alpha,\beta)} = \theta_{(\beta,\alpha)}$.

Afirmação 2. θ é uma ação de semigrupo.

Prova. Queremos mostrar que

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)} = \theta_{(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta)}. \tag{4.29}$$

em que a composição do lado esquerdo está definida no maior conjunto possível, como no Exemplo 2.1.3. Assim, vale que

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)} : \theta^{-1}_{(\gamma,\delta)}\big(Z(\gamma) \cap Z(\beta)\big) \to \theta_{(\alpha,\beta)}\big(Z(\gamma) \cap Z(\beta)\big). \tag{4.30}$$

Vamos dividir essa análise em três casos.

(1) Caso $\beta = \gamma\beta'$, por (4.27) temos $Z(\gamma) \cap Z(\beta) = Z(\beta)$, de modo que

$$\theta^{-1}_{(\gamma,\delta)}\big(Z(\gamma) \cap Z(\beta)\big) = \theta_{(\delta,\gamma)}(Z(\beta)) = \theta_{(\delta,\gamma)}(Z(\gamma\beta')) = Z(\delta\beta')$$

e

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\big(Z(\gamma)\cap Z(\beta)\big) = \theta_{(\alpha,\beta)}(Z(\beta)) = Z(\alpha).$$

Assim, (4.30) torna-se

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)} : Z(\delta\beta') \to Z(\alpha).$$

Considere $\delta\beta' y \in Z(\delta\beta')$, com $y \in X$. Calculando a composição

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)}(\delta\beta' y) = \theta_{(\alpha,\beta)}(\gamma\beta' y) = \theta_{(\alpha,\beta)}(\beta y) = \alpha y.$$

Como nesse caso $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta) = (\alpha,\delta\beta')$ por (4.26), o lado direito de (4.29) se torna $\theta_{(\alpha,\delta\beta')}$. O cálculo acima mostra que (4.29) é válida.

(2) Caso $\gamma = \beta\gamma'$, por (4.27) temos $Z(\gamma)\cap Z(\beta) = Z(\gamma)$, de modo que

$$\theta^{-1}_{(\gamma,\delta)}\big(Z(\gamma)\cap Z(\beta)\big) = \theta_{(\delta,\gamma)}(Z(\gamma)) = Z(\delta)$$

e

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\big(Z(\gamma)\cap Z(\beta)\big) = \theta_{(\alpha,\beta)}(Z(\gamma)) = \theta_{(\alpha,\beta)}(Z(\beta\gamma')) = Z(\alpha\gamma').$$

Desse modo, (4.30) torna-se

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)} : Z(\delta) \to Z(\alpha\gamma').$$

Sendo $x = \delta y \in Z(\delta)$, com $y \in X$, ao calcular a composição obtemos

$$\begin{aligned}\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)}(x) = \theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)}(\delta y) = \theta_{(\alpha,\beta)}(\gamma y) = \\ = \theta_{(\alpha,\beta)}(\beta\gamma' y) = \alpha\gamma' y.\end{aligned}$$

Nesse caso temos $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta) = (\alpha\gamma',\delta)$ por (4.26), e a equação acima mostra que (4.29) também é válida.

(3) Caso contrário, $Z(\gamma)\cap Z(\beta) = \emptyset$ e temos que

$$\theta_{(\alpha,\beta)}\theta_{(\gamma,\delta)} : \emptyset \to \emptyset$$

é a função vazia. Como sob essa mesma hipótese $(\alpha,\beta)\cdot(\gamma,\delta) = 0$, e θ_0 é a função vazia, provamos (4.29) em todos os casos. ∎

Isomorfismo.

Considere então o grupoide de germes $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\theta, \mathcal{S}, X)$. Vamos mostrar que $C^*(\mathcal{G})$ é isomorfo à álgebra de Cuntz $\mathcal{O}_d$, a C*-álgebra universal gerada por d isometrias $S_1, \dots, S_d$ que satisfazem

$$\sum_{i=1}^{n} S_i S_i^* = I,$$

como visto em [Davidson 1996, V.4].

