Exame de qualificação em Otimização 2019.2

Resolva 5 questões.

1. Mostre a desigualdade das médias aritméticas e geométricas
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \beta_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n,$$
usando a solução do problema de maximizar a função $f(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i$ sujeito a $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i=1,\ldots,n)$.

2. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um cone *fechado* (não necessariamente convexo) e $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \leq 0,\ \forall x \in K\}$ o cone polar de K. Se $y \in K^*$, mostre que a projeção de y em K é dada unicamente pelo vetor nulo.

3. Considere o problema (P): minimizar $f(x)$ sujeito a $x \in C$, em que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ e convexa e C é um conjunto não-vazio, convexo e compacto. Um método clássico para tal problema é o método de Frank-Wolfe que a cada iteração, a partir de um ponto viável x_k, calcula $\bar{x}_k$ (uma) solução do subproblema
$$\begin{array}{ll}\min\limits_{x} & \langle \nabla f(x_k), x - x_k\rangle \\ \text{s. a} & x \in C,\end{array}$$
e então atualiza $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, em que $d_k = \bar{x}_k - x_k$, $\alpha_k = \min\{1, \bar{\alpha}_k\}$, com $\bar{\alpha}_k = \arg\min_{\alpha>0} f(x_k + \alpha d_k)$.

   (a) Mostre que d_k é uma direção de descida desde que x_k não seja estacionário para (P).

   (b) Mostre que x_{k+1} é viável.

   (c) Proponha um critério de parada e relacione-o com a solução global de (P).

4. Enuncie o teorema do hiperplano separador e em seguida, utilize-o para provar o lema de Farkas:

   Exatamente um dos seguintes problemas tem solução:
$$(P_1)\quad Ax = b, \quad x \geq 0, \qquad\qquad (P_2)\quad A^T y \geq 0, \quad b^T y < 0.$$

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ com $m \leq n$, posto$(A) = m$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{C}^2$. Mostre que se x_* é tal que $Ax_* = b$ e existe $\lambda_* \in \mathbb{R}^m$ tal que $\nabla f(x_*) = A^T\lambda_*$ e $y^T\nabla^2 f(x_*) y > 0$, para todo vetor y não nulo em $\mathcal{N}(A)$, então x_* é minimizador local estrito de f em $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$.

6. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funções convexas diferenciáveis e seja $\overline{x}$ um ponto KKT do problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $g(x) \leq 0$. Mostre que se $\overline{x}$ satisfaz a condição de Mangasarian-Fromovitz, então o conjunto dos multiplicadores de Lagrange associados a $\overline{x}$ é limitado.