Exame de Qualificação - Análise Numérica - 2020.1 - Bloco 1

1) Para o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &y' = f(x,y), \quad a < x \\ &y(a) = \alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

considere o método de passo múltiplo

$$y_{k+2} = 4y_{k+1} - 3y_k - 2hf(x_k, y_k), \; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

a) Obtenha o método acima usando um iterpolador polinomial de segundo grau para pontos igualmente espaçados x_k, x_{k+1} e x_{k+2}, sendo $x_k = kh$.
Sugestão: Se $P_2(x)$ denota o interpolador, use a aproximação $y'(x_k) \approx P_2'(x_k)$ e conclua que

$$y'(x_k) \approx \frac{-3y(x_k) + 4y(x_{k+1}) - y(x_{k+2})}{2h} + \frac{h^2}{3} y'''(t_k)$$

para algum t_k com $x_k < t_k < x_{k+2}$.

b) Analise a consistência, a estabilidade e a convergência desse método.

2) Alguns autores unificam alguns métodos para o problema de Cauchy (1) numa discretização que chamam de método-θ, $0 \leq \theta \leq 1$:

$$Y^{n+1} = Y^n + (1-\theta)hf(x_n, Y^n) + \theta hf(x_{n+1}, Y^{n+1}),$$

em que $Y^n \approx y(x_n)$, $x_n = nh, \; n \geq 0$.

a) Quais valores de θ correspondem aos métodos de Euler atrasado, Euler avançado e trapézios?

b) Apresente um esboço das regioes de estabilidade absoluta destes três metodos, justificando matematicamente pelo menos uma delas.

Exame de Qualificação - Análise Numérica - 2020.1 - Bloco 2

1) Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e A^+ sua pseudoinversa (inversa generalizada de Moore-Penrose):

a) Prove que se $m = n$ e $posto(A) = n$, então $A^+ = A^{-1}$.

b) Dado $b \in \mathbb{R}^m$, determine a solução para o problema

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

em termos da pseudoinversa e prove que esta é, de fato, uma solução do problema.

c) Prove que A^+ é solução de

$$\min_{X\in\mathbb{R}^{n\times m}} \|AX - I_m\|_F,$$

em que I_m é a matriz identidade $m \times m$ e $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

2) Sejam $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Prove que se A é estritamente diagonalmente dominante, isto é, se suas entradas satisfazem

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

então o método de Jacobi para $Ax = b$ converge para $x = A^{-1}b$.