Defina a representação

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{S} &\to \mathcal{O}_d \\ (\alpha,\beta) &\mapsto S_\alpha S_\beta^* \\ 0 &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Note que o Lema V.4.1 de [Davidson 1996] garante que a representação acima é um homomorfismo de semigrupos.

Denote por $\mathscr{Z} = \operatorname{span}\{\mathbb{1}_{Z(\alpha)} : \alpha \in \Sigma^*\}$, e defina

$$\begin{aligned} \pi : \mathscr{Z} &\to \mathcal{O}_d \\ \mathbb{1}_{Z(\alpha)} &\mapsto S_\alpha S_\alpha^*. \end{aligned}$$

Como X é compacto, $C(X) = \overline{\mathscr{Z}}$, e podemos estender π por continuidade para uma representação $\pi : C(X) \to \mathcal{O}_d$.

Para mostrar a covariância, considere $(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}$ e $\gamma \in \Sigma^*$. Então, por um lado,

$$\sigma_{(\alpha,\beta)}\pi(\mathbb{1}_{Z(\gamma)})\sigma^*_{(\alpha,\beta)} = S_\alpha S_\beta^* S_\gamma S_\gamma^* S_\beta S_\alpha^*. \tag{4.31}$$

Por outro lado, chamando de ξ o isomorfismo definido como em (4.15), temos que

$$\pi\big(\xi_{(\alpha,\beta)}(\mathbb{1}_{Z(\gamma)})\big) = \pi\big(\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta^*_{(\alpha,\beta)}\big) = \pi(\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta_{(\beta,\alpha)}) \tag{4.32}$$

Pelo Lema V.4.1 citado acima, $S_\beta^* S_\gamma$ em (4.31) só é diferente de zero em dois casos.

(1) Se $\beta = \gamma\beta'$, $S_\beta^* S_\gamma = S_{\beta'}^*$ e logo (4.31) se torna

$$S_\alpha S_\beta^* S_\gamma S_\gamma^* S_\beta S_\alpha^* = S_\alpha S_{\beta'}^* S_{\beta'} S_\alpha^* = S_\alpha I S_\alpha^* = S_\alpha S_\alpha^*.$$

Também, como $Z(\beta) \subseteq Z(\gamma)$, temos que $\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta_{(\beta,\alpha)}$ é sempre igual a 1. Assim, $\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta_{(\beta,\alpha)} = \mathbb{1}_{Z(\alpha)}$, de modo que (4.32) se torna $\pi(\mathbb{1}_{Z(\alpha)}) = S_\alpha S_\alpha^*$, como desejado.

(2) Se $\gamma = \beta\gamma'$, $S_\beta^* S_\gamma = S_{\gamma'}$ e logo (4.31) se torna

$$S_\alpha S_\beta^* S_\gamma S_\gamma^* S_\beta S_\alpha^* = S_\alpha S_{\gamma'} S_{\gamma'}^* S_\alpha^* = S_{\alpha\gamma'} S_{\alpha\gamma'}^*.$$

Como vale que $Z(\gamma) \subseteq Z(\beta)$, a composição $\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta_{(\beta,\alpha)}$ tem domínio

$$\theta_{(\beta,\alpha)}^{-1}\big(Z(\beta) \cap Z(\gamma)\big) = \theta_{(\alpha,\beta)}(Z(\gamma)) = \theta_{(\alpha,\beta)}(Z(\beta\gamma')) = Z(\alpha\gamma').$$

Nesse domínio, ela tem valor 1, e logo é idêntica a $\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma')}$. Assim, (4.32) vira

$$\pi(\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta_{(\beta,\alpha)}) = \pi(\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma')}) = S_{\alpha\gamma'} S_{\alpha\gamma'}^*,$$

garantindo a igualdade nesse caso.

(3) Caso contrário, o lado direito de (4.31) é nulo. E nesse caso, o domínio de $\mathbb{1}_{Z(\gamma)} \circ \theta_{(\beta,\alpha)}$ é vazio. Logo essa composição é a função vazia, cuja imagem também é nula.

Assim, (σ, π) é uma representação covariante do sistema $(X, \mathcal{S}, \theta)$. Assim, o Teorema 4.3.5 garante que existe uma representação

$$\sigma \times \pi : C^*(\mathcal{G}) \to \mathcal{O}_d.$$

Relembrando a notação apresentada na equação (4.14), se $(\alpha, \beta) \in \mathcal{S}$,

$$\Theta_{(\alpha,\beta)} = \Theta\big((\alpha,\beta), D_{(\beta,\beta)}\big) = \Theta\big((\alpha,\beta), Z(\beta)\big).$$

Para simplificar a notação, considere

$$\widehat{(\alpha, \beta)} := \Theta_{(\alpha,\beta)}.$$

Mais que isso, se $\alpha \in \Sigma^*$, vamos denotar $\widehat{\alpha} := \widehat{(\alpha, \varepsilon)}$. Isso nos permite simplificar a notação

$$\mathbb{1}_{\Theta_{(\alpha,\beta)}} = \mathbb{1}_{\widehat{(\alpha,\beta)}} \quad \text{e} \quad \mathbb{1}_{\Theta_{(\alpha,\varepsilon)}} = \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}}.$$

Note que do Lema 4.3.2, vale que $\widehat{(\alpha, \beta)}\widehat{(\gamma, \delta)} = \widehat{(\alpha, \beta)(\gamma, \delta)}$. Em particular,

$$\widehat{\alpha}\widehat{\beta} = \widehat{(\alpha, \varepsilon)(\beta, \varepsilon)} = \widehat{(\alpha\beta, \varepsilon)} = \widehat{\alpha\beta}.$$

Além disso, $\widehat{(\alpha, \beta)}^{-1} = \widehat{(\beta, \alpha)} = \widehat{(\alpha, \beta)^*}$, o que nos permite usar a notação $\widehat{(\alpha, \beta)}^*$ para representar $\widehat{(\beta, \alpha)}$. Por analogia, $\widehat{\alpha}^* := \widehat{(\varepsilon, \alpha)}$.

Ademais, para $\alpha \in \Sigma^*$, vale $\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}^* = \widehat{(\alpha, \alpha)}$ e $\widehat{\alpha}^*\widehat{\alpha} = \widehat{(\varepsilon, \varepsilon)}$. Cabe abrir a definição nesse último conjunto, uma vez que $\widehat{(\varepsilon, \varepsilon)} = \Theta\big((\varepsilon, \varepsilon), Z(\varepsilon)\big) = \Theta\big((\varepsilon, \varepsilon), X\big)$, e o Corolário 4.2.5 nos dá que esse conjunto $\widehat{(\varepsilon, \varepsilon)}$ é homeomorfo a $\mathcal{G}^0$.

Afirmação 3. Para $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ vale que

$$\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}} = \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}\widehat{\beta}}.$$

Prova. Sejam $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Note que pelo Lema 3.1.4, o suporte de $\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}}$ está contido em $\widehat{\alpha}\widehat{\beta} = \widehat{\alpha\beta}$. Dado $[(\alpha\beta, \varepsilon), x] \in \widehat{\alpha\beta}$, veja que

$$[(\alpha\beta, \varepsilon), x] = [(\alpha, \varepsilon), \beta x][(\beta, \varepsilon), x]$$

com $[(\alpha, \varepsilon), \beta x] \in \widehat{\alpha}$ e $[(\beta, \varepsilon), x] \in \widehat{\beta}$. Logo, o mesmo lema diz que

$$\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}}\big([(\alpha\beta, \varepsilon), x]\big) = \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}}\big([(\alpha, \varepsilon), \beta x]\big)\mathbb{1}_{\widehat{\beta}}\big([(\beta, \varepsilon), x]\big) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Como $[(\alpha\beta, \varepsilon), x]$ foi genérico, temos que $\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}}$ é identicamente igual a 1 em $\widehat{\alpha}\widehat{\beta}$. Fora desse conjunto, esse produto de convolução é nulo, e segue a nossa afirmação. ■

Tendo essas ferramentas algébricas em mãos, defina a seguinte função nos geradores de $\mathcal{O}_d$

$$\varphi : \mathcal{O}_d \to C^*(\mathcal{G})$$
$$S_i \mapsto \mathbb{1}_{\widehat{i}},$$

para $i = 1, \dots, d$.

Fixe um $i \in \{1, \dots, d\}$ e note que a Afirmação 3 nos garante que

$$\varphi(S_i S_i^*) = \mathbb{1}_{\widehat{i}} * \mathbb{1}_{\widehat{i^*}}, = \mathbb{1}_{\widehat{i}\,\widehat{i^*}} = \mathbb{1}_{\widehat{(i,i)}}.$$

Por outro lado,

$$\varphi(S_i^* S_i) = \mathbb{1}_{\widehat{i^*}} \mathbb{1}_{\widehat{i}} = \mathbb{1}_{\widehat{i^*}\widehat{i}} = \mathbb{1}_{\widehat{(\varepsilon,\varepsilon)}} = \mathbb{1}_{\mathcal{G}^0}$$

e como X é compacto, o Corolário 3.1.5(4) diz que essa é a unidade de $C_c(\mathcal{G})$. Portanto $\varphi(S_i)$ é uma isometria, para qualquer $i = 1, \dots, n$. Além disso, vale que

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(S_i S_i^*) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\widehat{(i,i)}} = \mathbb{1}_{\mathcal{G}^0}.$$

Logo, pela propriedade universal da C*-álgebra de Cuntz, $\mathcal{O}_d \cong C^*(\varphi(S_1), \dots, \varphi(S_d)) \subseteq C^*(\mathcal{G})$.

Para provar que φ é um isomorfismo, fixe um $s = (\alpha, \beta) \in \mathcal{S}$. Como no Teorema 4.3.5, consideramos $f \in C_c(D_{s^*s}) = C_c(Z(\beta))$ e $g \in C_c(D_{ss^*}) = C_c(Z(\alpha))$. Note que, dado $\omega \in \Sigma^*$, o conjunto

$$\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{Z(\omega\gamma)} : \gamma \in \Sigma^*\}$$

é denso em $C_c(Z(\omega))$. Sendo assim, podemos considerar f e g como sendo funções características nos cilindros adequados.

Sendo assim, seja $f = \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}$ para um $\gamma \in \Sigma^*$ qualquer.

Então, pela propriedade universal de $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}\sigma\times\pi(\iota(\delta_s \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)})) = \sigma_s\pi(\mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}) = S_\alpha S_\beta^* S_{\beta\gamma} S_{\beta\gamma}^* = \\ = S_\alpha S_\beta^* S_\beta S_\gamma S_{\beta\gamma}^* = S_{\alpha\gamma} S_{\beta\gamma}^*.\end{aligned} \tag{4.33}$$

Note que pela Afirmação 3, temos que

$$\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*} = \mathbb{1}_{\widehat{(\alpha,\beta)}},$$

de modo que

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma\times\pi(\iota(\delta_s \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}))) = \varphi(S_{\alpha\gamma} S_{\beta\gamma}^*) = \varphi(S_\alpha S_\gamma S_\gamma^* S_\beta^*) = \\ = \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{\gamma}} * \mathbb{1}_{\widehat{\gamma}^*} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*} = \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{(\gamma,\gamma)}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*}.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Agora, dado $\omega \in \Theta_s$, temos $\omega = [(\alpha,\beta),\beta x]$ para algum $x \in X$. Assim, por um lado

$$\delta_s \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}(\omega) = \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}(\mathbf{s}_s(\omega)) = \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}(\beta x) = \mathbb{1}_{Z(\gamma)}(x).$$

Por outro lado,

$$\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{(\gamma,\gamma)}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*}(\omega) = \sum_{abc=\omega} \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}}(a)\mathbb{1}_{\widehat{(\gamma,\gamma)}}(b)\mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*}(c).$$

Considerando apenas o caso em que o produto acima é não nulo, devemos ter c da forma $c = [(\varepsilon,\beta),\beta x]$. Sendo $b = [(\gamma,\gamma),y]$ para que b e c possam ser multiplicados, devemos ter $y = \theta_{(\varepsilon,\beta)}(\beta x) = x$. Para que $\mathbb{1}_{\widehat{(\gamma,\gamma)}}(b)$ não seja nulo, devemos ter $x \in Z(\gamma)$. Por último, para que a e b possam ser multiplicados, devemos ter $a = [(\alpha,\varepsilon),x]$, e nesse caso $\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}}(a) = 1$. Logo, podemos afirmar que

$$\mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{(\gamma,\gamma)}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*}(\omega) = \mathbb{1}_{Z(\gamma)}(x),$$

de modo que

$$\varphi(\sigma\times\pi(\iota(\delta_s \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}))) = \iota(\delta_s \mathbb{1}_{Z(\beta\gamma)}).$$

Do mesmo modo, seja $g = \mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}$ para um $\gamma \in \Sigma^*$ qualquer.

Então, pela propriedade universal de $\mathcal{G}$,

$$\begin{aligned}\sigma\times\pi(\iota(\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}\delta_s)) = \pi(\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)})\sigma_s = S_{\alpha\gamma}S_{\alpha\gamma}^*S_\alpha S_\beta^* = \\ = S_\alpha S_\gamma S_\gamma^* S_\alpha^* S_\alpha S_\beta^* = S_\alpha S_\gamma S_\gamma^* S_\beta^*.\end{aligned} \tag{4.35}$$

Novamente, aplicando φ obtemos

$$\varphi(\sigma\times\pi(\iota(\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}\delta_s))) = \mathbb{1}_{\widehat{\alpha}} * \mathbb{1}_{\widehat{(\gamma,\gamma)}} * \mathbb{1}_{\widehat{\beta}^*},$$

que calculado em um $\omega = [(\alpha,\beta),\beta x] \in \Theta_s$ tem o mesmo valor que $\mathbb{1}_{Z(\gamma)}(x)$. Agora, calculando para esse mesmo ω,

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}\delta_s(\omega) = \mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}(\mathtt{r}_s([(\alpha,\beta),\beta x])) = \mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}(\theta_{(\alpha,\beta)}(\beta x)) = \\ = \mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}(\alpha x) = \mathbb{1}_{Z(\gamma)}(x).\end{aligned}$$

Logo também vale a igualdade

$$\varphi(\sigma\times\pi(\iota(\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}\delta_s))) = \iota(\mathbb{1}_{Z(\alpha\gamma)}\delta_s).$$

Isso nos permite concluir que

$$\varphi\circ(\sigma\times\pi) = \mathrm{Id}_{C_c(\Theta_s)}\,.$$

Como os Θ_s formam uma base para a topologia de $\mathcal{G}$, φ é a inversa de $\sigma\times\pi$ dada pelo Teorema 4.3.5, e temos o isomorfismo

$$\mathcal{O}_d \cong C^*(\mathcal{G})$$

como desejado.

Referências

[Davidson 1996] DAVIDSON, K. R. *C*-algebras by example.* Providence: Amer Mathematical Society, 1996. (Fields Institute Monographs, 6). ISBN 9780821805992.

[Dugundji 1966] DUGUNDJI, J. *Topology.* 1st. ed. [S.l.]: Allyn and Bacon, Inc., 1966. (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics). ISBN 9780205002719.

[Exel 2008] EXEL, R. Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, Springer, v. 39, n. 2, p. 191–313, 2008.

[Lawson 1998] LAWSON, M. V. *Inverse semigroups: the theory of partial symmetries.* New Jersey: World Scientific, 1998. ISBN 9789810233167.

[Murphy 1990] MURPHY, G. J. *C*-Algebras and Operator Theory.* San Diego: Academic Press, 1990. ISBN 9780125113601.

[Paterson 1999] PATERSON, A. L. T. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras.* 1. ed. New York: Birkhäuser Basel, 1999. (Progress in Mathematics 170). ISBN 9781461272762.

[Putnam 2019] PUTNAM, I. F. Lecture notes on C*-algebras. 2019. Disponível em: http://www.math.uvic.ca/faculty/putnam/ln/lecture_notes.html.

[Sims 2017] SIMS, A. Étale groupoids and their C*-algebras. 2017. Disponível em:
https://www.uow.edu.au/∼asims/notes.html.